

В.И. КЛЯЦКИН

КОГЕРЕНТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ
В ДИНАМИКЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Том 3.

ВОЛНЫ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ
МНОГОМЕРНАЯ ЗАДАЧА

Настоящий электронный вариант монографии, представляет переработку второго тома монографии [17], дополненного необходимой информацией из первого тома. Для удобства пользования материал разбит на три небольших совершенно независимых тома, так как в них рассматриваются разные физические проблемы, не связанные друг с другом.

В первом томе на основе функционального подхода с единой точки зрения рассматриваются задачи о диффузии пассивной примеси в случайных потоках как в лагранжевом, так и эйлеровом описании. Основное внимание концентрируется на описании когерентных явлений на основе идей статистической топографии. Эти явления, происходящие с вероятностью равной единице, осуществляются практически во всех реализациях процесса диффузии примеси. К ним относятся такие явления как кластеризация частиц и поля примеси в случайных сжимаемых полях скоростей, имеющих потенциальную составляющую, кластеризация малоинерционных частиц в случайных несжимаемых полях скоростей, резкое обострение градиентов поля плотности и возникновение фрактальной структуры изолиний постоянной концентрации в бездивергентных полях скоростей. Все эти явления анализируются на основе единого подхода, основанного на анализе одноточечных пространственно-временных плотностей вероятностей.

Во втором томе рассматривается задача о распространении плоских волн в слоистых средах, которая описывается одномерной краевой задачей и традиционно привлекает внимание многих исследователей. Это обусловлено, с одной стороны, ее простотой по сравнению с аналогичными задачами для двух и трех измерений, а с другой стороны, ее важностью для понимания процесса распространения волн в случайных средах. Учитывая, что одномерная задача допускает точное асимптотическое решение, можно проследить на ее примере влияние различных моделей, параметров среды и краевых условий на статистические характеристики волнового поля.

В третьем томе рассматривается проблема статистического описания волнового поля при распространении волн в случайных многомерных средах в рамках приближения квазиоптики на основе параболического уравнения (в том числе и задача формирования каустической структуры волнового поля). Эти проблемы описываются как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных, и каждая из них распадается на большое множество отдельных задач, представляющих самостоятельный физический интерес.

Для научных работников, специализирующихся в областях акустики, радиофизики, прикладной математики, теоретической и математической физики, имеющих дело со стохастическими динамическими системами, а также для студентов старших курсов и аспирантов.

Содержание

Предисловие	5
Глава 1. Метод стохастического уравнения	8
1.1. Исходные стохастические уравнения и некоторые их следствия	8
1.1.1. Уравнения Максвелла для стационарной задачи	8
1.1.2. Уравнение Гельмгольца (краевая задача) и параболическое уравнение квазиоптики (волны в случайно-неоднородных средах) ..	9
1.2. Приближение дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды ..	23
1.3. Применимость приближения дельта-коррелированности	34
1.3.1. Метод последовательных приближений	34
1.3.2. Диффузионное приближение для волнового поля	37
1.4. Амплитудно-фазовые флуктуации волнового поля	41
1.4.1. Случайный фазовый экран ($\Delta x \ll x$)	44
1.4.2. Случай непрерывной среды ($\Delta x = x$)	44
Глава 2. Геометрическая оптика в случайно-неоднородной среде	47
2.1. Диффузия лучей в случайно-неоднородной среде (лагранжево описание)	47
2.2. Возникновение каустик в случайно-неоднородной среде	51
2.3. Амплитудно-фазовые флуктуации волнового поля (эйлерово описание)	56
Глава 3. Континуальная запись решения задачи	61
3.1. Общие соотношения	61
3.2. Статистическое описание волнового поля	64
3.3. Асимптотический анализ флуктуаций интенсивности плоской волны ..	67
3.3.1. Случайный фазовый экран	69
3.3.2. Случай непрерывной случайной среды	71
3.4. Каустическая структура волнового поля в случайно-неоднородной среде	76
3.4.1. Элементы статистической топографии случайного поля интен-	76
сивности	76
3.4.2. Область слабых флуктуаций интенсивности	78
3.4.3. Область сильных флуктуаций интенсивности	81
Приложения. Элементы математического аппарата для описания ко-	
герентных явлений	84
Глава А. Некоторые общие характеристики динамических систем	84
А.1. Вариационные (функциональные) производные	84
А.2. Зависимость решения задачи от коэффициентов уравнения	88
А.2.1. Принцип динамической причинности	88

А.2.2. Зависимость решения задачи от начального условия	90
А.3. Уравнение Лиувилля	91
А.3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения	91
А.3.2. Обратное уравнение Лиувилля	94
Глава Б. Статистические характеристики случайных процессов и полей	95
Б.1. Общие замечания	95
Б.2. Расщепление корреляций для гауссовых случайных процессов и полей	96
Глава В. Статистическая топография случайных процессов и полей	100
В.1. Случайные процессы	100
В.1.1. Типичная реализация случайного процесса	100
В.1.2. Статистика числа точек пересечения процесса с прямой	101
В.1.3. Простейшие примеры случайных процессов	102
В.2. Случайные поля	104
Глава Г. Приближение дельта-коррелированного гауссова случайного поля	106
Г.1. Уравнение Фоккера–Планка	106
Г.2. Плотность вероятностей перехода	108
Г.3. Обратное уравнение Фоккера–Планка	109
Г.3.1. Явление переброса в сингулярных системах	110
Г.4. Об условиях применимости уравнения Фоккера–Планка	114
Г.5. Простейшие марковские случайные процессы	114
Г.5.1. Винеровский случайный процесс	115
Г.5.2. Винеровский случайный процесс со сносом	115
Г.5.3. Логарифмически нормальный процесс	116
Г.6. Диффузионное приближение	119
Список литературы	122
Предметный указатель	127

Предисловие

В последнее время внимание и теоретиков, и экспериментаторов привлекает вопрос о связи динамики усредненных статистических характеристик решения задачи с поведением решения в отдельных реализациях. Это особенно актуально для геофизических проблем, связанных с атмосферой и океаном, где, вообще говоря, отсутствует соответствующий ансамбль усреднения и экспериментаторы, как правило, имеют дело с отдельными реализациями.

Решение динамических задач для этих конкретных реализаций параметров среды практически безнадежно из-за их чрезвычайной математической сложности. В то же время исследователей интересуют основные особенности протекающих явлений, без отвлечения на частности. Поэтому очень привлекательной оказалась идея использовать хорошо развитый математический аппарат случайных процессов и полей, т. е. вместо отдельных реализаций исследуемых процессов рассматривать статистические средние по всему ансамблю возможных реализаций. В настоящее время, например, практически все задачи физики атмосферы и океана в той или иной степени основываются на статистическом анализе.

Введение случайности в параметрах среды порождает стохастичность в самих физических полях. Индивидуальные реализации, например скалярных двумерных полей $\rho(\mathbf{R}, t)$, $\mathbf{R} = \{x, y\}$, напоминают сложный горный ландшафт со случайным распределенными пиками, провалами, хребтами и перевалами. На рис. 0.1 приведены примеры реализации двух случайных полей разной статистической структуры.

Обычно используемые методы статистического усреднения (т. е. вычисления средних типа среднего значения — $\langle \rho(\mathbf{R}, t) \rangle$), пространственно-временной корреляционной функции — $\langle \rho(\mathbf{R}, t) \rho(\mathbf{R}', t') \rangle$ и т. п., где через $\langle \dots \rangle$ обозначено усреднение по ансамблю реализаций случайных параметров) сглаживают качественные особенности отдельных реализаций, и зачастую полученные статистические характеристики не только не имеют ничего общего с поведением отдельных реализаций, но даже, на первый взгляд, им противоречат.

Таким образом, статистические средние указанного типа обычно характеризуют «глобальные» пространственно-временные масштабы области, где осуществляются стохастические процессы, и ничего не говорят о деталях развития процессов внутри ее. Так, например, имеет место экспоненциальное разбегание лучей в среднем при распространении волн в случайных средах, и в тоже время с вероятностью единица происходит образование *каустики* на конечных расстояниях.

Такие физические процессы и явления, происходящие с вероятностью единица, будем называть *когерентными* процессами и явлениями (см., например, [14, 15, 17, 20]). Подобную «статистическую когерентность» можно рассматривать как некую организацию сложной динамической системы, и выделение ее *статистически устойчивых характеристик* аналогично понятию *когерентности* как *самоорганизации* многокомпонентных систем, возникающих из хаотических взаимодействий их элементов (см., например, [71]). Получить же ответ на вопрос о том, происходит ли такое явление с вероятностью единица, вообще говоря, достаточно сложно. Однако для ряда задач в рамках простейших моделей флуктуирующих параметров это удается сделать путем аналитического анализа. В других случаях убедиться в этом можно с помощью численного моделирования или из анализа экспериментальных данных.

Полная статистика (например, полная совокупность всех n -точечных пространственно-временных моментных функций), безусловно, содержит всю информацию о динамической системе. Однако на практике удается исследовать лишь некоторые простей-

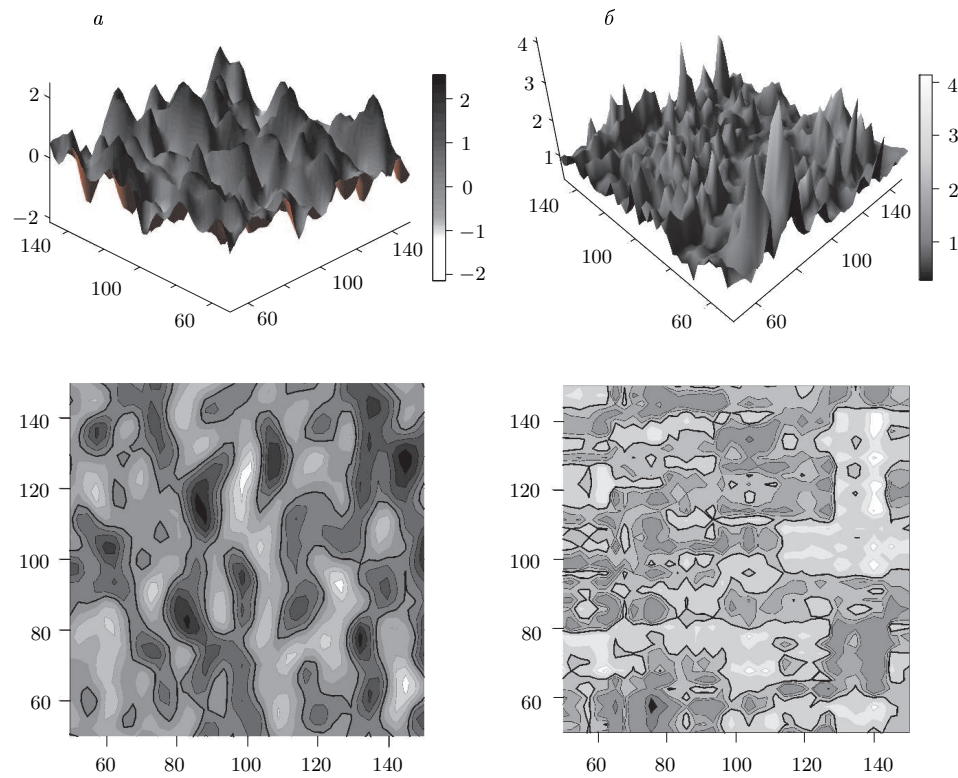


Рис. 0.1. Реализации гауссова с нулевым средним значением (*a*) и логнормального (*b*) полей и их топографические линии уровня. Жирными кривыми на нижних рисунках обозначены линии уровня, соответствующие значениям 0 (*a*) и 1 (*b*)

шие статистические характеристики, связанные, главным образом, с одновременными и одноточечными распределениями вероятностей. Поэтому возникает вопрос: как, зная такого рода статистические характеристики и особенности системы, получить основные количественные и качественные особенности поведения отдельных ее реализаций?

Ответ на этот вопрос дают *методы статистической топографии*. На важность использования таких методов было указано еще в книге [77], где этот термин, по-видимому, и был впервые введен. Методы статистической топографии позволяют переосмыслить «философию» статистического анализа динамических стохастических систем, что может быть полезно и для экспериментаторов, планирующих статистическую обработку экспериментального материала. Все эти вопросы подробно обсуждаются в книге.

При распространении волн в среде со случайными крупномасштабными (по сравнению с длиной волны) неоднородностями из-за эффекта многократного рассеяния вперед флуктуации волнового поля быстро нарастают с расстоянием. Начиная с некоторого расстояния становятся непригодными расчеты по теории возмущений в той или иной ее форме (область сильных флуктуаций). Сильные флуктуации интенсивности могут возникать при распространении радиоволн через ионосферу, солнечную коро-

ну или межзвездную среду, при просвечивании атмосферы планет во время покрытия ими естественных или искусственных источников излучения и в ряде других случаев.

Общее состояние теории распространения волн в случайно-неоднородных средах приведено в монографиях и обзорных работах [12, 17, 28, 30, 46, 55, 56, 58, 66]. Ниже, следуя [22, 32, 56], мы рассмотрим описание процесса распространения волн в случайно-неоднородных средах в рамках параболического уравнения квазиоптики на основе приближения дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды и обсудим условия применимости такого подхода.

При этом целесообразно разбить рассматриваемый материал на три части (главы). В первой главе рассмотрение ведется на основе изучения статистических свойств исходного стохастического параболического уравнения в частных производных, описывающего процесс распространения волны, во второй главе рассматривается приближение геометрической оптики для параболического уравнения, а в третьей главе изучаются статистические свойства решения параболического уравнения, выписанного в явном виде (в виде континуального интеграла).

В Приложении обсуждаются основные идеи математического аппарата, позволяющего описывать когерентные эффекты в стохастических динамических системах и, в частности, в задаче о распространении волн в многомерных случайных средах.

Глава 1

МЕТОД СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1.1. Исходные стохастические уравнения и некоторые их следствия

1.1.1. Уравнения Максвелла для стационарной задачи

Распространение монохроматической электромагнитной волны с частотой ω в стационарной неоднородной среде описывается уравнениями Максвелла (см., например, [30])

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = ik\mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -ik\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})) = 0, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ — напряженности электрического и магнитного полей, $\varepsilon(\mathbf{r})$ — диэлектрическая проницаемость среды, волновое число $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ (λ — длина волны, а c — скорость распространения волны). Предполагается, что магнитная проницаемость $\mu = 1$, проводимость среды $\sigma = 0$ и временная зависимость всех полей имеет вид $e^{-i\omega t}$.

Уравнения (1.1) можно переписать в виде замкнутого уравнения для электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

$$[\Delta + k^2\varepsilon(\mathbf{r})] \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla(\mathbf{E}(\mathbf{r})\nabla \ln \varepsilon(\mathbf{r})). \quad (1.2)$$

Магнитное поле $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ при этом вычисляется с помощью равенства

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{ik} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (1.3)$$

Мы рассматриваем распространение электромагнитных волн в среде со слабыми флуктуациями диэлектрической проницаемости. Положим

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = 1 + \varepsilon_1(\mathbf{r}),$$

где $\varepsilon_1(\mathbf{r})$ — флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости ($\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \rangle = 0$). Малость флуктуаций $\varepsilon_1(\mathbf{r})$ означает, что $|\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \rangle| \ll 1$. Следовательно, уравнение (1.2) можно записать в упрощенной форме

$$[\Delta + k^2] \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -k^2\varepsilon_1(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \nabla(\mathbf{E}(\mathbf{r})\nabla \varepsilon_1(\mathbf{r})). \quad (1.4)$$

В работах [23, 31] на основе теории возмущений проводилась оценка деполаризации световой волны в условиях реальной атмосферы на длинах порядка 1 км и было показано, что она крайне мала, так что можно пренебречь последним членом в правой части уравнения (1.4). В результате можно перейти фактически к скалярному уравнению Гельмгольца

$$[\Delta + k^2] U(\mathbf{r}) = -k^2\varepsilon_1(\mathbf{r})U(\mathbf{r}). \quad (1.5)$$

Для уравнения (1.5) следует сформулировать краевые условия и установить источник излучения.

1.1.2. Уравнение Гельмгольца (краевая задача) и параболическое уравнение квазиоптики (волны в случайно-неоднородных средах)

Пусть слой неоднородной среды занимает часть пространства $L_0 < x < L$ и в точке с координатами (x_0, \mathbf{R}_0) , где через \mathbf{R} обозначены координаты в плоскости, перпендикулярной оси x , находится точечный источник. Тогда волновое поле внутри слоя $G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0)$ описывается уравнением для функции Грина:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k^2[1 + \varepsilon(x, \mathbf{R})] \right\} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) = \delta(x - x_0)\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0), \quad (1.6)$$

где k — волновое число, $\Delta_{\mathbf{R}} = \partial^2/\partial \mathbf{R}^2$, а $\varepsilon_1(\mathbf{r}) = \varepsilon(x, \mathbf{R})$ — отклонение показателя преломления (или диэлектрической проницаемости) от единицы.

Пусть вне слоя $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = 0$. Тогда вне слоя волновое поле описывается уравнением Гельмгольца

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k^2 \right\} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) = 0,$$

и на границах слоя должны выполняться условия непрерывности функций G и $\partial G/\partial x$. Кроме того, для уравнения (1.6) также должны выполняться условия излучения при $x \rightarrow \pm\infty$.

Волновое поле вне слоя среды можно, очевидно, представить в виде

$$G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) = \begin{cases} \int d\mathbf{q} T_1(\mathbf{q}) \exp \left[-i\sqrt{k^2 - q^2}(x - L_0) + i\mathbf{q}\mathbf{R} \right], & x \leq L_0; \\ \int d\mathbf{q} T_2(\mathbf{q}) \exp \left[i\sqrt{k^2 - q^2}(x - L) + i\mathbf{q}\mathbf{R} \right], & x \geq L. \end{cases}$$

Следовательно, краевое условие для уравнения (1.6) на границе $x = L_0$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (1.7)$$

Аналогично получаем краевое условие на границе $x = L$ в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L} = 0. \quad (1.8)$$

Оператор $\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}$, фигурирующий в (1.7), (1.8), для безграничного по \mathbf{R} пространства определяется преобразованием Фурье. Его же можно рассматривать как линейный интегральный оператор, ядро которого определяется функцией Грина для свободного пространства.

Замечание 1.1. Функция Грина однородного пространства и ее свойство факторизации

Прежде всего рассмотрим функцию Грина для одномерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dx^2} g(x, x_0) + k^2 g(x, x_0) = \delta(x - x_0). \quad (1.9)$$

Решение уравнения (1.9) с условиями излучения при $x \rightarrow \pm\infty$ имеет вид

$$g(x, x_0) = g(x - x_0) = \frac{1}{2ik} e^{ik|x-x_0|}. \quad (1.10)$$

Появление модуля $|x - x_0|$ в правой части (1.10) обусловлено тем, что уравнение (1.9) — уравнение второго порядка по x . Однако, если мы зафиксируем взаимное расположение точек наблюдения и расположения источника, то функция Грина будет удовлетворять равенству (для определенности считаем, что $x_0 > x$)

$$\frac{\partial}{\partial x_0} g(x - x_0) = ikg(x - x_0),$$

которое можно рассматривать как уравнение первого порядка, если дополнить его начальным условием

$$g(x - x_0)|_{x_0=x} = g(0) = \frac{1}{2ik}.$$

Таким образом, при фиксированном расположении источника относительно точки наблюдения порядок уравнения для функции Грина понижается. Это обстоятельство является общим для волновых задач (*свойство факторизации волновых уравнений*) и соответствует тому факту, что в однородном пространстве волна, излучаемая, например, в направлении $x < x_0$ (или $x > x_0$), распространяется без изменения направления.

В общем случае функция Грина удовлетворяет операторному уравнению второго порядка

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \widehat{M}^2(\boldsymbol{\eta}) \right\} g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = \delta(x - x_0)g(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0), \quad (1.11)$$

где оператор $\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})$ действует на временную и другие пространственные переменные, обозначенные через $\boldsymbol{\eta}$. Так, для уравнения (1.9) оператор $\widehat{M}^2(\boldsymbol{\eta})$ есть просто число $\widehat{M}^2(\boldsymbol{\eta}) = k^2$.

Функция Грина имеет структуру, аналогичную (1.10):

$$g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = e^{i|x-x_0|\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})} g(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = e^{i|x-x_0|\widehat{M}(-\boldsymbol{\eta}_0)} g(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) \quad (1.12)$$

и, следовательно, например при $x < x_0$, описывается операторным уравнением первого порядка по x (x_0) вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) &= -\frac{\partial}{\partial x} g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = \\ &= i\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = i\widehat{M}(-\boldsymbol{\eta}_0)g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) \end{aligned}$$

с начальным условием

$$g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0)|_{x_0=x} = g(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) \equiv g(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0).$$

Решение уравнения (1.11) непрерывно по x , а его производная по x терпит разрыв в точке расположения источника $x = x_0$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) \right|_{x=x_0+0} - \left. \frac{\partial}{\partial x} g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) \right|_{x=x_0-0} = \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0). \quad (1.13)$$

Подставляя (1.12) в (1.13), получаем выражение

$$2i\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})g(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0). \quad (1.14)$$

В общем случае оператор $\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})$ можно рассматривать как интегральный оператор. В самом деле, действие оператора $\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})$ на произвольную функцию $f(\boldsymbol{\eta})$ можно представить в виде

$$\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\eta}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widehat{M}(\boldsymbol{\eta})\delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi})f(\boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi M(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi})f(\boldsymbol{\xi}),$$

где ядро интегрального оператора определяется равенством

$$M(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) = \widehat{M}(\boldsymbol{\eta})\delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}). \quad (1.15)$$

Можно ввести и обратный оператор $\widehat{M}^{-1}(\boldsymbol{\eta})$ с соответствующим ядром $M^{-1}(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi})$.

Действуя на равенство (1.14) оператором $\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})$, получаем, согласно (1.15), ядро интегрального оператора вида

$$M(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = 2i\widehat{M}^2(\boldsymbol{\eta})g(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0), \quad (1.16)$$

а действуя на (1.14) обратным оператором $\widehat{M}^{-1}(\boldsymbol{\eta})$, получаем ядро обратного интегрального оператора

$$M^{-1}(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = \widehat{M}^{-1}(\boldsymbol{\eta})\delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = 2ig(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0). \quad (1.17)$$

Таким образом, ядра интегральных операторов $\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})$ и $\widehat{M}^{-1}(\boldsymbol{\eta})$ просто определяются самим фундаментальным решением волновых уравнений.

Запишем теперь уравнение Гельмгольца в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k^2 \right) g(x - x_0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) = \delta(x - x_0)\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0), \quad (1.18)$$

где через \mathbf{R} обозначены координаты в плоскости, перпендикулярной оси x .

Решение уравнения (1.18) с условиями излучения на бесконечности имеет вид

$$g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad \mathbf{r} = \{x, \mathbf{R}\}.$$

Функция $g(\mathbf{r})$ допускает интегральное представление

$$g(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{8i\pi^2} \int \frac{d\mathbf{q}}{\sqrt{k^2 - \mathbf{q}^2}} \exp \left\{ i\sqrt{k^2 - \mathbf{q}^2}|x| + i\mathbf{q}\mathbf{R} \right\}.$$

Следовательно, оператор $\widehat{M}(\mathbf{R})$ в данном случае имеет вид

$$\widehat{M}(\mathbf{R}) = \sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}, \quad \widehat{M}(\mathbf{R}_0) = \sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}_0}},$$

и соответствующие ядра интегральных операторов определяются, согласно (1.16), (1.17), выражениями

$$\begin{aligned} M(\mathbf{R}) &= 2i(k^2 + \Delta_{\mathbf{R}})g(\mathbf{R}) = -\frac{i}{2\pi R^2} \left(\frac{1}{R} - ik \right) e^{ikR}, \\ M^{-1}(\mathbf{R}) &= -\frac{i}{2\pi R} e^{ikR}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В двумерном случае имеем соответственно

$$g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \quad (\mathbf{r} = \{x, y\}),$$

где $H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}|)$ — функция Ганкеля и, следовательно, ядра соответствующих интегральных операторов

$$\widehat{M}(y) = \left[k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]^{1/2}, \quad \widehat{M}^{-1}(y) = \left[k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]^{-1/2}$$

определяются выражениями

$$M(y) = \frac{k}{2|y|} H_1^{(1)}(k|y|), \quad M^{-1}(y) = \frac{1}{2} H_0^{(1)}(k|y|). \quad (1.20)$$

В одномерном случае, как указывалось выше, операторы \widehat{M} , \widehat{M}^{-1} являются просто числами. \blacklozenge

Таким образом, поле точечного источника в неоднородной среде описывается краевой задачей (1.6)–(1.8).

Внутри слоя среды функция $G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0)$ непрерывна во всех точках, а что касается величины $\frac{\partial}{\partial x}G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0)$, то она испытывает скачок в точке расположения источника $x = x_0$:

$$\frac{\partial}{\partial x}G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=x_0+0} - \frac{\partial}{\partial x}G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=x_0-0} = \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}').$$

Краевая задача (1.6)–(1.8) эквивалентна интегральному уравнению

$$G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) = g_0(x - x_0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) - k_0^2 \int_{L_0}^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) G(x_1, \mathbf{R}_1; x_0, \mathbf{R}_0), \quad (1.21)$$

где $g(x, \mathbf{R})$ — функция Грина в свободном пространстве. Отметим, что уравнение (1.21) можно переписать также в виде уравнения

$$G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) = g_0(x - x_0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) - k_0^2 \int_{L_0}^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 G(x, \mathbf{R}; x_1, \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) g_0(x_1 - x_0, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0). \quad (1.22)$$

В трехмерном случае

$$g(x, \mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi r} e^{ikr}, \quad r = \sqrt{x^2 + \mathbf{R}^2},$$

и описывается интегральным представлением

$$g(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{q} g(\mathbf{q}) \exp \left\{ i\sqrt{k^2 - q^2}|x| + i\mathbf{q}\mathbf{R} \right\}, \quad g(\mathbf{q}) = \frac{1}{8i\pi^2 \sqrt{k^2 - q^2}}. \quad (1.23)$$

Действие оператора $\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}$ на произвольную функцию $F(\mathbf{R})$ можно представить в виде интегрального оператора, согласно Замечанию 1.1,

$$\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}F(\mathbf{R}) = \int d\mathbf{R}' K(\mathbf{R} - \mathbf{R}')F(\mathbf{R}'), \quad (1.24)$$

ядро которого определяется равенством

$$K(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = 2i(k^2 + \Delta_{\mathbf{R}})g(0, \mathbf{R} - \mathbf{R}'). \quad (1.25)$$

Соответствующее ядро обратного оператора определяется равенством

$$L(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = (k^2 + \Delta_{\mathbf{R}})^{-1/2} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = 2ig(0, \mathbf{R} - \mathbf{R}'). \quad (1.26)$$

Если точечный источник находится на границе слоя $x_0 = L$, то волновое поле внутри слоя при $L_0 < x < L$ описывается краевой задачей

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k_0^2 [1 + \varepsilon(x, \mathbf{R})] \right\} G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L_0} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L} &= -\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}'). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Краевой задаче (1.27) теперь эквивалентно интегральное уравнение

$$G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) = g_0(x - L, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) - k_0^2 \int_{L_0}^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) G(x_1, \mathbf{R}_1; L, \mathbf{R}_0), \quad (1.28)$$

соответствующее точке $x_0 = L$ в уравнении (1.21). Полагая в (1.22) $x = L$ и сравнивая получившееся уравнение с уравнением (1.28), видим, что имеет место равенство

$$G(L, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) = G(x_0, \mathbf{R}_0; L, \mathbf{R}), \quad (1.29)$$

выражающее теорему взаимности.

Замечание 1.2. Падение волны на слой среды

Отметим, что краевая задача (1.27) описывает падение волны из полупространства $x > L$ на слой неоднородной среды. В самом деле, если из области $x > L$ на слой среды падает волна $u_0(x - L, \mathbf{R})$ (в отрицательном направлении оси x), то она создает на границе $x = L$ распределение источников $f(\mathbf{R}_0)$ такое, что

$$f(\mathbf{R}_0) = 2i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}u_0}}(0, \mathbf{R}_0). \quad (1.30)$$

В этом случае волновое поле $U(x, \mathbf{R})$ внутри слоя связано с решением уравнения (1.27) с помощью равенства

$$U(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{R}_0 G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) f(\mathbf{R}_0) \quad (1.31)$$

и описывается уравнением Гельмгольца

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k^2 [1 + \varepsilon(x, \mathbf{R})] \right\} U(x, \mathbf{R}) = 0 \quad (1.32)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}) \Big|_{x=L_0} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}) \Big|_{x=L} &= -2i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}u_0(L, \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Этой краевой задаче эквивалентно интегральное уравнение

$$U(x, \mathbf{R}) = u_0(x, \mathbf{R}) - k_0^2 \int_{L_0}^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) U(x_1, \mathbf{R}_1). \quad (1.34)$$

Поле $U(x, \mathbf{R})$ можно представить в виде

$$U(x, \mathbf{R}) = u_1(x, \mathbf{R}) + u_2(x, \mathbf{R}), \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x, \mathbf{R}) = -ik\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}\{u_1(x, \mathbf{R}) + u_2(x, \mathbf{R})\},$$

где вместо одной функции $U(x, \mathbf{R})$ мы ввели в рассмотрение две: $u_1(x, \mathbf{R})$ и $u_2(x, \mathbf{R})$, описывающие волны, распространяющиеся соответственно в отрицательном и положительном направлениях оси x и связанные с полем $U(x, \mathbf{R})$ равенствами, вытекающими из (1.35):

$$\begin{aligned} u_1(x, \mathbf{R}) &= \frac{i}{2\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}), \\ u_2(x, \mathbf{R}) &= -\frac{i}{2\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Дифференцируя (1.36) по x и используя уравнение (1.32), получаем систему уравнений для функций $u_1(x, \mathbf{R})$ и $u_2(x, \mathbf{R})$ с краевыми условиями, вытекающими из (1.33), вида

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) u_1(x, \mathbf{R}) &= -\frac{ik^2}{2\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \{ \varepsilon(x, \mathbf{R}) U(x, \mathbf{R}) \}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) u_2(x, \mathbf{R}) &= \frac{ik^2}{2\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \{ \varepsilon(x, \mathbf{R}) U(x, \mathbf{R}) \}, \\ u_1(L, \mathbf{R}) &= u_0(L, \mathbf{R}), \quad u_2(L_0, \mathbf{R}) = 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Функция $u_2(x, \mathbf{R})$ описывает волну, распространяющуюся в направлении, обратном направлению падающей волны, т.е. *обратнорассеянное поле*.

Если пренебречь эффектами, связанными с рассеянием назад, т.е. положить $u_2(x, \mathbf{R}) = 0$, то получаем *обобщенное параболическое уравнение*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}) &= -\frac{ik^2}{2\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \{ \varepsilon(x, \mathbf{R}) U(x, \mathbf{R}) \}, \\ U(L, \mathbf{R}) &= u_0(L, \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (1.38)$$

допускающее рассеяние на произвольные углы (не превышающие, однако, $\pi/2$).

Для рассеяния на малые углы ($\Delta_{\mathbf{R}} \ll k^2$), представляя поле $U(x, \mathbf{R})$ в виде

$$U(x, \mathbf{R}) = e^{-ik(x-L)} u(x, \mathbf{R})$$

и рассматривая падение волны из полупространства $x < 0$ на неоднородную среду (т.е. меняя $L - x$ на x), из (1.38) получаем *параболическое уравнение квазиоптики*, справедливое для описания распространения волн в среде с крупномасштабными трехмерными неоднородностями при рассеянии волны на малые углы:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}), \quad u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}), \quad (1.39)$$

которое нашло успешное применение во многих задачах распространения волн в атмосфере Земли и океане.

Отметим, что вопросом вывода и обоснования как параболического, так и обобщенного параболического уравнений посвящено много работ.

Краевые задачи, сформулированные выше, с помощью метода погружения можно переформулировать как задачи с начальными условиями по вспомогательному параметру — геометрической границе L (см., например, [13, 14, 17]).

Замечание 1.3. *Вывод уравнений метода погружения*

Получим уравнения погружения для краевой задачи (1.27). Продифференцируем уравнение (1.28) по параметру L . Получаем интегральное уравнение для функции $\frac{\partial}{\partial L} G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) &= \frac{\partial}{\partial L} g_0(x - L, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) - \\ &- k_0^2 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - L, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(L, \mathbf{R}_1) H_L(\mathbf{R}_1; \mathbf{R}_0) - \\ &- k_0^2 \int_{L_0}^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) \frac{\partial}{\partial L} G(x_1, \mathbf{R}_1; L, \mathbf{R}_0). \end{aligned} \quad (1.40)$$

В уравнении (1.40) через функцию $H_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0)$ обозначена функция

$$H_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0) = G(L, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0), \quad (1.41)$$

описывающая волновое поле в плоскости источника $x_0 = L$.

В силу факторизации функции Грина в свободном пространстве, она удовлетворяет уравнению первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial L} g_0(x - L, \mathbf{R}) = i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} g_0(x - L, \mathbf{R}),$$

и, следовательно, интегральное уравнение (1.40) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) &= \hat{A}(L, \mathbf{R}_0) g(x - L, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) - \\ &- k_0^2 \int_{L_0}^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) \frac{\partial}{\partial L} G(x_1, \mathbf{R}_1; L, \mathbf{R}_0), \end{aligned} \quad (1.42)$$

где действие оператора $\hat{A}(L, \mathbf{R}_0)$ по переменной \mathbf{R}_0 на произвольную функцию $f(\mathbf{R}_0)$ описывается формулой

$$\hat{A}(L, \mathbf{R}_0) f(\mathbf{R}_0) = i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}_0}} f(\mathbf{R}_0) - k_0^2 \int d\mathbf{R}_1 \varepsilon(L, \mathbf{R}_1) H_L(\mathbf{R}_1; \mathbf{R}_0) f(\mathbf{R}_1).$$

Сопоставляя теперь интегральные уравнения (1.42) и (1.28), видим, что они имеют одинаковую структуру, и, следовательно, их решения связаны интегральным равенством

$$\left[\frac{\partial}{\partial L} - i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}_0}} \right] G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) = -k_0^2 \int d\mathbf{R}_1 G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_1) \varepsilon(L, \mathbf{R}_1) H_L(\mathbf{R}_1; \mathbf{R}_0), \quad (1.43)$$

которое и является уравнением метода погружения, если его дополнить «начальным» условием (условием непрерывности перехода по L)

$$G(x, \mathbf{R}; x, \mathbf{R}_0) = H_x(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0).$$

Уравнение (1.43) можно переписать в виде интегрального уравнения

$$G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) = g(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) - k_0^2 \int_x^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) g(x_1, \mathbf{R}_1; L, \mathbf{R}_0),$$

где функция

$$g(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) = \exp\left(i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}_0}}(L - x)\right) H_x(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0). \quad (1.44)$$

Если же на слой среды падает волна $u_0(x, \mathbf{R})$ (в отрицательном направлении оси x), то она создает на границе $x = L$ распределение источников $f(\mathbf{R}_0)$ (1.30), и в этом случае волновое поле $U(x, \mathbf{R})$ (1.31) будет описываться интегральным уравнением

$$U(x, \mathbf{R}) = u_0(x, \mathbf{R}) - k_0^2 \int_x^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g(x, \mathbf{R}; x_1, \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) U(x_1, \mathbf{R}_1). \quad (1.45)$$

Существенное отличие уравнения (1.45) при заданной функции $g(x, \mathbf{R}; x_1, \mathbf{R}_1)$ от уравнения (1.34) состоит в том, что волновое поле $U(x, \mathbf{R})$ в точке (x, \mathbf{R}) определяется полем $\varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1)$ в области $x \leq x_1 \leq L$, т.е. оно является квазипричинным. Функциональная же зависимость поля $U(x, \mathbf{R})$ от $\varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1)$ при $L_0 \leq x_1 \leq x$ осуществляется неявным образом через функцию $g(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0)$.

Для функции $H_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0)$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial L} H_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0) = \frac{\partial}{\partial L} G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L} + \frac{\partial}{\partial x} G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L}. \quad (1.46)$$

Первое слагаемое в правой части (1.46) определяется из (1.43) при $x = L$, а второе слагаемое из краевого условия в (1.27). В результате получаем замкнутое интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial L} - i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} - i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}_0}} \right] H_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0) = \\ = -\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) - k_0^2 \int d\mathbf{R}_1 H_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_1) \varepsilon(L, \mathbf{R}_1) H_L(\mathbf{R}_1; \mathbf{R}_0) \end{aligned} \quad (1.47)$$

с начальным условием, вытекающим из (1.27):

$$H_{L_0}(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0) = g_0(0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0). \quad (1.48)$$

Таким образом, исходная краевая задача (1.27) полностью описывается уравнениями (1.43) и (1.47). Эти уравнения и являются уравнениями метода погружения для данной задачи. Существенное отличие их от (1.27) в том, что для них ставится задача с начальными условиями по параметру L .

Обратим внимание на то обстоятельство, что функция $H_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0)$, описывающая волновое поле в плоскости источника и представляющая сумму падающего и отраженного назад полей, удовлетворяет замкнутому нелинейному уравнению (1.47). Уравнение же (1.43) является линейным уравнением.

Зная решение уравнений (1.47) и (1.43), не представляет труда написать решение задачи в областях $x > L$ (отраженная волна) и $x < L_0$ (проходящая волна). При этом функция $G(L_0, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0)$ также описывается уравнением (1.43) с начальным условием

$$G(L_0, \mathbf{R}; L_0, \mathbf{R}_0) = g(0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0).$$

Обратнорассеянное поле в статистических задачах в общей постановке практически не изучено. Исключение составляют работы [36–44]. Количественные и качественные результаты эффектов обратного рассеяния, основанные на различных приближенных методах, обсуждаются в обзорных работах [24, 45, 59].

Аналогично можно рассмотреть и задачу о поле точечного источника, находящегося внутри неоднородной среды. В самом деле, пусть слой среды занимает, как и ранее, часть пространства $L_0 < x < L$. Тогда поле точечного источника (функция Грина) удовлетворяет интегральному уравнению (1.21) (координаты источника x_0, \mathbf{R}_0):

$$\begin{aligned} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0; L) = g_0(x - x_0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) - \\ - k_0^2 \int_{L_0}^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) G(x_1, \mathbf{R}_1; x_0, \mathbf{R}_0; L), \end{aligned} \quad (1.49)$$

где мы включили параметр погружения L в качестве аргумента функции G , т.е.

$$G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) \equiv G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0; L).$$

Продифференцируем уравнение (1.49) по параметру L . Получаем интегральное уравнение для функции $\frac{\partial}{\partial L} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0; L)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0; L) = -k_0^2 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - L, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(L, \mathbf{R}_1) G(L, \mathbf{R}_1; x_0, \mathbf{R}_0; L) - \\ - k_0^2 \int_{L_0}^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) \frac{\partial}{\partial L} G(x_1, \mathbf{R}_1; x_0, \mathbf{R}_0; L). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Сопоставляя теперь (1.50) с уравнением (1.49), видим, что имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0; L) = -k_0^2 \int d\mathbf{R}_1 G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_1) G(x_0, \mathbf{R}_0; L, \mathbf{R}_1) \varepsilon(L, \mathbf{R}_1), \quad (1.51)$$

которое можно рассматривать как интегро-дифференциальное уравнение для функции $G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0; L)$, если дополнить его начальным условием

$$G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0; L) \Big|_{L=\max\{x, x_0\}} = \begin{cases} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) & (x_0 \geq x), \\ G(x_0, \mathbf{R}; x, \mathbf{R}_0) & (x \geq x_0), \end{cases} \quad (1.52)$$

отражающим условие непрерывности решения по параметру L . При выводе (1.51) мы воспользовались также равенством (1.29) (теорема взаимности).

Таким образом, уравнения (1.52), (1.43) и (1.47) образуют замкнутую систему уравнений погружения для данной задачи. Предельный переход $L_0 \rightarrow -\infty$, $L \rightarrow \infty$ соответствует решению задачи для точечного источника внутри неоднородной среды, занимающей все пространство.

Уравнение (1.51) с условием (1.52) интегрируется и мы видим, что поле точечного источника, находящегося в слое среды, простым образом (через квадратуру) связано с полем в задаче о падении волны на слой (т.е. в случае, когда источник лежит на границе среды).♦

Замечание 1.4. *Переход к параболическому уравнению квазиоптики в уравнениях метода погружения*

Проследим теперь за переходом к приближению параболического уравнения. Уравнение (1.47) описывает отраженное назад поле. Эффект отражения назад является существенно нелинейным и описывается последним членом в (1.47). Если пренебречь этим членом, то решение оставшегося уравнения имеет вид

$$H_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0) = g_0(0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0),$$

что соответствует наличию в плоскости $x = L$ только падающей волны. В этом случае функция $g(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0)$ (1.44) переходит в обычную функцию Грина в свободном пространстве, т.е.

$$g(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) \equiv g_0(x - L, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0),$$

и уравнение (1.45) принимает вид причинного интегрального уравнения:

$$U(x, \mathbf{R}) = u_0(x, \mathbf{R}) - k_0^2 \int_x^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) U(x_1, \mathbf{R}_1), \quad (1.53)$$

описывающего распространение волны в приближении, допускающем рассеяние волны, вообще говоря на не малые углы (не превышающие, однако, $\pi/2$).

Уравнение (1.53) можно переписать в виде операторного уравнения. Дифференцируя его по x , используя равенство (1.25), которое можно переписать в виде

$$g_0(0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) = \frac{1}{2i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0),$$

и свойство факторизации падающего поля $u_0(x, \mathbf{R})$,

$$\frac{\partial}{\partial x} u_0(x, \mathbf{R}) = -i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} u_0(x, \mathbf{R}),$$

получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}) = -i \frac{k_0^2}{2\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \{ \varepsilon(x, \mathbf{R}) U(x, \mathbf{R}) \},$$

$$U(L, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}).$$

Малоугловому приближению (параболическому уравнению) соответствует френелевское разложение функции Грина $g_0(x, \mathbf{R})$, соответствующее условию $\Delta_{\mathbf{R}} \ll k_0^2$. ♦

Рассмотрим теперь основные свойства параболического уравнения (1.39). Уравнение (1.39), как задача с начальным условием, обладает свойством динамической причинности по параметру x . В самом деле, перепишем его в виде интегрального уравнения:

$$u(x, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}) + \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \Delta_{\mathbf{R}} u(\xi, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) u(\xi, \mathbf{R}). \quad (1.54)$$

Функция $u(x, \mathbf{R})$ является функционалом поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, т. е.

$$u(x, \mathbf{R}) = u \left[x, \mathbf{R}; \varepsilon \left(\tilde{x}, \tilde{\mathbf{R}} \right) \right].$$

Проварьируем теперь уравнение (1.54) по функции $\varepsilon(x', \mathbf{R}')$. Тогда для вариационной производной $\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')}$ получаем интегральное уравнение

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = \frac{ik}{2} \theta(x - x') \theta(x') \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') u(x', \mathbf{R}) +$$

$$+ \frac{ik}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) \frac{\delta u(\xi, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} + \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta u(\xi, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \quad (1.55)$$

Из этого уравнения видно, что имеет место равенство

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = 0, \quad \text{если } x < x' \text{ или } x' < 0, \quad (1.56)$$

что и является выражением свойства динамической причинности. Вследствие этого свойства уравнение (1.55) можно переписать в виде (при $0 < x' < x$)

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = \frac{ik}{2} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') u(x', \mathbf{R}) +$$

$$+ \frac{ik}{2} \int_{x'}^x d\xi \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) \frac{\delta u(\xi, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} + \frac{i}{2k} \int_{x'}^x d\xi \Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta u(\xi, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \quad (1.57)$$

и, следовательно, имеет место равенство

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x - 0, \mathbf{R}')} = \frac{ik}{2} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') u(x, \mathbf{R}). \quad (1.58)$$

В общем случае величина $\delta u(x, \mathbf{R}) / \delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')$ при $0 \leq x' < x$ может быть выражена через функцию Грина уравнения (1.39), связывающую $u(x, \mathbf{R})$ с $u(x', \mathbf{R}')$ при $0 \leq x' < x$:

$$u(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{R}' G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') u(x', \mathbf{R}'), \quad (1.59)$$

и, в частности,

$$u(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{R}' G(x, \mathbf{R}; 0, \mathbf{R}') u_0(\mathbf{R}'),$$

при помощи соотношения

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = \frac{ik}{2} G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') u(x', \mathbf{R}').$$

Функция Грина $G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}')$ удовлетворяет при этом интегральному уравнению

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') = g(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') +$$

$$+ \frac{ik}{2} \int_{x'}^x dx'' \int d\mathbf{R}'' g(x, \mathbf{R}; x'', \mathbf{R}'') \varepsilon(x'', \mathbf{R}'') G(x'', \mathbf{R}''; x', \mathbf{R}'), \quad (1.60)$$

где функция

$$g(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') = \exp \left(\frac{i(x - x')}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \frac{k}{2\pi i(x - x')} \exp \left(\frac{ik(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2}{2(x - x')} \right) \quad (1.61)$$

при $x > x'$ представляет собой функцию Грина для уравнения (1.39) в отсутствие неоднородностей. При $x \rightarrow x'$ формула (1.60) переходит в формулу

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') \Big|_{x \rightarrow x'} = g(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') \Big|_{x \rightarrow x'} = \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}').$$

Отметим, что функция Грина $G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}')$ описывает поле сферической волны, распространяющейся из точки (x', \mathbf{R}') .

Интегральное уравнение (1.60) можно записать в эквивалентной форме в виде функционального уравнения в вариационных производных:

$$\frac{\delta G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}')}{\delta \varepsilon(\xi, \mathbf{R}_1)} = i \frac{k}{2} G(x, \mathbf{R}; \xi, \mathbf{R}_1) G(\xi, \mathbf{R}_1; x', \mathbf{R}') \quad (1.62)$$

с функциональным «начальным» условием

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') \Big|_{\varepsilon=0} = g(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}').$$

Функция Грина $G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}')$, помимо уравнения (1.60), удовлетворяет также уравнению

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') = g(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') +$$

$$+ \frac{ik}{2} \int_{x'}^x dx'' \int d\mathbf{R}'' G(x, \mathbf{R}; x'', \mathbf{R}'') \varepsilon(x'', \mathbf{R}'') g(x'', \mathbf{R}''; x', \mathbf{R}'). \quad (1.63)$$

В этом легко можно убедиться, сравнивая итерационные ряды по $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для уравнений (1.60) и (1.63).

Выполним комплексное сопряжение в уравнении (1.63) и переставим точки (x, \mathbf{R}) и (x', \mathbf{R}') (имея в виду, что по-прежнему $x > x'$). Учитывая тождество

$$g^*(x', \mathbf{R}'; x, \mathbf{R}) = g(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}'),$$

получаем уравнение

$$G^*(x', \mathbf{R}'; x, \mathbf{R}) = g(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') + \frac{ik}{2} \int_{x'}^x dx'' \int d\mathbf{R}'' g(x, \mathbf{R}; x'', \mathbf{R}'') \varepsilon(x'', \mathbf{R}'') G^*(x', \mathbf{R}'; x'', \mathbf{R}''),$$

сравнение которого с уравнением (1.60) дает равенство

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') = G^*(x', \mathbf{R}'; x, \mathbf{R}) \quad (x > x'), \quad (1.64)$$

выражающее теорему взаимности для рассматриваемой задачи (в приближении параболического уравнения). При этом функция $G^*(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}')$ описывает сферическую волну, распространяющуюся в отрицательном направлении по оси x , источник которой находится в точке (x', \mathbf{R}') .

Уравнения (1.60), (1.63) можно записать также в виде дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right) G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') &= \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}'), \\ \left(\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}'} \right) G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') &= -\frac{ik}{2} \varepsilon(x', \mathbf{R}') G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') \end{aligned} \quad (1.65)$$

с начальным условием

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') \Big|_{x \leftarrow x'} = \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}').$$

При этом, как легко видеть, функция Грина удовлетворяет условиям ортогональности

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{R} G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') G^*(x, \mathbf{R}; x'', \mathbf{R}'') &= \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}''), \\ \int d\mathbf{R}' G(x_1, \mathbf{R}_1; x', \mathbf{R}') G^*(x_2, \mathbf{R}_2; x', \mathbf{R}') &= \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2). \end{aligned} \quad (1.66)$$

Следствием этих условий является равенство

$$\int d\mathbf{R} u_1(x, \mathbf{R}) u_2^*(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{R} u_1^0(\mathbf{R}) u_2^{0*}(\mathbf{R}), \quad (1.67)$$

где $u_1(x, \mathbf{R})$ и $u_2(x, \mathbf{R})$ — решения уравнения (1.39) с начальными условиями $u_1^0(\mathbf{R})$, $u_2^0(\mathbf{R})$. В частном случае, когда $u_1^0(\mathbf{R}) = u_2^0(\mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R})$, формула (1.67) выражает сохранение мощности:

$$\int d\mathbf{R} I(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{R} I_0(\mathbf{R}) = \text{const} \quad (I(x, \mathbf{R}) = |u(x, \mathbf{R})|^2). \quad (1.68)$$

Если ввести амплитуду и фазу волнового поля в уравнении (1.39) по формуле

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) e^{iS(x, \mathbf{R})},$$

то уравнение для интенсивности волнового поля $I(x, \mathbf{R}) = u(x, \mathbf{R})u^*(x, \mathbf{R})$ можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \{ \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) I(x, \mathbf{R}) \} = 0, \quad I(0, \mathbf{R}) = I_0(\mathbf{R}). \quad (1.69)$$

Откуда следует, что в общем случае произвольного падающего волнового пучка сохраняется мощность волны в плоскости $x = \text{const}$:

$$E_0 = \int I(x, \mathbf{R}) d\mathbf{R} = \int I_0(\mathbf{R}) d\mathbf{R}.$$

Уравнение (1.69) можно трактовать как уравнение переноса консервативной примеси в потенциальном поле скоростей. Однако только в *приближении геометрической оптики*, когда фаза волны, ее поперечный градиент $\mathbf{p}(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})$, а также матрица ее вторых производных, характеризующая *кривизну фазового фронта* $S(x, \mathbf{R}) = \text{const}$, $u_{ij}(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{k} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} S(x, \mathbf{R})$ описываются замкнутыми уравнениями [17, 56]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} S(x, \mathbf{R}) + \frac{k}{2} \mathbf{p}^2(x, \mathbf{R}) &= \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \right) \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) &= \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (1.70)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \right) u_{ij}(x, \mathbf{R}) + u_{ik}(x, \mathbf{R}) u_{kj}(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \varepsilon(x, \mathbf{R}),$$

эту примесь можно считать пассивной. В общем же случае, при учете дифракционных эффектов, она является активной.

Реализации поля интенсивности имеют кластерный характер, который проявляется в виде *каустических структур*. Так, на обороте обложки — форзаце — книги [28] приведена фотография поперечного сечения лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной атмосфере (лабораторный эксперимент). Фрагмент этой фотографии воспроизведен на рис. 1.1 (см. также [9, 51, 52], где приведены результаты как лабораторных исследований, так и численного моделирования). На рисунке видно возникновение каустической структуры волнового поля.

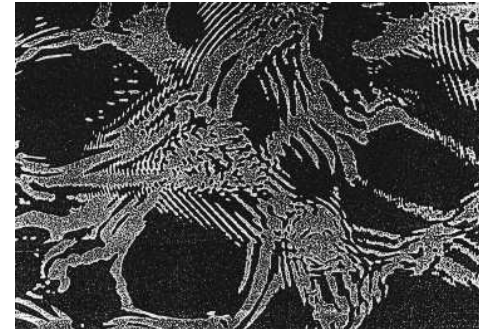


Рис. 1.1. Поперечное сечение лазерного пучка в турбулентной среде



Рис. 1.2. Каустики в бассейне

На рис. 1.2 приведена фотография бассейна также с четко выраженной каустической структурой волнового поля на его дне. Подобные структуры возникают при преломлении и отражении света взволнованной водной поверхностью, что соответствует рассеянию на так называемом *фазовом экране*. Более подробную информацию о статистическом описании этого явления см. в разделе 3.4. на с. 76.

Остановимся теперь подробнее на приближение геометрической оптики (1.70) для параболического уравнения (1.39). В этом приближении уравнение для фазы волны является *уравнением Гамильтона-Якоби*, а уравнение для поперечного градиента фазы волны (1.70) является замкнутым *квазилинейным* уравнением в частных производных первого порядка, и, следовательно, его можно решать методом характеристик (см., например, [33]). Уравнения для характеристических кривых (*лучей*) имеют вид

$$\frac{d}{dx}\mathbf{R}(x) = \mathbf{p}(x), \quad \frac{d}{dx}\mathbf{p}(x) = \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{R}}\varepsilon(x, \mathbf{R}), \quad (1.71)$$

а интенсивность волнового поля и матрица вторых производных фазы волны вдоль характеристик будут описываться уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}I(x) &= -I(x)u_{ii}(x), \\ \frac{d}{dx}u_{ij}(x) + u_{ik}(x)u_{kj}(x) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j}\varepsilon(x, \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (1.72)$$

Уравнения (1.71) соответствуют Гамильтоновой системе уравнений.

Уравнения (1.71), (1.72) существенно упрощаются в двумерном случае ($R = y$) и принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}y(x) &= p(x), \quad \frac{d}{dx}p(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\varepsilon(x, y), \\ \frac{d}{dx}I(x) &= -I(x)u(x), \quad \frac{d}{dx}u(x) + u^2(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varepsilon(x, y). \end{aligned} \quad (1.73)$$

Уравнение (1.73) для величины $u(x)$ имеет сингулярный характер. Очевидно, что в этом случае решение стохастической задачи (1.73) имеет взрывной характер, т. е. на конечном расстоянии функция $u(x)$ обратится в $-\infty$, а интенсивность — в ∞ . Это соответствует *случайной фокусировке* волнового поля в случайно-неоднородной среде, т. е. возникновению каустик, и соответствует возникновению неоднозначностей (и разрывов) в квазилинейном уравнении (1.70) для поперечного градиента фазы волнового поля.

1.2. Приближение дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды

Рассмотрим теперь статистическое описание волнового поля. Будем считать, что случайное поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ является гауссовым однородным и изотропным полем с параметрами

$$\langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \rangle = 0, \quad B_\varepsilon(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') = \langle \varepsilon(x, \mathbf{R})\varepsilon(x', \mathbf{R}') \rangle.$$

Как отмечалось выше, поле $u(x, \mathbf{R})$ функционально зависит лишь от предшествующих значений $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Однако может существовать статистическая связь между $u(x, \mathbf{R})$ и последующими значениями $\varepsilon(x_1, \mathbf{R})$ ($x_1 > x$), так как значения $\varepsilon(x', \mathbf{R}')$ при $x' < x$ коррелированы со значениями $\varepsilon(\xi, \mathbf{R})$ при $\xi > x$. Ясно, что корреляция поля $u(x, \mathbf{R})$ с последующими значениями $\varepsilon(x', \mathbf{R}')$ заметна при $x' - x \sim l_{\parallel}$, где l_{\parallel} — продольный радиус корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. В то же время характерный радиус корреляции поля $u(x, \mathbf{R})$ по продольному направлению имеет величину порядка x (см., например, [28, 30]). Поэтому в рассматриваемой задаче существует малый параметр l_{\parallel}/x , который может быть использован для построения приближенного решения.

В первом приближении можно положить $l_{\parallel}/x \rightarrow 0$. В этом случае значения полей $u(\xi_i, \mathbf{R})$ при $\xi_i < x$ будут не только функционально, но и статистически независимы от значений $\varepsilon(\eta_j, \mathbf{R})$ при $\eta_j > x$, т. е. при $\xi_i < x$; $\eta_j > x$ имеет место равенство

$$\left\langle \prod_{i,j} u(\xi_i, \mathbf{R}_i)\varepsilon(\eta_j, \mathbf{R}_j) \right\rangle = \left\langle \prod_i u(\xi_i, \mathbf{R}_i) \right\rangle \left\langle \prod_j \varepsilon(\eta_j, \mathbf{R}_j) \right\rangle. \quad (1.74)$$

Используя свойство (1.74), легко получить уравнения для статистических моментов поля $u(x, \mathbf{R})$. Покажем это на примере вывода уравнения для среднего поля $\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$. Для этого перепишем исходное стохастическое уравнение (1.39) в виде интегрального уравнения

$$u(x, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) \right\} + \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_\xi^x d\eta \varepsilon(\eta, \mathbf{R}) \right\} \Delta_{\mathbf{R}} u(\xi, \mathbf{R}). \quad (1.75)$$

При усреднении уравнения (1.75) по ансамблю реализаций случайного поля $\varepsilon(\xi, \mathbf{R})$ учтем равенство (1.74). В результате получаем замкнутое интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle &= u_0(\mathbf{R}) \left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) \right\} \right\rangle + \\ &+ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_\xi^x d\eta \varepsilon(\eta, \mathbf{R}) \right\} \right\rangle \Delta_{\mathbf{R}} \langle u(\xi, \mathbf{R}) \rangle. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Для перехода от интегрального уравнения к дифференциальному заметим, что для дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды имеет место равенство

$$\left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) \right\} \right\rangle = \left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^\xi d\eta \varepsilon(\eta, \mathbf{R}) \right\} \right\rangle \left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_\xi^x d\eta \varepsilon(\eta, \mathbf{R}) \right\} \right\rangle,$$

справедливое для любой точки $0 \leq \xi \leq x$. Поэтому, если мы введем функцию

$$\Phi(x, \mathbf{R}) = \left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\eta \varepsilon(\eta, \mathbf{R}) \right\} \right\rangle,$$

связанную с характеристическим функционалом случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, то уравнение (1.76) можно переписать в виде

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0(\mathbf{R}) \Phi(x, \mathbf{R}) + \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\Phi(x, \mathbf{R})}{\Phi(\xi, \mathbf{R})} \Delta_{\mathbf{R}} \langle u(\xi, \mathbf{R}) \rangle, \quad (1.77)$$

откуда уже легко можно получить дифференциальное уравнение для $\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle + \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle \frac{\partial}{\partial x} \ln \Phi(x, \mathbf{R}), \quad u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}),$$

Для гауссового поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ с корреляционной функцией

$$B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) = \langle \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_2, \mathbf{R}_2) \rangle, \quad \text{где } \{x = x_1 - x_2, \mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2\}$$

функция

$$\begin{aligned} \Phi(x, \mathbf{R}) &= \left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\eta \varepsilon(\eta, \mathbf{R}) \right\} \right\rangle = \exp \left\{ -\frac{k^2}{8} \int_0^x d\eta \int_0^\eta d\eta_1 B_\varepsilon(\eta - \eta_1, 0) \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\eta \int_0^\eta d\eta_1 B_\varepsilon(\eta_1, 0) \right\} \end{aligned} \quad (1.78)$$

и, следовательно, функция

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \Phi(x, \mathbf{R}) = -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\eta B_\varepsilon(\eta, 0).$$

Для гауссового дельта-коррелированного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ приближение (1.74) соответствует аппроксимации корреляционной функции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ дельта-функцией в продольном направлении, т. е. замене корреляционной функции на «эффективную»:

$$B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) = B_\varepsilon^{\text{eff}}(x, \mathbf{R}) = \delta(x) A(\mathbf{R}), \quad A(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx B_\varepsilon(x, \mathbf{R}), \quad (1.79)$$

и, следовательно, в этом случае функция

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \Phi(x, \mathbf{R}) = -\frac{k^2}{8} A(0).$$

В результате приходим к замкнутому уравнению для среднего поля

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle - \frac{k^2}{8} A(0) \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle, \quad \langle u(0, \mathbf{R}) \rangle = u_0(\mathbf{R}). \quad (1.80)$$

Аналогичным образом можно получить и замкнутые уравнения для моментных функций волнового поля:

$$M_{mn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) = \left\langle \prod_{p=1}^m \prod_{q=1}^n u(x, \mathbf{R}_p) u^*(x, \mathbf{R}'_q) \right\rangle, \quad (1.81)$$

которые для $m = n$ обычно называются *функциями когерентности* порядка $2n$.

Дифференцируя функцию (1.81) по x и используя уравнение (1.39), а также комплексносопряженное к нему, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} M_{mn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) &= \\ &= \frac{i}{2k} \left(\sum_{p=1}^m \Delta_{\mathbf{R}_p} - \sum_{q=1}^n \Delta_{\mathbf{R}'_q} \right) M_{mn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) + \\ &+ i \frac{k}{2} \left\langle \left(\sum_{p=1}^m \varepsilon(x, \mathbf{R}_p) - \sum_{q=1}^n \varepsilon(x, \mathbf{R}'_q) \right) \left[\prod_{p=1}^m \prod_{q=1}^n u(x, \mathbf{R}_p) u^*(x, \mathbf{R}'_q) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Записывая уравнение (1.82) в виде интегрального уравнения, типа уравнения (1.75), выполняя усреднение по ансамблю реализаций случайного дельта-коррелированного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, получаем для гауссова дельта-коррелированного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ замкнутое уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} M_{mn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) &= \\ &= \frac{i}{2k} \left(\sum_{p=1}^m \Delta_{\mathbf{R}_p} - \sum_{q=1}^n \Delta_{\mathbf{R}'_q} \right) M_{mn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) - \\ &- \frac{k^2}{8} Q(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) M_{mn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n), \end{aligned} \quad (1.83)$$

где

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) &= \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}'_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A(\mathbf{R}'_i - \mathbf{R}'_j). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Уравнение (1.83), (1.84) можно, разумеется, получить и непосредственно усредняя уравнение (1.82). Для расщепления корреляции в правой части (1.82) воспользуемся формулой Фурутцу–Новикова (Б.19) на с. 99, которая в данной задаче имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}_p) \rangle &= \int_0^x dx' \int d\mathbf{R}' B_\varepsilon(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') \left\langle \frac{\delta u(x, \mathbf{R}_p)}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle, \\ \langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) u^*(x, \mathbf{R}'_q) \rangle &= \int_0^x dx' \int d\mathbf{R}' B_\varepsilon(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') \left\langle \frac{\delta u^*(x, \mathbf{R}'_q)}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.85)$$

При использовании приближения дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды, описываемых эффективной корреляционной функцией (1.79), эти равенства упрощаются и принимают вид

$$\langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}_p) \rangle = \frac{1}{2} \int dR' A(R - R') \left\langle \frac{\delta u(x, \mathbf{R}_p)}{\delta \varepsilon(x - 0, \mathbf{R}')} \right\rangle, \quad (1.86)$$

$$\langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) u^*(x, \mathbf{R}'_q) \rangle = \frac{1}{2} \int dR' A(R - R') \left\langle \frac{\delta u^*(x, \mathbf{R}'_q)}{\delta \varepsilon(x - 0, \mathbf{R}')} \right\rangle.$$

Учитывая теперь равенство (1.58) и комплексно сопряженному к нему, мы и приходим к замкнутому уравнению для моментной функции волнового поля (1.83), (1.84).

Также можно получить и уравнение для характеристического функционала случайного поля $u(x, \mathbf{R})$, которое будет линейным уравнением в вариационных производных (см., например, [14, 17, 32]).

Выпишем уравнения функции когерентности второго порядка

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') = \langle \gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') \rangle, \quad \gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') = u(x, \mathbf{R}) u^*(x, \mathbf{R}'),$$

и функции когерентности четвертого порядка

$$\Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) = \langle u(x, \mathbf{R}_1) u(x, \mathbf{R}_2) u^*(x, \mathbf{R}'_1) u^*(x, \mathbf{R}'_2) \rangle,$$

вытекающие из (1.83) и (1.84) при $m = n = 1$ и $m = n = 2$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{i}{2k} (\Delta_{\mathbf{R}} - \Delta_{\mathbf{R}'}) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') - \frac{k^2}{4} D(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}'),$$

$$\Gamma_2(0, \mathbf{R}, \mathbf{R}') = u_0(\mathbf{R}) u_0^*(\mathbf{R}'), \quad (1.87)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) &= \frac{i}{2k} (\Delta_{\mathbf{R}_1} + \Delta_{\mathbf{R}_2} - \Delta_{\mathbf{R}'_1} - \Delta_{\mathbf{R}'_2}) \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) - \\ &- \frac{k^2}{8} Q(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2), \end{aligned}$$

$$\Gamma_4(0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) = u_0(\mathbf{R}_1) u_0(\mathbf{R}_2) u_0^*(\mathbf{R}'_1) u_0^*(\mathbf{R}'_2), \quad (1.88)$$

где введены новые функции

$$D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R}),$$

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) &= D(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}'_1) + D(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}'_2) + D(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}'_2) + \\ &+ D(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}'_1) - D(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) - D(\mathbf{R}'_2 - \mathbf{R}'_1), \end{aligned}$$

связанные со структурной функцией случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

Уравнение (1.87) для новых переменных

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{R}' \rightarrow \mathbf{R}' - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}$$

можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \right) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = -\frac{k^2}{4} D(\boldsymbol{\rho}) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}), \quad (1.89)$$

$$\Gamma_2(0, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = u_0 \left(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right) u_0^* \left(\mathbf{R}' - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right).$$

Замечание 1.5. Малоугловое приближение для теории переноса излучения

Отметим, что уравнение (1.89) соответствует так называемому малоугловому приближению для феноменологической теории переноса излучения. Действительно, если ввести функцию

$$J(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\boldsymbol{\rho} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}},$$

то для нее получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{k} \mathbf{q} \nabla_{\mathbf{R}} \right) J(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = -\gamma J(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) + \int d\mathbf{q}' f(\mathbf{q} - \mathbf{q}') J(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}'), \quad (1.90)$$

$$J(0, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\boldsymbol{\rho} \Gamma_2(0, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}.$$

В этом уравнении

$$\gamma = \frac{1}{4} k^2 A(0) = \int d\mathbf{q} f(\mathbf{q}) \quad (1.91)$$

— коэффициент экстинкции, $f(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \pi k^2 \Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q})$ — индикатриса рассеяния, а

$$\Phi_\varepsilon(q_1, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int d\mathbf{R} B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) e^{-iq_1 x - i\mathbf{q}\mathbf{R}} \quad (1.92)$$

— трехмерная спектральная плотность корреляционной функции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Отметим также, что введенная функция $J(x, \mathbf{R}, \mathbf{q})$ связана со средним значением функции Вигнера, определяемой равенством

$$W(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\boldsymbol{\rho} \gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}},$$

где

$$\gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = u \left(x, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right) u^* \left(x, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right). \quad \blacklozenge$$

Уравнения для среднего значения волнового поля (1.80) и (1.89) легко решаются для произвольной функции $D(\boldsymbol{\rho})$ и произвольных начальных условий. В результате для среднего волнового поля получаем выражение

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0(x, \mathbf{R}) e^{-\gamma x/2}, \quad (1.93)$$

где $u_0(x, \mathbf{R})$ — решение задачи в отсутствие флуктуаций параметров среды:

$$u_0(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{R}' g(x, \mathbf{R} - \mathbf{R}') u_0(\mathbf{R}'),$$

функция $g(x, \mathbf{R})$ — функция Грина в свободном пространстве (1.61), а величина $\gamma = \frac{k^2}{4}A(0)$ — коэффициент экстинции. Соответственно для функции когерентности второго порядка имеем

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \int d\mathbf{q} \gamma_0 \left(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho} - \mathbf{q} \frac{x}{k} \right) \exp \left\{ i\mathbf{q}\mathbf{R} - \frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{q} \frac{\xi}{k} \right) \right\}, \quad (1.94)$$

где

$$\gamma_0(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} \gamma_0(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}.$$

Дальнейший анализ задачи зависит от вида начальных условий к уравнению (1.39) и характера флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. В практических исследованиях обычно рассматриваются начальные условия трех типов:

- плоская падающая волна, соответствующая $u_0(\mathbf{R}) = u_0$;
- сферическая расходящая волна, соответствующая $u_0(\mathbf{R}) = \delta(\mathbf{R})$;
- падающий волновой пучок.

Для падающего волнового пучка распределение поля в начальном сечении имеет вид

$$u_0(\mathbf{R}) = u_0 \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{2a^2} + i \frac{k\mathbf{R}^2}{2F} \right\}, \quad (1.95)$$

где a — эффективная ширина пучка, F — расстояние до центра излучения (если $F = \infty$, то в свободном пространстве пучок коллимированный, если же $F < 0$, то в свободном пространстве пучок сфокусирован на расстоянии $x = |F|$).

Для случая плоской падающей волны, когда

$$u_0(\mathbf{R}) = u_0 = \text{const}, \quad \gamma_0(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = |u_0|^2, \quad \gamma_0(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}) = |u_0|^2 \delta(\mathbf{q}),$$

выражения (1.93) и (1.94) существенно упрощаются и принимают вид

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0 e^{-\gamma x/2}, \quad \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = |u_0|^2 e^{-k^2 x D(\boldsymbol{\rho})/4}, \quad (1.96)$$

не зависящий от эффекта дифракции плоской волны в случайно-неоднородной среде. В этом случае $D(\boldsymbol{\rho}) = D(\rho)$. При этом в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, появляется новый статистический масштаб $\rho_{\text{cог}}$, определяемый из условия

$$\frac{1}{4} k^2 x D(\rho_{\text{cог}}) = 1, \quad (1.97)$$

называемый *радиусом когерентности* поля $u(x, \mathbf{R})$. Радиус когерентности зависит от длины волны, дистанции, пройденной волной, и статистических параметров среды.

Для волнового пучка (1.95) функция

$$\gamma_0(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{|u_0|^2 a^2}{4\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left[\frac{\boldsymbol{\rho}^2}{a^2} + \left(\frac{k\boldsymbol{\rho}}{F} - \mathbf{q} \right)^2 a^2 \right] \right\},$$

и, например, для турбулентной атмосферы, для которой структурная функция $D(\mathbf{R})$ описывается *законом Колмогорова–Обухова* (см., например, [14, 17, 28, 30, 56]):

$$D(\mathbf{R}) = N C_\varepsilon^2 R^{5/3} \quad (R_{\min} \ll R \ll R_{\max}),$$

где численная постоянная $N = 1,46$, а C_ε^2 — структурная характеристика флуктуаций диэлектрической проницаемости, зависящая от внешних параметров среды, для средней интенсивности в пучке

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = \Gamma_2(x, \mathbf{R}, 0)$$

получаем выражение

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{2|u_0|^2 k^2 a^4}{x^2 g^2(x)} \int_0^\infty dt J_0 \left(\frac{2kaRt}{xg(x)} \right) \exp \left\{ -t^2 - \frac{3\pi N}{32} C_\varepsilon^2 k^2 x \left(\frac{2a}{g(x)} \right)^{5/3} t^{5/3} \right\},$$

где

$$g(x) = \sqrt{1 + k^2 a^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{F} \right)^2},$$

а $J_0(t)$ — функция Бесселя. Эта формула неоднократно проверялась экспериментально для условий турбулентной атмосферы, и было получено хорошее совпадение экспериментальных данных с этой теоретической зависимостью.

Уравнение (1.88) для функции когерентности четвертого порядка уже нельзя решить в аналитическом виде, и для ее анализа требуются либо численные, либо приближенные методы. Эта функция описывает флуктуации интенсивности и, в частности, для совпадающих поперечных координат — ее дисперсию.

Для плоской падающей волны после введения новых поперечных координат

$$\tilde{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}'_2, \quad \tilde{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{R}'_2 - \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}'_1,$$

уравнение (1.88) упрощается и принимает вид (тильду не пишем)

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{k} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}_1 \partial \mathbf{R}_2} \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) - \frac{k^2}{4} F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2), \quad (1.98)$$

где

$$F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = 2D(\mathbf{R}_1) + 2D(\mathbf{R}_2) - D(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) - D(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2).$$

Асимптотика решения для этого уравнения будет приведена в п. 3.3.2. на с. 72.

Аналогичным образом можно исследовать и задачу о распространении волновых пучков в случайно-неоднородных средах при наличии средней стратификации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, т. е. рассматривая динамическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} [\varepsilon_0(\mathbf{R}) + \varepsilon(x, \mathbf{R})] u(x, \mathbf{R}). \quad (1.99)$$

Так, для распространения пучка (1.95) в параболическом волноводе, когда

$$\varepsilon_0(\mathbf{R}) = -\alpha^2 \mathbf{R}^2,$$

для функции когерентности второго порядка легко получить выражение [14, 17, 56]

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{e^{-i\alpha \mathbf{R} \boldsymbol{\rho} \operatorname{tg}(\alpha x)}}{\cos^2(\alpha x)} \int d\mathbf{q} \gamma_0 \left(\mathbf{q}, \frac{1}{\cos(\alpha x)} \boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{q}}{\alpha k} \operatorname{tg}(\alpha x) \right) \times \\ \times \exp \left\{ i \frac{1}{\cos(\alpha x)} \mathbf{q} \mathbf{R} - \frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\frac{\cos(\alpha \xi)}{\cos(\alpha x)} \boldsymbol{\rho} - \frac{1}{\alpha k} \frac{\sin[\alpha(x-\xi)]}{\cos(\alpha x)} \mathbf{q} \right) \right\}. \quad (1.100)$$

При $\alpha = 0$ эта формула переходит, естественно, в формулу (1.94). Полагая теперь в (1.100) $\boldsymbol{\rho} = 0$, получаем выражение для средней интенсивности:

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{\cos^2(\alpha x)} \int d\mathbf{q} \gamma_0 \left(\mathbf{q}, -\frac{\mathbf{q}}{\alpha k} \operatorname{tg}(\alpha x) \right) \times \\ \times \exp \left\{ i \frac{1}{\cos(\alpha x)} \mathbf{q} \mathbf{R} - \frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\frac{1}{\alpha k} \frac{\sin(\alpha \xi)}{\cos(\alpha x)} \mathbf{q} \right) \right\}, \quad (1.101)$$

а полагая в (1.101) $\mathbf{R} = 0$, получаем изменение средней интенсивности вдоль оси волновода:

$$\langle I(x, 0) \rangle = \frac{1}{\cos^2(\alpha x)} \int d\mathbf{q} \gamma_0 \left(\mathbf{q}, -\frac{\mathbf{q}}{\alpha k} \operatorname{tg}(\alpha x) \right) \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\frac{1}{\alpha k} \frac{\sin(\alpha \xi)}{\cos(\alpha x)} \mathbf{q} \right) \right\}. \quad (1.102)$$

Замечание 1.6. Локализация волн в стохастическом параболическом волноводе

Рассмотрим теперь распространение волнового пучка

$$u_0(\mathbf{R}) = u_0 \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{2a^2} \right\}, \quad (1.103)$$

где параметр a описывает ширину пучка, в случайном параболическом волноводе [14, 17, 56].

Будем предполагать, что случайное поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ имеет теперь структуру

$$\varepsilon(x, \mathbf{R}) = -[\alpha^2 - z(x)] \mathbf{R}^2, \quad (1.104)$$

где параметр α — детерминированный, а функцию $z(x)$ будем считать случайной.

В отсутствие флуктуаций параметров среды волновое поле описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} u_0(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} [\Delta_{\mathbf{R}} - \alpha^2 k^2 \mathbf{R}^2] u_0(x, \mathbf{R}). \quad (1.105)$$

Решение уравнения (1.105) можно представить в виде

$$u_0(x, \mathbf{R}) = f(x, \mathbf{R}) \tilde{u}(x, \mathbf{R}), \quad (1.106)$$

где функции

$$f(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{\cos(\alpha x)} \exp \left\{ -i \frac{\alpha k^2}{2} \mathbf{R}^2 \operatorname{tg}(\alpha x) \right\}, \\ \tilde{u}(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{q} u_0(\mathbf{q}) \exp \left\{ -i \frac{\mathbf{q}^2}{2k\alpha} \operatorname{tg}(\alpha x) + i \frac{\mathbf{q} \mathbf{R}}{\cos(\alpha x)} \right\}, \quad (1.107) \\ u_0(\mathbf{R}) = \int d\mathbf{q} u_0(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \mathbf{R}}, \quad u_0(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} u_0(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q} \mathbf{R}}.$$

Отметим, что функция $f(x, \mathbf{R})$ описывает распространение плоской волны, и волновое поле в этом в этом случае является периодической функцией с периодом $L = 2\pi/\alpha$. При этом в точках $x_n = (2n+1)\pi/2\alpha$ функция $f(x, \mathbf{R})$ обращается в бесконечность, что соответствует фокусировке плоской волны. Волновое же поле $u_0(x, \mathbf{R})$ в общем случае в бесконечность не обращается.

Для волнового пучка (1.103) волновое поле имеет структуру

$$u_0(x, \mathbf{R}) = \frac{u_0}{\cos(\alpha x) \left(1 + \frac{i}{a^2 k \alpha} \operatorname{tg}(\alpha x) \right)} \times \\ \times \exp \left\{ i \alpha k \operatorname{tg}(\alpha x) + \frac{1}{a^2 \cos^2(\alpha x) \left(1 + \frac{i}{a^2 k \alpha} \operatorname{tg}(\alpha x) \right)} \right\}, \quad (1.108)$$

а интенсивность волнового поля принимает вид

$$I_0(x, \mathbf{R}) = |u_0(x, \mathbf{R})|^2 = \frac{|u_0|^2}{g_\alpha^2(x)} \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{g_\alpha^2(x)} \right\}, \quad (1.109)$$

где

$$g_\alpha^2(x) = \cos^2(\alpha x) + \frac{1}{k^2 \alpha^2 a^4} \sin^2(\alpha x).$$

Если волновой пучок (1.103) согласован с неоднородным волноводом, т. е.

$$k\alpha a^2 = 1, \quad (1.110)$$

то волновое поле $u_0(x, \mathbf{R})$ принимает вид

$$u_0(x, \mathbf{R}) = u_0 \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{2a^2} - i\alpha x \right\},$$

и, следовательно, его амплитуда не меняется в процессе распространения, т. е. является собственной модой задачи.

При наличии флуктуаций диэлектрической проницаемости решение уравнения (1.39) с функцией $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ вида (1.104) можно представить в виде

$$u(x, \mathbf{R}) = u_0 \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{2a^2} A(x) + B(x) \right\},$$

где комплексные функции $A(x)$ и $B(x)$ описываются системой уравнений:

$$\frac{d}{dx} A(x) = -\frac{i}{ka^2} [A^2(x) - \alpha^2 k^2 a^4] - ika^2 z(x), \quad A(0) = 1, \quad (1.111)$$

$$\frac{d}{dx} B(x) = -\frac{i}{ka^2} A(x), \quad B(0) = 0.$$

Следовательно,

$$B(x) = -\frac{i}{ka^2} \int_0^x d\xi A(\xi)$$

и интенсивность волнового поля описывается выражением

$$I(x, \mathbf{R}) = \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{2a^2} [A(x) + A^*(x)] - \frac{i}{ka^2} \int_0^x d\xi [A(\xi) - A^*(\xi)] \right\}. \quad (1.112)$$

Мнимую часть функции $A(x)$ в (1.112) можно исключить, используя первое уравнение (1.111), а именно

$$-\frac{i}{ka^2} [A(x) - A^*(x)] = \frac{d}{dx} \ln [A(x) + A^*(x)].$$

В результате получаем следующее выражение для интенсивности волнового поля (считаем, для простоты, что $|u_0|^2 = 1$):

$$I(x, \mathbf{R}) = I(x, 0) \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{a^2} I(x, 0) \right\}, \quad (1.113)$$

где

$$I(x, 0) = \frac{1}{2} [A(x) + A^*(x)] \quad (1.114)$$

— интенсивность пучка в неоднородном волноводе на его оси. Следовательно, статистические характеристики интенсивности волнового поля описываются статистическими характеристиками решения единственного уравнения (1.111) — уравнения Риккати для функции $A(x)$.

Представим функцию $A(x)$ в виде

$$A(x) = k\alpha a^2 \frac{1 + \psi(x)e^{-2i\alpha x}}{1 - \psi(x)e^{-2i\alpha x}}.$$

Тогда функция $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению, вытекающему из (1.111):

$$\frac{d}{dx} \psi(x) = -\frac{i}{2\alpha k} (e^{i\alpha x} - \psi(x)e^{-i\alpha x})^2 z(x), \quad \psi(0) = \frac{1 - k\alpha a^2}{1 + k\alpha a^2}.$$

Введем теперь амплитуду и фазу для функции $\psi(x)$ по формуле

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{w(x) - 1}{w(x) + 1}} e^{i\{\phi(x) - 2\alpha x\}}, \quad w \geq 1.$$

Тогда для функций $w(x)$ и $\phi(x)$ получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} w(x) &= -\frac{1}{\alpha k} z(x) \sqrt{w^2(x) - 1} \sin(\phi(x) - 2\alpha x), \quad w(0) = \frac{1}{2\alpha k a^2} (1 + k^2 \alpha^2 a^4); \\ \frac{d}{dx} \phi(x) &= \frac{1}{\alpha k} z(x) \left(1 - \frac{w}{\sqrt{w^2(x) - 1}} \cos(\phi(x) - 2\alpha x) \right), \quad \phi(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Следовательно, выражение для интенсивности волнового поля на оси волновода (1.113) принимает вид

$$I(x, 0) = \frac{\alpha k a^2}{w(x) + \sqrt{w^2(x) - 1} \cos(\phi(x) - 2\alpha x)}. \quad (1.116)$$

Как и ранее, будем считать случайную функцию $z(x)$ гауссовой дельта-коррелированной функцией с параметрами

$$\langle z(x) \rangle = 0; \quad \langle z(x)z(x') \rangle = 2\sigma^2 l_0 \delta(x - x').$$

Кроме того, считаем, что дисперсия флуктуаций $z(x)$ достаточно мала ($\sigma^2 \ll 1$). Тогда статистические характеристики функций $w(x)$ и $\phi(x)$ медленно меняются на масштабе порядка $1/\alpha$ и для определения статистических характеристик интенсивности волны (1.116) можно использовать дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям, что соответствует статистической независимости функций $w(x)$ и $\phi(x)$ и равномерному распределению вероятностей для фазы $\phi(x)$. В результате для плотности вероятностей функции $w(x)$,

$$P(x, w) = \langle \delta(w(x) - w) \rangle,$$

получаем уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial x} P(x, w) = D \frac{\partial}{\partial w} (w^2 - 1) \frac{\partial}{\partial w} P(x, w), \quad P(0, w) = \delta(w(0) - w) \quad (1.117)$$

с коэффициентом диффузии $D = \frac{\sigma^2 l_0}{2\alpha^2 k^2}$.

В рамках указанных предположений вычислим моменты интенсивности на оси волновода $\langle I^n(x, 0) \rangle$. Усреднение проведем в два этапа. На первом этапе усредняем по быстрым осцилляциям фазы. В результате получаем выражение

$$\left\langle \left(\frac{I}{\alpha k a^2} \right)^n \right\rangle_\phi = P_{n-1}(w). \quad (1.118)$$

Здесь через $P_n(w)$ обозначен полином Лежандра порядка n . На втором этапе усредним (1.118) по распределению w (1.117). Для этого умножим уравнение (1.117) на $P_{n-1}(w)$ и проинтегрируем по всем $w \geq 1$. Интегрируя по частям и используя равенство

$$\frac{d}{dw} (w^2 - 1) \frac{d}{dw} P_{n-1}(w) = n(n-1) P_{n-1}(w),$$

получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle P_{n-1}(w) \rangle = Dn(n-1) \langle P_{n-1}(w) \rangle,$$

решение которого имеет вид

$$\langle P_n(w) \rangle = P_{n-1}(w_0) e^{Dn(n-1)x},$$

и, следовательно,

$$\left\langle \left(\frac{I}{\alpha k a^2} \right)^n \right\rangle = P_{n-1}(w_0) e^{Dn(n-1)x}. \quad (1.119)$$

Для согласованного с волноводом волнового пучка (1.110) $w_0 = 1$ и формула (1.119) переходит в

$$\langle I^n(x, 0) \rangle = e^{Dn(n-1)x}. \quad (1.120)$$

Это означает, что величина $I(x, 0)$ распределена согласно логнормальному закону. Среднее значение интенсивности на оси волновода сохраняется, а все высшие моменты экспоненциально растут с проходимой волной дистанцией. Однако при этом, кривая типичной реализации процесса $I(x, 0)$ (см. приложение В.1.1) экспоненциально спадает вглубь среды:

$$I^*(x, 0) = e^{-Dx},$$

и в конкретных реализациях излучение должно уходить с оси волновода в поперечном направлении, что соответствует свойству динамической локализации в x -направлении. Типичной реализацией интенсивности в поперечном направлении будет, согласно формуле (1.113), выражение

$$I^*(x, \mathbf{R}) = I^*(x, 0) \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{a^2} I^*(x, 0) \right\}.$$

Таким образом, в стохастическом цилиндрическом волноводе, в котором

$$\varepsilon(x, \mathbf{R}) = -\alpha \mathbf{R}^2 + z(x) \mathbf{R}^2,$$

в отличие от решения (1.102), соответствующего однородным и изотропным флуктуациям поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, заглушающим с ростом проходимой волной дистанции x , средняя интенсивность сохраняется, а ее высшие моменты экспоненциально растут с ростом дистанции x . Сравнение этих результатов с (1.102) показывает, что упомянутые цилиндрические флуктуации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ существенно больше влияют на прохождение волнового пучка, чем однородные и изотропные флуктуации. ♦

1.3. Применимость приближения дельта-коррелированности и диффузионное приближение для волнового поля

1.3.1. Метод последовательных приближений

Остановимся теперь на условиях применимости приближения дельта-коррелированных флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Может быть построена теория последовательных приближений, уточняющая функциональную зависимость статистических характеристик волны от поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Рассмотренное выше приближение дельта-коррелированных флуктуаций является первым шагом в этой теории; следующие приближения учитывают конечность продольного радиуса корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ и приводят к системе замкнутых интегро-дифференциальных уравнений для моментов волнового поля.

Указанный метод последовательных приближений строится следующим образом. Вначале выписывается бесконечная зацепляющаяся система уравнений для какой-либо моментной функции. При этом используются предположение о гауссовом распределении для $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ и формула Фурутцу–Новикова, однако предположение о дельта-коррелированности $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ не используется. В каждое из этих уравнений входит корреляционная функция $B_\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Если использовать условие дельта-коррелированности (1.79) на с. 24 в первом из этих уравнений, то мы приходим к описанному выше приближению дельта-коррелированных флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, а остальные уравнения системы оказываются ненужными. Если же в первых $(n - 1)$ уравнениях оставить точное значение $B_\varepsilon(x, \mathbf{R})$, а в n -м уравнении использовать аппроксимацию (1.79), то мы приходим к замкнутой системе из n уравнений для интересующей нас моментной функции. Проиллюстрируем этот метод на примере уравнения для среднего поля.

Усредним уравнение (1.39) на с. 14 по ансамблю реализаций поля и для нахождения корреляции используем формулу Фурутцу–Новикова (1.85) на с. 25. В результате получим уравнение для среднего поля в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right) \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = i \frac{k}{2} \int_0^x dx' \int d\mathbf{R}' B_\varepsilon(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') \left\langle \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle. \quad (1.121)$$

Уравнение (1.121) не является замкнутым, так как содержит новую неизвестную функцию $\langle \delta u(x, \mathbf{R}) / \delta \varepsilon(x', \mathbf{R}') \rangle$. Чтобы получить уравнение для нее, проварьируем уравнение (1.39) по полю $\varepsilon(x', \mathbf{R}')$ при $x' < x$ и усредним. Получаем уравнение с начальным условием

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right) \left\langle \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle &= i \frac{k}{2} \left\langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle, \\ \left\langle \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle_{x=x'+0} &= i \frac{k}{2} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \langle u(x', \mathbf{R}') \rangle. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Для вычисления величины $\left\langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle$ снова воспользуемся формулой Фурутцу–

Новикова. В результате получаем уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right) \left\langle \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle &= \\ &= i \frac{k}{2} \int_0^x dx'' \int d\mathbf{R}'' B_\varepsilon(x - x'', \mathbf{R} - \mathbf{R}'') \left\langle \frac{\delta^2 u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}') \delta \varepsilon(x'', \mathbf{R}'')} \right\rangle, \\ \left\langle \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle_{x=x'+0} &= i \frac{k}{2} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \langle u(x', \mathbf{R}') \rangle. \end{aligned} \quad (1.123)$$

Уравнение (1.123) снова оказывается незамкнутым, так как содержит вторую вариационную производную от поля $u(x, \mathbf{R})$. Теперь мы можем написать уравнение для второй вариационной производной и т. д. Таким образом, уравнения (1.121), (1.123) и т. д. образуют зацепляющуюся бесконечную систему уравнений. Начальные условия к появляющимся новым уравнениям содержат функции, входящие в уравнения предыдущего шага. Замкнутое уравнение в приближении дельта-коррелированных флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, как указывалось выше, получается при замене в уравнениях (1.121) корреляционной функции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ на эффективную, так как в этом случае вариационная производная при совпадающих значениях $x = x'$ выражается через $\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$.

Замену корреляционной функции на эффективную можно произвести не в первом уравнении цепочки (1.127), а в одном из последующих. Если это сделать, например, в уравнении (1.123), то получим уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right) \left\langle \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle &= -i \frac{k^2}{4} A(0) \left\langle \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle, \\ \left\langle \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle_{x=x'+0} &= i \frac{k}{2} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \langle u(x', \mathbf{R}') \rangle. \end{aligned} \quad (1.124)$$

Уравнения (1.121) и (1.123) образуют замкнутую систему уравнений второго приближения.

Аналогичным образом можно получить замкнутую систему уравнений следующих приближений, а также и системы уравнений для других моментных функций поля $u(x, \mathbf{R})$.

Решение уравнения (1.124) имеет вид

$$\left\langle \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle = i \frac{k}{2} \exp \left(-\frac{k^2}{8} A(0)(x - x') \right) g(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') \langle u(x', \mathbf{R}') \rangle, \quad (1.125)$$

где $g(x, \mathbf{R})$ — функция Грина свободного пространства (1.61) на с. 19. Подставляя (1.125) в уравнение (1.121), получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right) \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle &= -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx' \int d\mathbf{R}' \exp \left(-\frac{k^2}{8} A(0)(x - x') \right) \times \\ &\times B_\varepsilon(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') g(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') \langle u(x', \mathbf{R}') \rangle. \end{aligned} \quad (1.126)$$

Уравнение (1.126) можно решить с помощью преобразования Лапласа по x и преобразования Фурье по \mathbf{R} . Мы, однако, не будем этого делать, а выясним лишь, при каких

условиях решение уравнения (1.126) переходит в решение уравнения, соответствующего приближению дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

Функция Грина $g(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}')$ в (1.126) представляет собой «размазанную» дельта-функцию на масштабе $a = \sqrt{(x - x')/l_{\parallel}}$ по переменной $(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$. В свою очередь величина $(x - x')$ ограничивается величиной порядка продольного масштаба неоднородностей l_{\parallel} за счет множителя $B_{\varepsilon}(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}')$, откуда получаем, что $a \sim \sqrt{l_{\parallel}/k}$. Если масштаб a мал по сравнению с l_{\perp} — масштабом функции $B_{\varepsilon}(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}')$ по переменной $(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$, т. е. $l_{\parallel} \ll kl_{\perp}^2$, то функцию Грина можно заменить на δ -функцию. Итак, если $l_{\parallel} \ll kl_{\perp}^2$, то уравнение (1.126) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k}\Delta_{\mathbf{R}}\right)\langle u(x, \mathbf{R})\rangle = -\frac{k^2}{4}\int_0^x dx' \exp\left(-\frac{k^2}{8}A(0)x'\right)B_{\varepsilon}(x', 0)\langle u(x - x', \mathbf{R})\rangle. \quad (1.127)$$

Если, кроме того, выполняется условие

$$\frac{k^2}{8}A(0)l_{\parallel} \ll 1,$$

т. е. ослабление среднего поля на масштабах порядка l_{\parallel} мало, то можно положить $\langle u(x - x', \mathbf{R})\rangle \approx \langle u(x, \mathbf{R})\rangle$. В результате уравнение принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k}\Delta_{\mathbf{R}}\right)\langle u(x, \mathbf{R})\rangle = -\frac{k^2}{4}\int_0^x dx' B_{\varepsilon}(x', 0)\langle u(x, \mathbf{R})\rangle.$$

Если, наконец, $x \gg l_{\parallel}$, то верхний предел интегрирования можно устремить к бесконечности, и мы приходим к уравнению (1.80).

Таким образом, приближение дельта-коррелированных флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для среднего поля $\langle u(x, \mathbf{R})\rangle$ справедливо при выполнении следующих трех условий:

$$l_{\parallel} \ll kl_{\perp}^2, \quad \sigma_{\varepsilon}^2 k^2 l_{\parallel}^2 \ll 1, \quad x \gg l_{\parallel} \quad (A(0) \sim \sigma_{\varepsilon}^2 l_{\parallel}). \quad (1.128)$$

Аналогичным образом можно получить и исследовать уравнения второго приближения для функции когерентности $\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})$. Условия применимости приближения дельта-коррелированных флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для функции $\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})$ имеют вид (например, для плоской падающей волны)

$$\rho \ll x, \quad kx|\nabla A(\boldsymbol{\rho})| \ll 1. \quad (1.129)$$

Важно подчеркнуть, что условия (1.128) и (1.129) практически независимы, так как накладывают ограничения на различные параметры. В частности, может оказаться, что условия (1.129) выполняются в том случае, когда условие $\sigma_{\varepsilon}^2 k^2 l_{\parallel}^2 \ll 1$ нарушается. Отметим также, что условия (1.129) накладывают ограничения только на локальные характеристики флуктуаций $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ и поэтому могут быть записаны и для турбулентной среды, в то время как величина $\gamma = k^2 A(0)/4$ (см. выражение (1.91) на с. 27) определяется наиболее крупномасштабными флуктуациями поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

1.3.2. Диффузионное приближение для волнового поля

Рассмотрим теперь применение диффузионного приближения для описания статистических свойств решения параболического уравнения (1.39). Отметим, что это приближение для рассматриваемой задачи близко по «своему духу» к *локальному методу Чернова* [35], оно более физично, чем формальное приближение дельта-коррелированного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, учитывает конечность продольного радиуса корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ и описывает распространение волн в среде с вытянутыми вдоль направления распространения неоднородностями [4, 29].

Как и ранее, будем предполагать, что поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ — однородное гауссово случайное поле с корреляционной функцией $B_{\varepsilon}(x, \mathbf{R})$.

Рассмотрим сперва уравнение для среднего поля. Усредним уравнение (1.39) на с. 14 по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Тогда, с учетом формулы Фурутцу-Новикова (1.85) на с. 25, получаем точное уравнение (1.121).

В диффузионном приближении вариационная производная описывается детерминированным уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k}\Delta_{\mathbf{R}}\right)\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = 0 \quad (1.130)$$

со стохастическим начальным условием

$$\left.\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')}\right|_{x=x'+0} = i\frac{k}{2}\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')u(x', \mathbf{R}), \quad (1.131)$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = i\frac{k}{2}\exp\left(\frac{i(x - x')}{2k}\Delta_{\mathbf{R}}\right)\left[\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')u(x', \mathbf{R})\right], \quad (1.132)$$

Отметим, что действие оператора, стоящего в правой части (1.132), на дельта-функцию, как указывалось ранее, определяет функцию Грина для уравнения (1.39) в случае отсутствия флуктуаций $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ (поле точечного источника в свободном пространстве).

В рамках диффузионного приближения и волновое поле $u(x', \mathbf{R})$ связано с полем $u(x, \mathbf{R})$ с помощью равенства

$$u(x', \mathbf{R}) = \exp\left(-\frac{i(x - x')}{2k}\Delta_{\mathbf{R}}\right)u(x, \mathbf{R}),$$

которое является следствием решения задачи (1.39) при отсутствии флуктуаций. Следовательно,

$$\left\langle\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')}\right\rangle = i\frac{k}{2}\exp\left(\frac{i(x - x')}{2k}\Delta_{\mathbf{R}}\right)\left[\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\exp\left(-\frac{i(x - x')}{2k}\Delta_{\mathbf{R}}\right)\langle u(x, \mathbf{R})\rangle\right].$$

Подставляя это выражение в правую часть (1.121), получаем замкнутое операторное уравнение

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k}\Delta_{\mathbf{R}}\right)\langle u(x, \mathbf{R})\rangle = \\ &= -\frac{k^2}{4}\int_0^x dx' \int d\mathbf{R}' B_{\varepsilon}(x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') \exp\left(\frac{ix'}{2k}\Delta_{\mathbf{R}}\right)\left[\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\exp\left(-\frac{ix'}{2k}\Delta_{\mathbf{R}}\right)\langle u(x, \mathbf{R})\rangle\right] \end{aligned} \quad (1.133)$$

с начальным условием $\langle u(0, \mathbf{R}) \rangle = u_0(\mathbf{R})$.

Введем теперь двумерную спектральную плотность неоднородностей и фурье-образ волнового поля $u(x, \mathbf{R})$ по поперечным координатам:

$$B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{q} \Phi_\varepsilon^{(2)}(x, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \quad \Phi_\varepsilon^{(2)}(x, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}},$$

$$u(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{q} \tilde{u}(x, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \quad \tilde{u}(x, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} u(x, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}.$$

Тогда для функции $\tilde{u}(x, \mathbf{q})$ вместо (1.133) получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{i\mathbf{q}^2}{2k} \right) \langle \tilde{u}(x, \mathbf{q}) \rangle = -\frac{k^2}{2} D(x, \mathbf{q}) \langle \tilde{u}(x, \mathbf{q}) \rangle, \quad \langle \tilde{u}(0, \mathbf{q}) \rangle = \tilde{u}_0(\mathbf{q}),$$

где

$$\tilde{u}_0(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} u_0(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}$$

и

$$D(x, \mathbf{q}) = \int_0^x d\xi \int d\mathbf{q}' \Phi_\varepsilon^{(2)}(\xi, \mathbf{q}') \exp \left\{ -\frac{i\xi}{2k} (\mathbf{q}'^2 - 2\mathbf{q}'\mathbf{q}) \right\}.$$

Следовательно

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{R}' u_0(\mathbf{R}') \exp \left\{ i\mathbf{q}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') - i\frac{\mathbf{q}^2 x}{2} - \frac{k^2}{2} \int_0^x dx' D(x', \mathbf{q}) \right\}. \quad (1.134)$$

При расстояниях, проходимых волной $x \gg l_{\parallel}$, где l_{\parallel} — продольный радиус корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, выражение (1.134) упрощается и принимает вид

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{R}' u_0(\mathbf{R}') \exp \left\{ i\mathbf{q}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') - i\frac{\mathbf{q}^2 x}{2} - \frac{k^2}{2} x D(\mathbf{q}) \right\}, \quad (1.135)$$

где

$$D(\mathbf{q}) = \int_0^\infty d\xi \int d\mathbf{q}' \Phi_\varepsilon^{(2)}(\xi, \mathbf{q}') \exp \left\{ -\frac{i\xi}{2k} (\mathbf{q}'^2 - 2\mathbf{q}'\mathbf{q}) \right\}. \quad (1.136)$$

Если теперь ввести трехмерную спектральную функцию поля $\varepsilon(x, \mathbf{R}) - \Phi_\varepsilon(q_1, \mathbf{q})$ (1.92), то выражение для коэффициента $D(\mathbf{q})$ упрощается и принимает вид

$$D(\mathbf{q}) = \pi \int d\mathbf{q}' \Phi_\varepsilon \left(\frac{1}{2k} (\mathbf{q}'^2 - 2\mathbf{q}'\mathbf{q}), \mathbf{q}' \right). \quad (1.137)$$

Отметим, что дельта-коррелированному приближению соответствует коэффициент $D(\mathbf{q})$ вида

$$D(\mathbf{q}) = \pi \int d\mathbf{q}' \Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q}').$$

Для плоской падающей волны $u_0(\mathbf{R}) = 1$, и, следовательно, из равенства (1.135) получаем не зависящее от \mathbf{R} выражение

$$\begin{aligned} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle &= \exp \left(-\frac{1}{2} k^2 x D(0) \right), \\ D(0) &= \pi \int d\mathbf{q}' \Phi_\varepsilon \left(\frac{\mathbf{q}'^2}{2k}, \mathbf{q}' \right), \end{aligned} \quad (1.138)$$

условием применимости которого, очевидно, будет

$$\frac{k^2}{2} D(0) l_{\parallel} \ll 1.$$

Аналогичным образом можно вывести и уравнения для моментных функций поля $u(x, \mathbf{R})$ более высокого порядка. Рассмотрим динамическое уравнение для функции

$$\gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = u \left(x, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right) u^* \left(x, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right),$$

вытекающее из исходного параболического уравнения (1.39):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \right) \gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) &= i\frac{k}{2} \left[\varepsilon \left(x, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right) - \varepsilon \left(x, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right) \right] \gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}), \\ \gamma_2(0, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) &= u_0 \left(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right) u_0^* \left(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right). \end{aligned} \quad (1.139)$$

Усредняя уравнение (1.139) по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ и используя формулу Фурутцу–Новикова (1.85) на с. 25 для расщепления корреляции, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \right) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) &= \\ &= i\frac{k}{2} \int_0^x dx_1 \int d\mathbf{R}_1 \left[B_\varepsilon \left(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right) - B_\varepsilon \left(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right) \right] \times \\ &\quad \times \left\langle \frac{\delta}{\delta \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1)} \gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.140)$$

Для среднего значения вариационной производной, стоящей в правой части (1.140), в диффузионном приближении имеем выражение

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta}{\delta \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1)} \gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) \right\rangle &= \\ &= i\frac{k}{2} \exp \left(\frac{i}{k} (x - x_1) \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \right) \left\{ \left[\delta \left(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right) - \delta \left(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left(-\frac{i}{k} (x - x_1) \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \right) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) \right\}, \end{aligned} \quad (1.141)$$

подставляя которое в (1.140), получаем замкнутое операторное уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \right) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) &= \\ &= -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx_1 \int d\mathbf{R}_1 \left[B_\varepsilon \left(x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right) - B_\varepsilon \left(x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right) \right] \times \\ &\quad \times \exp \left(\frac{i}{k} x_1 \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \right) \left[\delta \left(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right) - \delta \left(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right) \right] \times \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{i}{k} x_1 \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \right) \Gamma_2(x - x_1, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}). \end{aligned} \quad (1.142)$$

Далее будем действовать как и при выводе уравнения для среднего поля. Выразим корреляционную функцию поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ через ее спектральную плотность по поперечным координатам. В результате получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\rho} \right) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = \\ & = \frac{k^2}{4} \int_0^x dx_1 \int d\mathbf{R}_1 \int d\mathbf{q} \Phi_{\varepsilon}^{(2)}(x_1, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}(\mathbf{R}-\mathbf{R}_1)} \left[\exp\left(\frac{i}{2}\mathbf{q}\rho\right) - \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{q}\rho\right) \right] \times \\ & \quad \times \exp\left(\frac{i}{k}x_1 \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\rho}\right) \left[\delta\left(\mathbf{R}-\mathbf{R}_1 + \frac{1}{2}\rho\right) - \delta\left(\mathbf{R}-\mathbf{R}_1 - \frac{1}{2}\rho\right) \right] \times \\ & \quad \times \exp\left(-\frac{i}{k}x_1 \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\rho}\right) \Gamma_2(x-x_1, \mathbf{R}, \rho). \quad (1.143) \end{aligned}$$

Далее, введем фурье-образ функции когерентности по переменной \mathbf{R} :

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = \int d\mathbf{q} \tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}, \rho) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \quad \tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}, \rho) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}.$$

Тогда для функции $\tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}, \rho)$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{k} \mathbf{q} \nabla_{\rho} \right) \tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}, \rho) = -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx_1 \int d\mathbf{q}_1 \Phi_{\varepsilon}^{(2)}(x_1, \mathbf{q}_1) \times \\ & \quad \times \left\{ \cos\left[\frac{x_1}{2k} \mathbf{q}_1 (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q})\right] - \cos\left[\mathbf{q}_1 \rho - \frac{x_1}{2k} \mathbf{q}_1 (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q})\right] \right\} \tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}_1, \rho) \quad (1.144) \end{aligned}$$

с начальным условием

$$\tilde{\Gamma}_2(0, \mathbf{q}, \rho) = \tilde{\gamma}_2(0, \mathbf{q}, \rho),$$

которое, в отличие от уравнения для среднего поля, является уже интегро-дифференциальным уравнением.

Для дельта-коррелированного приближения уравнение (1.144) переходит в дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{k} \mathbf{q} \nabla_{\rho} \right) \tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}, \rho) = -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx_1 \int d\mathbf{q}_1 \Phi_{\varepsilon}^{(2)}(x_1, \mathbf{q}_1) \{1 - \cos[\mathbf{q}_1 \rho]\} \tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}_1, \rho),$$

эквивалентное уравнению (1.89) на с. 27.

Отметим, что как приближение дельта-коррелированного по x поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, так и диффузионное приближение не применимы в случае $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = \varepsilon(\mathbf{R})$ или слоистых сред $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = \varepsilon(z)$. В этих случаях поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ имеет формально бесконечный радиус корреляции по x -оси.

1.4. Амплитудно-фазовые флуктуации волнового поля (метод плавных возмущений)

Рассмотрим теперь статистическое описание амплитудно-фазовых флуктуаций волны.

Введем амплитуду и фазу волнового поля, а также комплексную фазу волны по формуле

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) e^{iS(x, \mathbf{R})} = e^{\phi(x, \mathbf{R})},$$

где

$$\phi(x, \mathbf{R}) = \chi(x, \mathbf{R}) + iS(x, \mathbf{R}),$$

$\chi(x, \mathbf{R}) = \ln A(x, \mathbf{R})$ — уровень амплитуды волны, а $S(x, \mathbf{R})$ — флуктуации фазы волны относительно фазы падающей волны kx . Исходя из параболического уравнения (1.39) на с. 14, можно получить для комплексной фазы нелинейное уравнение так называемого *метода плавных возмущений* Рытова (МПВ):

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \phi(x, \mathbf{R}) + \frac{i}{2k} [\nabla_{\mathbf{R}} \phi(x, \mathbf{R})]^2 + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (1.145)$$

Для случая плоской падающей волны, который и будет рассматриваться в дальнейшем, без ограничения общности можно считать, что $u_0(\mathbf{R}) = 1$ и, следовательно, $\phi(0, \mathbf{R}) = 0$.

Разделяя в уравнении (1.145) действительную и мнимую части, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} [\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})] [\nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})] = 0, \quad (1.146)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} S(x, \mathbf{R}) - \frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R}) - \frac{1}{2k} [\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})]^2 + \frac{1}{2k} [\nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})]^2 = \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (1.147)$$

С помощью уравнения (1.146) можно получить уравнение для интенсивности волны $I(x, \mathbf{R}) = e^{2\chi(x, \mathbf{R})}$ в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} [I(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})] = 0. \quad (1.148)$$

Если функция $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ достаточно мала, то для решения уравнений (1.146) и (1.147) можно построить итерационные ряды по полю $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. При этом так называемому первому приближению МПВ Рытова соответствуют гауссовы поля $\chi(x, \mathbf{R})$, $S(x, \mathbf{R})$, статистические характеристики которых определяются из статистического усреднения соответствующих итерационных рядов. Так, вторые моменты (в том числе и дисперсии) этих полей определяются из линеаризованной системы уравнений (1.146) и (1.147), т. е. системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi_0(x, \mathbf{R}) = -\frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} S_0(x, \mathbf{R}), \quad (1.149)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} S_0(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \chi_0(x, \mathbf{R}) + \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}),$$

а средние значения определяются из непосредственного усреднения уравнений (1.146) и (1.147). Такое амплитудно-фазовое описание волнового поля в случайно-неоднородной среде впервые было использовано более 50 лет назад в работе А. М. Обухова [26]

(см., также, [27], в которой он впервые учел дифракционные эффекты при распространении волн в случайных средах в рамках теории возмущений. Ранее аналогичные исследования проводились в приближении геометрической оптики (акустики). Методика, предложенная в этой работе, не потеряла своей актуальности и в настоящее время. Она является основным математическим аппаратом для различных технических приложений. Однако, как было позднее обнаружено экспериментально в работах [7, 8], флуктуации волнового поля быстро нарастают с расстоянием из-за эффекта многократного рассеяния вперед. Начиная с некоторого расстояния, становятся непригодными расчеты по теории возмущений в той или иной ее форме (область сильных флуктуаций).

Линейная система уравнений (1.149) может быть решена с помощью преобразования Фурье по поперечной координате. Вводя фурье-образы всех полей, а также фурье-образ случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ по формулам

$$\begin{aligned}\chi_0(x, \mathbf{R}) &= \int d\mathbf{q} \chi_{\mathbf{q}}^0(x) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}, & \chi_{\mathbf{q}}^0(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} \chi_0(x, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \\ S_0(x, \mathbf{R}) &= \int d\mathbf{q} S_{\mathbf{q}}^0(x) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}, & S_{\mathbf{q}}^0(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} S_0(x, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \\ \varepsilon(x, \mathbf{R}) &= \int d\mathbf{q} \varepsilon_{\mathbf{q}}(x) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}, & \varepsilon_{\mathbf{q}}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} \varepsilon(x, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}},\end{aligned}\quad (1.150)$$

получаем решение системы уравнений (1.149) в виде

$$\chi_{\mathbf{q}}^0(x) = \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon_{\mathbf{q}}(\xi) \sin \frac{q^2}{2k}(x - \xi), \quad S_{\mathbf{q}}^0(x) = \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon_{\mathbf{q}}(\xi) \cos \frac{q^2}{2k}(x - \xi). \quad (1.151)$$

При вычислении конкретных интегралов, связанных со случайным полем $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, корреляционная и спектральная функции которого описываются формулами (1.79) на с. 24 и (1.92) на с. 27, легко получить и корреляционную функцию случайного гауссова поля $\varepsilon_{\mathbf{q}}(x)$.

В самом деле, для дельта-коррелированного приближения случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ связь между корреляционной и спектральной функциями имеет вид

$$B_{\varepsilon}(x_1 - x_2, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) = 2\pi\delta(x_1 - x_2) \int d\mathbf{q} \Phi_{\varepsilon}(0, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}. \quad (1.152)$$

Умножая теперь равенство (1.152) на $(2\pi)^{-4} \exp(-i(\mathbf{q}_1 \mathbf{R}_1 + \mathbf{q}_2 \mathbf{R}_2))$ и интегрируя по \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 , с учетом определения (1.150) и получаем искомое равенство

$$\langle \varepsilon_{\mathbf{q}_1}(x_1) \varepsilon_{\mathbf{q}_2}(x_2) \rangle = 2\pi\delta(x_1 - x_2) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \Phi_{\varepsilon}(0, \mathbf{q}_1). \quad (1.153)$$

Отметим, что если поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ отлично от нуля только в конечном слое $(0, \Delta x)$, а при $x > \Delta x$ поле $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = 0$, то вместо формулы (1.153) получаем выражение

$$\langle \varepsilon_{\mathbf{q}_1}(x_1) \varepsilon_{\mathbf{q}_2}(x_2) \rangle = 2\pi\delta(x_1 - x_2) \theta(\Delta x - x) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \Phi_{\varepsilon}(0, \mathbf{q}_1). \quad (1.154)$$

Если рассмотреть флуктуации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, вызываемые турбулентными пульсациями температуры в атмосфере Земли, то в значительном интервале волновых чисел трехмерная спектральная плотность имеет вид

$$\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{q}) = AC_{\varepsilon}^2 q^{-11/3} \quad (q_{\min} \ll q \ll q_{\max}), \quad (1.155)$$

где $A = 0,033$ — численная постоянная, C_{ε}^2 — структурная характеристика флуктуаций диэлектрической проницаемости, зависящая от внешних параметров среды. В ряде случаев интегралы, описывающие статистические характеристики амплитудно-фазовых флуктуаций волнового поля и содержащие спектральную функцию вида (1.155), расходятся. В этом случае используется феноменологическая спектральная функция вида

$$\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{q}) = \Phi_{\varepsilon}(q) = AC_{\varepsilon}^2 q^{-11/3} \exp\left(-q^2/\kappa_m^2\right), \quad (1.156)$$

где κ_m — волновое число, соответствующее *микромасштабу турбулентности*.

Статистические свойства амплитудных флуктуаций в рассматриваемом приближении для среды, занимающей конечную часть пространства Δx , описываются дисперсией уровня амплитуды, т. е. параметром

$$\sigma_0^2(x) = \langle \chi_0^2(x, \mathbf{R}) \rangle,$$

для которого, согласно формулам (1.151) и (1.153), имеем

$$\begin{aligned}\sigma_0^2(x) &= \int \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \langle \chi_{\mathbf{q}_1}^0(x) \chi_{\mathbf{q}_2}^0(x) \rangle \exp(i(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)\mathbf{R}) = \\ &= \frac{\pi^2 k^2 \Delta x}{2} \int_0^{\infty} dq q \Phi_{\varepsilon}(q) \left\{ 1 - \frac{k}{q^2 \Delta x} \left[\sin \frac{q^2 x}{k} - \sin \frac{q^2(x - \Delta x)}{k} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (1.157)$$

Чтобы найти среднее значение уровня амплитуды, воспользуемся уравнением (1.148). Для плоской падающей волны, усредняя это уравнение по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, получаем равенство

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = 1,$$

которое можно переписать в виде

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = \langle \exp(2\chi_0(x, \mathbf{R})) \rangle = \exp\left(2\langle \chi_0(x, \mathbf{R}) \rangle + 2\sigma_0^2(x)\right) = 1.$$

Следовательно, в первом приближении МПВ

$$\langle \chi_0(x, \mathbf{R}) \rangle = -\sigma_0^2(x).$$

Условиями применимости первого приближения МПВ является, очевидно, условие

$$\sigma_0^2(x) \ll 1.$$

Что касается дисперсии интенсивности волны, которая называется *индексом мерцания*, то для нее в первом приближения МПВ имеем

$$\beta_0^2(x) = \langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle - 1 = \langle e^{4\chi_0(x, \mathbf{R})} \rangle - 1 \approx 4\sigma_0^2(x). \quad (1.158)$$

Следовательно, одноточечное распределение вероятностей поля $\chi(x, \mathbf{R})$ в этом приближении имеет вид

$$P(x, \chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_0(x)}} \exp\left\{-\frac{2}{\beta_0(x)} \left(\chi + \frac{1}{4}\beta_0(x)\right)^2\right\}.$$

Таким образом, интенсивность волнового поля является логарифмически-нормальным случайным полем, и его одноточечная плотность вероятностей определяется выражением

$$P(x, I) = \frac{1}{I\sqrt{2\pi\beta_0(x)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\beta_0(x)} \ln^2(Ie^{\beta_0(x)/2})\right\}. \quad (1.159)$$

При статистическом анализе обычно рассматриваются два предельных асимптотических случая.

Первый случай соответствует предположению $\Delta x \ll x$ и называется *случайным фазовым экраном*. В этом случае волна после прохождения тонкого слоя флуктуирующей среды распространяется далее в пустом пространстве. В тонком слое среды имеются только фазовые флуктуации волнового поля, которые в дальнейшем при распространении в свободном пространстве трансформируются в амплитудные флуктуации в силу нелинейности уравнений (1.146), (1.147).

Второй случай соответствует *непрерывной среде*, т. е. условию $\Delta x = x$.

Рассмотрим эти случаи подробнее для слабых флуктуаций волнового поля.

1.4.1. Случайный фазовый экран ($\Delta x \ll x$)

В этом случае дисперсия уровня амплитуды описывается выражением, вытекающим из (1.157):

$$\sigma_0^2(x) = \frac{\pi^2 k^2 \Delta x}{2} \int_0^\infty dq q \Phi_\varepsilon(q) \left\{1 - \cos \frac{q^2 x}{k}\right\}. \quad (1.160)$$

Если флуктуации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ вызваны турбулентными пульсациями среды, то функция $\Phi_\varepsilon(q)$ описывается формулой (1.155) и интеграл (1.157) легко вычисляется. В результате получаем выражение

$$\sigma_0^2(x) = 0,144 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{5/6} \Delta x, \quad (1.161)$$

и, следовательно, индекс мерцания

$$\beta_0^2(x) = 0,563 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{5/6} \Delta x. \quad (1.162)$$

Что касается фазовых флуктуаций, то непосредственный физический интерес представляет величина, описывающая угол прихода волны в точку (x, \mathbf{R}) :

$$\alpha(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}).$$

Для ее дисперсии, аналогично выводу формулы (1.160), получаем формулу

$$\langle \alpha^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{\pi^2 \Delta x}{2} \int_0^\infty dq q \Phi_\varepsilon(q) \left\{1 + \cos \frac{q^2 x}{k}\right\}.$$

1.4.2. Случай непрерывной среды ($\Delta x = x$)

В этом случае дисперсия уровня амплитуды описывается формулой

$$\sigma_0^2(x) = \frac{\pi^2 k^2 x}{2} \int_0^\infty dq q \Phi_\varepsilon(q) \left\{1 - \frac{k}{q^2 x} \sin \frac{q^2 x}{k}\right\}, \quad (1.163)$$

а параметры $\sigma_0^2(x)$ и $\beta_0^2(x)$ для турбулентных пульсаций среды описываются выражениями

$$\sigma_0^2(x) = 0,077 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6}, \quad \beta_0^2(x) = 0,307 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6}. \quad (1.164)$$

Дисперсия угла прихода волны в точку (x, \mathbf{R}) в этом случае описывается формулой

$$\langle \alpha^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{\pi^2 x}{2} \int_0^\infty dq q \Phi_\varepsilon(q) \left\{1 + \frac{k}{q^2 x} \sin \frac{q^2 x}{k}\right\}. \quad (1.165)$$

Аналогичным образом можно исследовать и дисперсию градиента уровня амплитуды. При этом приходится считать, что спектральная функция $\Phi_\varepsilon(q)$ описывается формулой (1.155). При условии что так называемый *волновой параметр* (см., например, [28]) $D(x) = \kappa_m^2 x/k \gg 1$, для дисперсии градиента уровня амплитуды $\mathbf{q} = \nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})$,

$$\sigma_{\mathbf{q}}^2(x) = \langle [\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})]^2 \rangle,$$

получаем выражение для турбулентной среды, занимающей все пространство:

$$\sigma_{\mathbf{q}}^2(x) = \frac{k^2 \pi^2 x}{2} \int_0^\infty dq q^3 \Phi_\varepsilon(q) \left\{1 - \frac{k}{q^2 x} \sin \frac{q^2 x}{k}\right\} = \frac{1,476}{L_f^2(x)} D^{1/6}(x) \beta_0(x), \quad (1.166)$$

где введен естественный масштаб длины в плоскости $x = \text{const}$, не зависящий от параметров среды, — размер первой зоны Френеля $L_f(x) = \sqrt{x/k}$, определяющий размер переходной области свет-тьнь при дифракции на краю непрозрачного экрана (см., например, [28]).

Условием справедливости первого приближения МПВ для амплитудных флуктуаций в общем случае является условие

$$\sigma_0^2(x) \ll 1.$$

Область флуктуаций амплитуды, в которой выполняется это неравенство, называется *областью слабых флуктуаций*. В области, где $\sigma_0^2(x) \geq 1$ (называемой *областью сильных флуктуаций*), необходимо изучать полную нелинейную систему уравнений (1.146), (1.147).

На рис. 1.3 приведена экспериментальная зависимость дисперсии уровня амплитуды $\beta(x) = 2\sigma_\chi(x)$ от параметра $\beta_0(x) = 2\sigma_0(x)$ при распространении света в турбулентной атмосфере [10]. Решение, соответствующее первому приближению МПВ, показано на этом рисунке штриховой прямой. Область слабых флуктуаций интенсивности, как видно из рисунка, ограничивается значениями параметра $\beta_0(x) \leq 1$. Из этого рисунка также видно, что для больших значений параметра $\beta_0(x) = 2\sigma_0(x)$ величина $\beta(x) = 2\sigma_\chi(x)$ выходит на постоянное значение.

На рис. 1.4 изображено распределение вероятностей для уровня амплитуды. Из этого рисунка видно, что в области слабых и очень сильных флуктуаций распределение вероятностей близко к гауссову, отклонения от которого наблюдаются только в области $\sigma_0^2(x) \sim 1$.

Что касается флуктуаций угла прихода волны в точку наблюдения, связанных с флуктуациями величины $\alpha(x, \mathbf{R}) = k^{-1} \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})$, то они хорошо описываются первым приближением МПВ даже для больших значений параметра $\sigma_0(x)$.

Отметим, что приближение дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для уравнения (1.39) практически не накладывает ограничения на амплитудные флуктуации, и, следовательно, уравнения для моментов поля $u(x, \mathbf{R})$, полученные выше,

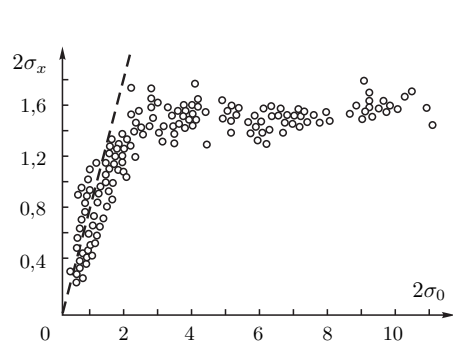


Рис. 1.3. Экспериментальные значения дисперсии уровня амплитуды в зависимости от параметра σ_0 (штриховая линия соответствует расчету по первому приближению МПВ)

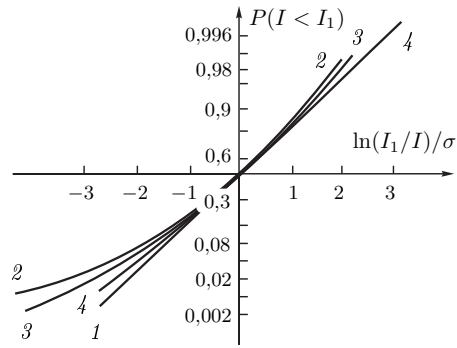


Рис. 1.4. Распределение вероятностей для интенсивности света в турбулентной среде. Линия 1 соответствует $\sigma_0^2 < 1$; 2 — $\sigma_0^2 = 1$; 3 — $\sigma_0^2 > 4$; 4 — $\sigma_0^2 \geq 25$

справедливы и в области сильных флуктуаций амплитуды. Анализ статистических характеристик интенсивности волнового поля в этом случае будет проведен в разделе 3.3. на стр. 67.

Глава 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

2.1. Диффузия лучей в случайно-неоднородной среде (лагранжево описание)

В приближении геометрической оптики характеристические кривые (лучи) описываются системой уравнений (1.71) на с. 22:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{R}(x) = \mathbf{p}(x), \quad \frac{d}{dx} \mathbf{p}(x) = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (2.1)$$

При этом интенсивность волнового поля и матрица вторых производных фазы волны вдоль этих лучей описываются уравнениями (1.72) на с. 22:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} I(x) &= -I(x) u_{ii}(x), \\ \frac{d}{dx} u_{ij}(x) + u_{ik}(x) u_{kj}(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1) и (2.2) являются исходными для описания структуры волнового поля в рамках геометрической оптики в малоугловом приближении, и при этом уравнения (2.1) совпадают по внешнему виду с уравнениями для частицы в поле случайных внешних сил в отсутствие трения и соответствуют гамильтоновой системе уравнений.

Для однородного изотропного гауссова поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, дельта-коррелированного по оси x с параметрами

$$\langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \rangle = 0, \quad B_\varepsilon(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') = A(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \delta(x - x')$$

одноточечная совместная плотность вероятностей

$$P(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \langle \delta(\mathbf{R}(x) - \mathbf{R}) \delta(\mathbf{p}(x) - \mathbf{p}) \rangle$$

описывается, очевидно, уравнением Фоккера-Планка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) P(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = D \Delta_{\mathbf{R}} P(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}), \quad (2.3)$$

где коэффициент диффузии

$$D = -\frac{1}{8} \Delta_{\mathbf{R}} A(\mathbf{R})|_{\mathbf{R}=0} = \pi^2 \int_0^\infty d\kappa \kappa^3 \Phi_\varepsilon(0, \kappa),$$

а функция

$$\Phi_\varepsilon(q, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int d\mathbf{R} B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) e^{-i(qx + \boldsymbol{\kappa}\mathbf{R})},$$

$$A(\mathbf{R}) = 2\pi \int d\boldsymbol{\kappa} \Phi_\varepsilon(0, \boldsymbol{\kappa}) e^{i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{R}},$$

— трехмерная спектральная плотность случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Отметим, что для однородной и изотропной случайной среды

$$\Phi_\varepsilon(0, \boldsymbol{\kappa}) = \Phi_\varepsilon(0, \kappa).$$

Уравнение (2.3) легко решается, и его решение, соответствующее начальному условию $P(0; \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \delta(\mathbf{R})\delta(\mathbf{p})$, является гауссовой плотностью вероятностей с параметрами

$$\langle R_j(x) R_k(x) \rangle = \frac{2}{3} D \delta_{jk} x^3, \quad \langle R_j(x) p_k(x) \rangle = D \delta_{jk} x^2, \quad (2.4)$$

$$\langle p_j(x) p_k(x) \rangle = 2D \delta_{jk} x.$$

На основе уравнений (2.1) легко получить и продольную корреляционную функцию смещений луча. Умножим (2.1) на $\mathbf{R}(x')$, где $x' < x$, и усредним по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. В результате получаем систему уравнений:

$$\frac{d}{dx} \langle \mathbf{R}(x) \mathbf{R}(x') \rangle = \langle \mathbf{p}(x) \mathbf{R}(x') \rangle, \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dx} \langle \mathbf{p}(x) \mathbf{R}(x') \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{R}(x') \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \rangle,$$

с заданными начальными условиями при $x = x'$:

$$\langle \mathbf{R}(x) \mathbf{R}(x') \rangle_{x=x'} = \langle \mathbf{R}^2(x') \rangle, \quad \langle \mathbf{p}(x) \mathbf{R}(x') \rangle_{x=x'} = \langle \mathbf{p}(x') \mathbf{R}(x') \rangle. \quad (2.6)$$

Так как для модели дельта-коррелированных по x неоднородностей величина $\mathbf{R}(x')$ не коррелирована с «последующими» значениями $\nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R})$, т. е.

$$\langle \mathbf{R}(x') \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \rangle = 0 \quad \text{при} \quad x' < x,$$

то отсюда следует, что

$$\langle \mathbf{p}(x) \mathbf{R}(x') \rangle = \langle \mathbf{p}(x') \mathbf{R}(x') \rangle = 2D(x')^2.$$

Подставляя это значение в первое из уравнений (2.5) и решая его, получаем

$$\langle \mathbf{R}(x) \mathbf{R}(x') \rangle = 2D(x')^2 \left(x - \frac{1}{3}x' \right).$$

Рассмотрим теперь задачу о совместной диффузии двух лучей, которая описывается системой уравнений:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{R}_\nu(x) = \mathbf{p}_\nu(x), \quad \frac{d}{dx} \mathbf{p}_\nu(x) = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}_\nu} \varepsilon(x, \mathbf{R}_\nu), \quad (2.7)$$

где индексом $\nu = 1, 2$ обозначены номера соответствующих лучей. Для совместной плотности вероятностей

$$P(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{p}_2) = \langle \delta(\mathbf{R}_1(x) - \mathbf{R}_1) \delta(\mathbf{p}_1(x) - \mathbf{p}_1) \delta(\mathbf{R}_2(x) - \mathbf{R}_2) \delta(\mathbf{p}_2(x) - \mathbf{p}_2) \rangle$$

получаем уравнение Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_1} + \mathbf{p}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_2} \right) P(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{p}_2) = \widehat{L} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) P(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{p}_2), \quad (2.8)$$

где оператор

$$\widehat{L} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) = \frac{\pi}{4} \int d\boldsymbol{\kappa} \Phi_\varepsilon(0, \kappa) \left[\left(\boldsymbol{\kappa} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \right)^2 + \left(\boldsymbol{\kappa} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right)^2 + 2 \cos[\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)] \left(\boldsymbol{\kappa} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \right) \left(\boldsymbol{\kappa} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) \right].$$

Для плотности вероятностей относительной диффузии двух лучей, т. е. для функции

$$P(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \langle \delta(\mathbf{R}_1(x) - \mathbf{R}_2(x) - \mathbf{R}) \delta(\mathbf{p}_1(x) - \mathbf{p}_2(x) - \mathbf{p}) \rangle,$$

получим уравнение, умножая уравнение (2.3) на

$$\delta(\mathbf{R}_1(x) - \mathbf{R}_2(x) - \mathbf{R}) \delta(\mathbf{p}_1(x) - \mathbf{p}_2(x) - \mathbf{p})$$

и интегрируя по $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{p}_1$ и \mathbf{p}_2 . В результате приходим к уравнению Фоккера–Планка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) P(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} P(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}). \quad (2.9)$$

Здесь через матрицу $D_{\alpha\beta}(\mathbf{R})$ обозначена величина

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = 2\pi \int d\boldsymbol{\kappa} [1 - \cos(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{R})] \kappa_\alpha \kappa_\beta \Phi_\varepsilon(0, \kappa).$$

Если обозначить через l_0 корреляционный радиус случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, то при условии $R \gg l_0$ имеем

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = 2D\delta_{\alpha\beta},$$

т. е. относительная диффузия двух лучей осуществляется с удвоенным коэффициентом диффузии по отношению к диффузии отдельного луча, что соответствует статистической независимости каждого луча. В этом случае совместная плотность вероятностей для относительной диффузии является гауссовой.

В общем случае уравнение (2.9) не допускает решения в аналитическом виде. Ясно лишь, что при переменном коэффициенте диффузии решение его не является гауссовым распределением.

Асимптотический случай $R \ll l_0$ допускает достаточно полный анализ. В этом случае функцию $\{1 - \cos(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{R})\}$ можно разложить в ряд Тейлора, и диффузионная матрица принимает вид

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = \pi R_i R_j \int d\boldsymbol{\kappa} \kappa_i \kappa_j \kappa_\alpha \kappa_\beta \Phi_\varepsilon(0, \kappa).$$

Ясно, что в статистически изотропном случае

$$\int d\boldsymbol{\kappa} \kappa_i \kappa_j \kappa_\alpha \kappa_\beta \Phi_\varepsilon(0, \kappa) = B (\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} + \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}).$$

Свертывая это равенство по парам индексов i, j и α, β , найдем, что

$$B = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty d\kappa \kappa^5 \Phi_\varepsilon(0, \kappa),$$

и, следовательно,

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = \pi B (\mathbf{R}^2 \delta_{\alpha\beta} + 2R_\alpha R_\beta). \quad (2.10)$$

Заметим, что величина B определяет в приближении геометрической оптики амплитудные флуктуации. Это не является неожиданным, ибо амплитудные флуктуации связаны с изменениями сечения лучевой трубки, т. е. с относительными смещениями лучей.

Коэффициенты диффузии $D_{\alpha\beta}(\mathbf{R})$ можно использовать в форме (2.10) лишь в том случае, когда средний квадрат расстояния между лучами мал по сравнению с l_0^2 . Из уравнения (2.9) с коэффициентами (2.10), т. е. из уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) P(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \pi B (\mathbf{R}^2 \delta_{\alpha\beta} + 2R_\alpha R_\beta) \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} P(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}),$$

следуют уравнения для моментных функций:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \langle \mathbf{p}^2(x) \rangle &= 8\pi B \langle \mathbf{R}^2(x) \rangle, & \frac{d}{dx} \langle \mathbf{R}^2(x) \rangle &= 2 \langle \mathbf{R}(x) \mathbf{p}(x) \rangle, \\ \frac{d}{dx} \langle \mathbf{R}(x) \mathbf{p}(x) \rangle &= \langle \mathbf{p}^2(x) \rangle, \end{aligned} \quad (2.11)$$

которые легко решить. Из решения этой системы следует, что если существует такой интервал значений x , на котором $\alpha x \gg 1$ ($\alpha = (16\pi B)^{1/3}$), но все еще $R_0^2 e^{\alpha x} \ll l_0^2$ (он всегда существует для достаточно малых значений R_0 — начальных расстояний между лучами), то в этой области происходит экспоненциальный рост величин $\langle \mathbf{R}^2(x) \rangle$, $\langle \mathbf{R}(x) \mathbf{p}(x) \rangle$ и $\langle \mathbf{p}^2(x) \rangle$. Заметим, что начало этой области экспоненциального роста, определяемое условием $\alpha x \sim 1$, совпадает с началом области сильных флуктуаций интенсивности, так как $\alpha x \sim \sigma_I^2 / 3 = \langle [\ln(I/I_0)]^2 \rangle^{1/3}$.

Остановимся теперь на условиях применимости уравнения Фоккера–Планка. Уравнение Фоккера–Планка для диффузии лучей было получено в малоугловом приближении. Отсюда, согласно (2.4), вытекает условие

$$\langle \mathbf{p}^2(x) \rangle \ll 1, \quad \text{или} \quad Dx \ll 1. \quad (2.12)$$

Что касается поправок, связанных с конечностью продольного радиуса корреляции, то, очевидно, что требование их малости приводит к условию $x \gg l_0$ и к тому же условию (2.12).

2.2. Возникновение каустик в случайно-неоднородной среде

Как мы видели выше, в рамках параболического уравнения квазиоптики, статистические характеристики, определяющие относительную диффузию лучей, экспоненциально растут с ростом дистанции, проходимой этими лучами, т. е., имеет место статистическое разбегание лучей. В то же самое время с вероятностью, равной единице, в среде на конечных расстояниях образуются каустики [57, 60, 76, 78]. И задача описания статистики возникновения каустической структуры близка к задаче о статистическом описании явления переброса. Она соответствует рассмотрению статистических характеристик кривизны фазового поля и интенсивности волны в случайно-неоднородной среде, описываемых стохастическими уравнениями (2.2).

В двумерном случае задача упрощается и кривизна фазовой поверхности в плоскости (x, y) описывается уравнением

$$\frac{d}{dx} u(x) = -u^2(x) + f(x), \quad u(0) = u_0, \quad (2.13)$$

где $f(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varepsilon(x, y(x))$, а поперечное смещение луча $y(x)$ описывается системой уравнений (2.1).

Для однородных изотропных гауссовых дельта-коррелированных флуктуаций поля $\varepsilon(x, y)$ с параметрами

$$\langle \varepsilon(x, y) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon(x, y) \varepsilon(x', y') \rangle = \delta(x - x') A(y - y')$$

одноточечная плотность вероятностей кривизны статистически не зависит от смещения луча и описывается уравнением Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial}{\partial x} P(u, x) = \frac{\partial}{\partial u} u^2 P(u, x) + \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} P(u, x), \quad P(u, 0) = \delta(u - u_0), \quad (2.14)$$

с коэффициентом диффузии

$$D = \frac{1}{4} \frac{\partial^4}{\partial y^4} A(0) = \pi \int_0^\infty \kappa^4 d\kappa \Phi_\varepsilon(0, \kappa),$$

где $\Phi_\varepsilon(0, \kappa)$ — двумерная спектральная функция случайного поля $\varepsilon(x, y)$.

Уравнения (2.13) и (2.14) рассматриваются в приложении Г.3.1. (см. с. 111). В этом приложении показывается, что случайный процесс $u(x)$ является разрывным и обращается в $-\infty$ на конечном расстоянии $x(u_0)$, которое определяется начальным условием u_0 , что означает фокусировку волны в случайно-неоднородной среде. Среднее значение $\langle x(u_0) \rangle$ в этом случае описывается выражением

$$\langle x(u_0) \rangle = \frac{2}{D} \int_{-\infty}^{u_0} d\xi \int_{\xi}^{\infty} d\eta \exp \left\{ \frac{2}{3D} (\xi^3 - \eta^3) \right\}, \quad (2.15)$$

и, следовательно,

$$D^{1/3} \langle x(\infty) \rangle \approx 6,27, \quad D^{1/3} \langle x(0) \rangle = \frac{2}{3} D^{1/3} \langle x(\infty) \rangle \approx 4,18.$$

Величина $\langle x(0) \rangle$ описывает среднее расстояние, на котором для плоской падающей волны возникает фокус, а величина $\langle x(\infty) \rangle$ описывает среднее расстояние между двумя последовательными фокусами. Учитывая, что дисперсия уровня амплитуды в первом приближении метода плавных возмущений $\sigma^2(x) \cong Dx^3$, нетрудно видеть, что случайная фокусировка осуществляется в области сильных флуктуаций интенсивности, где $\sigma^2(x) \geq 1$.

Дальнейший анализ уравнения (2.14) существенно зависит от краевых условий по переменной u . Так, если рассматривать функцию $u(x)$ разрывной и определенной для всех значений x таким образом, что ее обращение в $-\infty$ в точке $x \rightarrow x_0 - 0$ немедленно сопровождается значением ∞ в точке $x \rightarrow x_0 + 0$, то краевым условием для уравнения (2.14) является условие

$$J(x, u)|_{u \rightarrow \infty} = J(x, u)|_{u \rightarrow -\infty},$$

где плотность потока вероятностей

$$J(x, u) = u^2 P(x, u) + \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial u} P(x, u).$$

Этот случай также рассматривался в приложении Г.3.1. на с. 113, и уравнение (2.14) имеет «стационарную», не зависящую от x , предельную плотность вероятностей, соответствующую постоянству плотности потока вероятностей:

$$P(u) = J \int_{-\infty}^u d\xi \exp \left\{ \frac{2}{3D} (\xi^3 - u^3) \right\}, \quad (2.16)$$

где

$$J = \frac{1}{\langle x(\infty) \rangle}.$$

При больших значениях u из (2.14) следует асимптотическая формула

$$P(u) \approx \frac{1}{\langle x(\infty) \rangle u^2},$$

что означает формирование стационарной статистики поведением функции $u(x)$ в окрестности ее разрывов:

$$u(x) = \frac{1}{x - x_k}.$$

Интенсивность волнового поля в окрестности разрывов имеет структуру, вытекающую из (2.2):

$$I(x) = \frac{x_k}{|x - x_k|}.$$

В этом случае асимптотика плотности вероятностей величины $z(x) = I^2(x)$ для достаточно больших значений x и z описывается выражением

$$\begin{aligned} P(x, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \delta \left(\frac{x_k^2}{(x - x_k)^2} - z \right) \right\rangle = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \delta \left(\frac{(x - x_k)^2}{x_k^2} - \frac{1}{z} \right) \right\rangle = \\ &= \frac{x}{z\sqrt{z}} \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta(x - x_k) \rangle = \frac{x}{z\sqrt{z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \frac{\Phi_0(k)}{1 + \Phi(k)}, \end{aligned}$$

где $\Phi_0(k)$ — характеристическая функция расстояния, на котором впервые возникают каустики, а $\Phi(k)$ — характеристическая функция расстояния между двумя соседними каустиками. Следовательно, при $x \gg \langle x(\infty) \rangle$ распределение плотности вероятностей для величины z имеет вид

$$P(x, z) = \frac{x}{\langle x(\infty) \rangle z\sqrt{z}},$$

и асимптотическое поведение плотности вероятностей для больших значений интенсивности волны I имеет вид

$$P(x, I) = \frac{2x}{\langle x(\infty) \rangle I^2},$$

зависящий от расстояния, пройденного волной, и затухающий при больших значениях I степенным образом.

Другой тип краевых условий возникает, когда кривая $u(x)$ обрывается при достижении $-\infty$ в точке $x = x_0$. Это соответствует условиям

$$J(x, u) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad u \rightarrow \pm\infty,$$

и вероятность возникновения фокуса на расстоянии x определяется выражением

$$P(x > x_0) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} du P(x, u).$$

Следовательно, ее плотность вероятностей связана с плотностью потока вероятностей с помощью равенства [60, 76, 78]

$$p(x) = \frac{\partial}{\partial x} P(x > x_0) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} du P(x, u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} J(x, u).$$

Чтобы получить асимптотическую зависимость $p(x)$ от малого параметра ($D \rightarrow 0$), воспользуемся стандартной процедурой анализа параболического уравнения с малым параметром при старшей производной.

Представим решение уравнения (2.14) в виде

$$P(x, u) = C(D) \exp \left\{ -\frac{1}{D} A(x, u) - B(x, u) \right\}. \quad (2.17)$$

Подставляя (2.17) в уравнение (2.14) и выделяя члены порядка D_0 и D^{-1} , получаем уравнения в частных производных для функций $A(x, u)$ и $B(x, u)$. Постоянная $C(D)$ определяется из условия, что при $x \rightarrow 0$ плотность вероятностей, например, для плоской падающей волны, должна иметь вид

$$P(x, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dx}} \exp \left\{ -\frac{u^2}{2Dx} \right\}.$$

Это дает оценку $C(D) \cong 1/\sqrt{D}$. Подставляя (2.17) в выражение для плотности вероятностей образования фокуса, получаем

$$p(x) = \lim_{u \rightarrow -\infty} P(x, u) \left[u^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} A(x, u) \right]. \quad (2.18)$$

Отметим, что представление $P(x, u)$ в виде (2.17) позволяет получить немедленно структурную зависимость $p(x)$ от x из размерных соображений [57]. В самом деле, величины u , D и $P(x, u)$ имеют размерности

$$[u] = x^{-1}, \quad [D] = x^{-3}, \quad [P(x, u)] = x$$

соответственно, и, следовательно, исходя из (2.17) и (2.18) получаем зависимость

$$p(x) = C_1 D^{-1/2} x^{-5/2} \exp\left(-\frac{C_2}{Dx^3}\right),$$

и остающаяся задача состоит в вычислении постоянных C_1 и C_2 . Эти постоянные были вычислены в работе [60] и окончательная формула имеет вид

$$p(x) = 3\alpha^2 (2\pi D)^{-1/2} x^{-5/2} \exp\left(-\frac{\alpha^4}{6Dx^3}\right), \quad (2.19)$$

где параметр $\alpha = 2,85$.

Условие применимости выражения (2.19) является условие $Dx^3 \ll 1$. Однако, как было показано в упомянутой работе [60] путем численного моделирования, выражение (2.19) также достаточно хорошо описывает плотность вероятностей и при $Dx^3 \sim 1$.

Обсудим теперь трехмерную задачу. В этом случае матрица, описывающая кривизну фазового фронта:

$$u_{ij}(x) = \frac{1}{k} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} S(x, \mathbf{R}),$$

удовлетворяет стохастическому уравнению

$$\frac{d}{dx} u(x) + u^2(x) = F(x, \mathbf{R}(x)), \quad (2.20)$$

где матричная функция

$$F_{ij}(x, \mathbf{R}(x)) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \quad i, j = 1, 2.$$

Симметричная матрица $u_{ij}(x)$ может быть приведена к диагональному виду с помощью преобразования поворота:

$$D^T(x) u(x) D(x) = \Lambda(x), \quad (2.21)$$

где матрицы $\Lambda(x)$ и $D(x)$ ($D^T(x)$ — транспонированная матрица) имеют структуру

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix}, \quad D(x) = \begin{pmatrix} \cos \theta(x) & -\sin \theta(x) \\ \sin \theta(x) & \cos \theta(x) \end{pmatrix},$$

а величины $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, являющиеся функциями параметра x , описывают главные кривизны фазового фронта $S(x, \mathbf{R}) = \text{const}$.

Дифференцируя (2.21) по x и используя динамическое уравнение (2.20), получаем стохастическое матричное уравнение для $\Lambda(x)$ вида

$$\frac{d}{dx} \Lambda(x) = -\Lambda^2(x) + \frac{dD^T(x)}{dx} D(x) \Lambda(x) + \Lambda(x) D^T(x) \frac{dD(x)}{dx} + D^T(x) F(x) D(x), \quad (2.22)$$

которое эквивалентно системе трех уравнений для ее компонент:

$$\frac{d}{dx} \lambda_1(x) = -\lambda_1^2(x) + F_{11}(x) \cos^2 \theta(x) + F_{22}(x) \sin^2 \theta(x) + F_{12}(x) \sin 2\theta(x),$$

$$\frac{d}{dx} \lambda_2(x) = -\lambda_2^2(x) + F_{22}(x) \cos^2 \theta(x) + F_{11}(x) \sin^2 \theta(x) - F_{12}(x) \sin 2\theta(x),$$

$$\frac{d}{dx} \theta(x) = \frac{1}{2} \frac{F_{22}(x) - F_{11}(x)}{\lambda_1(x) - \lambda_2(x)} \sin 2\theta(x) + \frac{F_{12}(x)}{\lambda_1(x) - \lambda_2(x)} \cos 2\theta(x). \quad (2.23)$$

В результате приходим к уравнению Фоккера–Планка для совместной плотности вероятностей величин $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ вида [57]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} P(x, \lambda_1, \lambda_2) = & \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left[\lambda_1^2 - \frac{2D}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \left[\lambda_2^2 - \frac{2D}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] \right) P(x, \lambda_1, \lambda_2) + \\ & + D \left(3 \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} + 3 \frac{\partial^2}{\partial \lambda_2^2} \right) P(x, \lambda_1, \lambda_2), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$P(0; \lambda_1, \lambda_2) = \delta(\lambda_1) \delta(\lambda_2),$$

где

$$D = \frac{1}{64} \Delta_{\mathbf{R}}^2 A(\mathbf{R}) \Big|_{\mathbf{R}=0} = \frac{\pi^2}{16} \int_0^\infty d\kappa \kappa^5 \Phi_\varepsilon(0, \kappa).$$

Отметим, что этому уравнению Фоккера–Планка статистически эквивалентна стохастическая динамическая система:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \lambda_1(x) &= -\lambda_1^2 + \frac{2D}{\lambda_1 - \lambda_2} + F(x) + \tilde{F}(x), \\ \frac{d}{dx} \lambda_2(x) &= -\lambda_2^2 - \frac{2D}{\lambda_1 - \lambda_2} + F(x) - \tilde{F}(x), \end{aligned} \quad (2.25)$$

со случайными дельта-коррелированными функциями $F(x)$ и $\tilde{F}(x)$, и, следовательно, для малых значений x , а именно $Dx^3 \ll 1$, получаем совместную плотность вероятностей для $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ вида

$$P(x, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{32\sqrt{2\pi} (Dx)^3} \exp\left\{-\frac{1}{32Dx} (3\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + 3\lambda_2^2)\right\}. \quad (2.26)$$

Естественно, вероятность возникновения каустик в этой области пространства ($Dx^3 \ll 1$) ничтожно мала. Ее плотность вероятностей описывается равенством, аналогичным равенству для двумерного случая [76]:

$$p(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_2 \nabla_{\lambda} \mathbf{J}(x, \lambda), \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2), \quad (2.27)$$

где вектор плотности потока вероятностей, определенный из уравнения (2.24), имеет структуру

$$\mathbf{J}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 - \frac{2D}{\lambda_1 - \lambda_2} + 3D \frac{\partial}{\partial \lambda_1} + \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \\ \lambda_2^2 + \frac{2D}{\lambda_1 - \lambda_2} + 3D \frac{\partial}{\partial \lambda_2} + \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \end{pmatrix} P(x, \lambda_1, \lambda_2).$$

Равенство (2.27) можно переписать в виде контурного интеграла:

$$p(x) = \oint_C ds \mathbf{J}(x, \lambda) \mathbf{n}, \quad (2.28)$$

в пределе, когда диаметр контура $C \rightarrow \infty$, где вектор \mathbf{n} — вектор внешней нормали к границе контура C .

Как отмечалось выше, для того чтобы получить асимптотическое решение уравнения (2.24), необходимо построить ряд теории возмущений по параметру D , представляя решение уравнения (2.24) в виде

$$P(x, \lambda_1, \lambda_2) = D^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{1}{D} A(x, \lambda_1, \lambda_2) - B(x, \lambda_1, \lambda_2) \right\}.$$

Отметим, что функция $P(x, \lambda_1, \lambda_2)$ должна иметь стационарную точку на контуре C , в которой функция $A(x, \lambda_1, \lambda_2)$ имеет минимальное значение. Это дает дополнительный фактор $D^{1/2}$ при $Dx^3 \rightarrow 0$, и, следовательно, используя соображения размерности, можно получить для плотности вероятностей образования каустик выражение [57]

$$p(x) = \frac{\alpha}{Dx^4} \exp \left\{ -\frac{\beta}{Dx^3} \right\},$$

где α и β — численные постоянные. Этот закон с $\alpha = 2,74$ и $\beta = 0,66$ был получен в работе [76].

2.3. Амплитудно-фазовые флуктуации волнового поля (эйлерово описание)

Если справедливо приближение геометрической оптики ($k \rightarrow \infty$), рассмотрение амплитудно-фазовых флуктуаций в эйлеровом описании существенно упрощается.

Введем в рассмотрение величину, называемую обычно *эйконалом*:

$$\Theta(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{k} S(x, \mathbf{R}),$$

и перейдем к пределу $k \rightarrow \infty$. В этом случае уравнение (1.146) для величины $\chi(x, \mathbf{R})$ на с. 41 и, следовательно, для интенсивности волнового поля (1.148), не меняется, т. е. сохраняет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \nabla_{\mathbf{R}} [I(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R})] = 0, \quad (2.29)$$

а уравнение (1.147) для фазы волнового поля принимает вид уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Theta(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{2} [\nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R})]^2 = \frac{1}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (2.30)$$

При этом для поперечного градиента фазы волны мы получаем замкнутое квазилинейное уравнение

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Theta(x, \mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} \nabla_{\mathbf{R}} \right\} \nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (2.31)$$

Уравнения (2.29)–(2.31) являются исходными уравнениями для анализа амплитудно-фазовых флуктуаций в приближении геометрической оптики, и при этом уравнение для фазы волны не зависит от амплитуды. Это уравнение является уравнением в частных производных первого порядка и характеристическими уравнениями для него являются лучи, статистическое описание которых было рассмотрено ранее. Здесь же мы рассмотрим те следствия, которые можно получить из непосредственного рассмотрения уравнений в частных производных (2.29)–(2.31), т. е. эйлерового описания.

Из уравнений для интенсивности и фазы волны (2.29), (2.30) легко получить с учетом пространственной однородности всех полей в плоскости $x = \text{const}$ выражение

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle I(x, \mathbf{R}) \Theta(x, \mathbf{R}) \rangle = \langle I(x, \mathbf{R}) [\nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R})]^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) I(x, \mathbf{R}) \rangle.$$

С другой стороны, в приближении геометрической оптики имеет место соотношение

$$\frac{1}{k^2} \nabla_{\mathbf{R}_1} \nabla_{\mathbf{R}_2} \Gamma_2(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \Big|_{\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}} = \langle I(x, \mathbf{R}) [\nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R})]^2 \rangle. \quad (2.32)$$

Левая часть равенства (2.32) может быть вычислена в приближении дельта-коррелированного случайного поля. В этом случае функция когерентности $\Gamma_2(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ описывается формулой (1.96) на с. 28 для плоской падающей волны ($u_0 = 1$), а $\langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) I(x, \mathbf{R}) \rangle = 0$. Следовательно, в этом случае имеют место равенства

$$\langle I(x, \mathbf{R}) [\nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R})]^2 \rangle = -\frac{1}{4} \Delta_{\mathbf{R}} A(0)x = \gamma(x), \quad (2.33)$$

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \Theta(x, \mathbf{R}) \rangle = -\frac{1}{16} \Delta_{\mathbf{R}} A(0)x,$$

где

$$\gamma(x) = \pi^2 x \int_0^{\infty} dq q^3 \Phi_{\varepsilon}(q) = \langle [\nabla_{\mathbf{R}} \Theta_0(x, \mathbf{R})]^2 \rangle$$

— дисперсия угла прихода волны в точку наблюдения в первом приближении МПВ в приближении геометрической оптики.

В приближении геометрической оптики и приближении дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ можно получить также замкнутое уравнение для функции

$$G(x, \mathbf{R}; \Theta, \mathbf{p}) = \langle I(x, \mathbf{R}) \delta(\Theta(x, \mathbf{R}) - \Theta) \delta(\nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R}) - \mathbf{p}) \rangle,$$

описывающей корреляции интенсивности с фазой и градиентом фазы волны. Дифференцируя эту функцию по x , используя динамические уравнения (2.29)–(2.31) и разделяя корреляции с помощью формулы Фурутцу–Новикова (1.86), с. 26, после несложных преобразований получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p} \nabla_{\mathbf{R}} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^2 \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) G(x, \mathbf{R}; \Theta, \mathbf{p}) = \frac{1}{4} \left(A(0) \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} - \frac{1}{2} \Delta_{\mathbf{R}} A(0) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \right) G(x, \mathbf{R}; \Theta, \mathbf{p}). \quad (2.34)$$

Для плоской падающей волны, в силу статистической однородности всех полей в плоскости $x = \text{const}$, $\nabla_{\mathbf{R}} G(x, \mathbf{R}; \Theta, \mathbf{p}) = 0$, т. е. функция $G(x, \mathbf{R}; \Theta, \mathbf{p}) = G(x, \Theta, \mathbf{p})$ не зависит от \mathbf{R} и уравнение (2.34) упрощается:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^2 \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) G(x, \mathbf{R}; \Theta, \mathbf{p}) = \frac{1}{4} \left(A(0) \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} - \frac{1}{2} \Delta_{\mathbf{R}} A(0) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \right) G(x, \mathbf{R}; \Theta, \mathbf{p}). \quad (2.35)$$

Это уравнение обладает той особенностью, что для величин

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \Theta^m(x, \mathbf{R}) |\nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R})|^m \rangle$$

из него может быть получена замкнутая конечномерная линейная система уравнений первого порядка, решение которой не вызывает особых затруднений. Полученные выше выражения (2.33) являются частным случаем решений такой системы уравнений.

Отметим, что если проинтегрировать уравнение (2.34) по Θ , т. е. исключить фазу волны из рассмотрения, то мы приходим к уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}\nabla_{\mathbf{R}}\right) G(x, \mathbf{R}; \mathbf{p}) = -\frac{1}{8}\Delta_{\mathbf{R}}A(0)\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2}G(x, \mathbf{R}; \mathbf{p}), \quad (2.36)$$

которое совпадает с уравнением для плотности вероятностей, описывающим диффузию отдельного луча. Это естественно, так как якобиан преобразования от лагранжевых координат к эйлеровым координатам $j(x) = 1/I(x)$.

Замечание 2.1. Функция Вигнера и приближение геометрической оптики

Ранее мы ввели функцию Вигнера, определенную в виде интеграла:

$$W(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\rho u\left(x, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\rho\right) u^*\left(x, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\rho\right) e^{-i\mathbf{q}\rho},$$

среднее значение которой является преобразованием Фурье от функции когерентности второго порядка. Вводя в эту формулу амплитуду и фазу волнового поля и переходя к пределу $k \rightarrow \infty$ (в этом пределе следует разложить все функции по ρ), получаем выражение

$$\begin{aligned} W(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\rho A\left(x, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\rho\right) A\left(x, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\rho\right) \times \\ &\times \exp\left\{i\left[S\left(x, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\rho\right) - S\left(x, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\rho\right) - \mathbf{p}\mathbf{r}\mathbf{h}\mathbf{o}\right]\right\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\rho I(x, \mathbf{R}) \exp\left(i\left[\rho\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}S(x, \mathbf{R}) - \mathbf{p}\rho\right]\right) = I(x, \mathbf{R}) \delta\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}S(x, \mathbf{R}) - \mathbf{p}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, функция когерентности второго порядка в геометрическом приближении совпадает с функцией $G(x, \mathbf{R}; \mathbf{p})$, т. е. если мы теперь определим функцию $F(x, \mathbf{R}; \rho)$ как преобразование Фурье от функции $G(x, \mathbf{R}; \mathbf{p})$:

$$F(x, \mathbf{R}; \rho) = \int d\mathbf{p} G(x, \mathbf{R}; \mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\rho},$$

то для нее с помощью уравнения (2.36) получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}\partial \rho}\right) G(x, \mathbf{R}; \rho) = \frac{1}{8}\Delta_{\mathbf{R}}A(0)\rho^2 G(x, \mathbf{R}; \rho),$$

которое совпадает с уравнением для функции когерентности второго порядка (1.89), если в этом уравнении разложить функции $D(\rho)$ в ряд Тейлора по аргументу ρ [1, 56, 70]. ♦

Если же искать уравнение для плотности вероятностей

$$P(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}) = \langle \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \delta(\Theta(x, \mathbf{R}) - \Theta) \delta(\nabla_{\mathbf{R}}\Theta(x, \mathbf{R}) - \mathbf{p}) \rangle,$$

параметрически зависящей от пространственной точки (x, \mathbf{R}) , то получить его в замкнутом виде не удастся. Однако уравнение для плотности вероятностей можно замкнуть, если ее переменные дополнить симметричной матрицей, характеризующей кривизну фазового фронта:

$$u_{ij}(x, \mathbf{R}) = \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \Theta(x, \mathbf{R}),$$

компоненты которой описываются уравнениями

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x} + (\nabla_{\mathbf{R}}\Theta(x, \mathbf{R}))\nabla_{\mathbf{R}}\right\} u_{ij}(x, \mathbf{R}) + u_{il}(x, \mathbf{R})u_{lj}(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (2.37)$$

Это связано с тем, что именно флуктуации кривизны фазового фронта порождают флуктуации интенсивности волны в геометрическом приближении.

Введем теперь индикаторную функцию

$$\begin{aligned} W(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}) &= \\ &= \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \delta(\Theta(x, \mathbf{R}) - \Theta) \delta\left(\frac{\partial\Theta(x, \mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} - \mathbf{p}\right) \delta\left(\frac{\partial^2\Theta(x, \mathbf{R})}{\partial R_i \partial R_j} - u_{ij}\right), \end{aligned}$$

стохастическое уравнение Лиувилля для которой имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\mathbf{p}^2}{2}\frac{\partial}{\partial \Theta} - u_{il}\frac{\partial}{\partial I} - \frac{\partial}{\partial u_{ik}}u_{il}u_{lk} - u_{ii}\right) W(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}) &= \\ = -\frac{1}{2}\left(\varepsilon(x, \mathbf{R})\frac{\partial}{\partial \Theta} + \frac{\partial\varepsilon(x, \mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial^2\varepsilon(x, \mathbf{R})}{\partial R_i \partial R_k}\frac{\partial}{\partial u_{ik}}\right) W(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Усредним уравнение (2.38) по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Используя для расщепления корреляций формулу Фурутцу-Новикова (1.86) на с. 26, для совместной плотности вероятностей всех величин,

$$P(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}) = \langle W(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}) \rangle,$$

получаем уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\mathbf{p}^2}{2}\frac{\partial}{\partial \Theta} - u_{il}\frac{\partial}{\partial I} - \frac{\partial}{\partial u_{ik}}u_{il}u_{lk} - u_{ii}\right) P(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}) &= \\ = \frac{1}{4}\left[A(0)\frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} + \Delta_{\mathbf{R}}A(0)\left(\frac{\partial^2}{\partial \Theta \partial u_{ii}} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{8}\Delta_{\mathbf{R}}^2A(0)\left(2\frac{\partial^2}{\partial u_{kl}^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_{ii}^2}\right)\right] P(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Для плоской падающей волны, в силу пространственной однородности, величина $\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}P(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}) = 0$ и $P(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}) = P(x, I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij})$.

Интегрируя уравнение (2.39) по Θ и I , получаем более простое уравнение, описывающее плотность вероятностей для флуктуаций фазовых градиентов:

$$P(x, \mathbf{p}, u_{ij}) = \left\langle \delta\left(\frac{\partial\Theta(x, \mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} - \mathbf{p}\right) \delta\left(\frac{\partial^2\Theta(x, \mathbf{R})}{\partial R_i \partial R_j} - u_{ij}\right) \right\rangle,$$

вида

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u_{ik}}u_{il}u_{lk} - u_{ii}\right) P(x, \mathbf{p}, u_{ij}) &= \\ = -\frac{1}{8}\left[\Delta_{\mathbf{R}}A(0)\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} + \frac{1}{4}\Delta_{\mathbf{R}}^2A(0)\left(2\frac{\partial^2}{\partial u_{kl}^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_{ii}^2}\right)\right] P(x, \mathbf{p}, u_{ij}). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Аналогичным образом, интегрируя уравнение (2.39) по Θ и по \mathbf{p} , получаем уравнение для плотности вероятностей

$$P(x, I, u_{ij}) = \left\langle \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \delta\left(\frac{\partial^2 \Theta(x, \mathbf{R})}{\partial R_i \partial R_j} - u_{ij}\right) \right\rangle,$$

описывающее флуктуации интенсивности волнового поля:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - u_{ii} \frac{\partial}{\partial I} I - \frac{\partial}{\partial u_{ik}} u_{il} u_{lk} - u_{ii}\right) P(x, I, u_{ij}) = \\ = -\frac{1}{32} \Delta_{\mathbf{R}}^2 A(0) \left(2 \frac{\partial^2}{\partial u_{kl}^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_{ii}^2}\right) P(x, I, u_{ij}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Интегрируя уравнение (2.41) по I , получаем уравнение для плотности вероятностей вторых производных фазы, описывающих кривизну фазового фронта, вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u_{ik}} u_{il} u_{lk} - u_{ii}\right) P(x, u_{ij}) = -\frac{1}{32} \Delta_{\mathbf{R}}^2 A(0) \left(2 \frac{\partial^2}{\partial u_{kl}^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_{ii}^2}\right) P(x, u_{ij}). \quad (2.42)$$

Сравнивая (2.42) с (2.40), видим, что первые и вторые производные фазы волны являются статистически независимыми и плотность вероятностей для градиентов фазы удовлетворяет при этом уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} P(x, \mathbf{p}) = -\frac{1}{8} \Delta_{\mathbf{R}} A(0) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} P(x, \mathbf{p}). \quad (2.43)$$

Из уравнения (2.43) следует, что распределение (одноточечное) величины $\nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R})$ является гауссовым с дисперсией

$$\langle [\nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R})]^2 \rangle = -\frac{1}{8} \Delta_{\mathbf{R}} A(0) x,$$

что совпадает с известным результатом для малых флуктуаций амплитуды волны и, следовательно, обобщает его на случай произвольных флуктуаций амплитуды. В то же время, как видно из (2.41), существует сильная статистическая связь между флуктуациями интенсивности и кривизной фазового фронта.

Уравнения (2.39)–(2.42) существенно упрощаются в двумерном случае. Так, уравнение (2.41) принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial I} I - \frac{\partial}{\partial u} u^2 - u\right) P(x, I, u) = -\frac{3}{32} \frac{\partial^2 A(0)}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} P(x, I, u). \quad (2.44)$$

Полученные выше уравнения достаточно сложны и в настоящее время практически неизучены.

Глава 3

КОНТИНУАЛЬНАЯ ЗАПИСЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

3.1. Общие соотношения

Рассмотрим теперь статистическое описание характеристик волнового поля в среде со случайными неоднородностями, основанное на использовании функциональной записи решения задачи [11, 21, 47, 49, 50, 56, 73–75].

Для описания процесса распространения волны в неоднородной среде будем исходить из параболического уравнения (1.39) на с. 14, решение которого можно представить в операторной форме или в виде континуального интеграла, используя метод предложенный Е.С. Фрадковым в квантовой теории поля [34, 53].

Для этого рассмотрим вместо (1.39) более сложное уравнение, содержащее произвольную детерминированную векторную функцию $\mathbf{v}(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \Phi(x, \mathbf{R}) + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \Phi(x, \mathbf{R}) + \mathbf{v}(x) \nabla_{\mathbf{R}} \Phi(x, \mathbf{R}), \quad (3.1)$$

$$\Phi(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}).$$

Тогда решению параболического уравнения (1.39) соответствует равенство

$$u(x, \mathbf{R}) = \Phi(x, \mathbf{R}) \Big|_{\mathbf{v}(x)=0}. \quad (3.2)$$

Для вариационной производной $\delta \Phi(x, \mathbf{R}) / \delta \mathbf{v}(x-0)$ стандартным путем получаем выражение

$$\frac{\delta \Phi(x, \mathbf{R})}{\delta \mathbf{v}(x-0)} = \nabla_{\mathbf{R}} \Phi(x, \mathbf{R}), \quad (3.3)$$

и уравнение (3.1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \frac{\delta^2 \Phi(x, \mathbf{R})}{\delta \mathbf{v}^2(x-0)} + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \Phi(x, \mathbf{R}) + \mathbf{v}(x) \nabla_{\mathbf{R}} \Phi(x, \mathbf{R}). \quad (3.4)$$

Будем искать решение уравнения (3.3) в виде

$$\Phi(x, \mathbf{R}) = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^{x-0} d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right\} \varphi(x, \mathbf{R}). \quad (3.5)$$

Оператор, стоящий в экспоненте (3.5), перестановочен с функцией $\mathbf{v}(x)$, и, следовательно, для функции $\varphi(x, \mathbf{R})$ получаем уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, \mathbf{R}) = i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \varphi(x, \mathbf{R}) + \mathbf{v}(x) \nabla_{\mathbf{R}} \varphi(x, \mathbf{R}), \quad \varphi(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}), \quad (3.6)$$

решение которого, как функционал от $\mathbf{v}(\xi)$, выглядит следующим образом:

$$\varphi(x, \mathbf{R}) = \varphi[x, \mathbf{R}; \mathbf{v}(\xi)] = u_0 \left(\mathbf{R} + \int_0^x d\xi \mathbf{v}(\xi) \right) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_{\xi}^x d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right\}. \quad (3.7)$$

Следовательно, с учетом равенств (3.5) и (3.2) получаем операторную запись решения параболического уравнения (1.39) в виде

$$u(x, \mathbf{R}) = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right\} \times \\ \times u_0 \left(\mathbf{R} + \int_0^x d\xi \mathbf{v}(\xi) \right) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_\xi^x d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right\} \Big|_{\mathbf{v}(x)=0}. \quad (3.8)$$

В случае плоской падающей волны $u_0(\mathbf{R}) = u_0$ и формула (3.8) упрощается:

$$u(x, \mathbf{R}) = u_0 \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right\} \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_\xi^x d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right\} \Big|_{\mathbf{v}(x)=0}. \quad (3.9)$$

Рассмотрим теперь формально уравнение (3.6) как стохастическое, где функцию $\mathbf{v}(x)$ будем теперь считать «гауссовой» случайной векторной функцией со средним значением, равным нулю, и мнимой «корреляционной» функцией:

$$\langle v_i(x) v_j(x') \rangle = \frac{i}{k} \delta_{ij} \delta(x - x'). \quad (3.10)$$

Легко видеть, что все формулы, справедливые для обычных гауссовых случайных процессов, верны и в этом случае.

Усредняя уравнение (3.6) по ансамблю реализаций случайного процесса $\mathbf{v}(x)$, мы для среднего значения $\langle \varphi(x, \mathbf{R}) \rangle_{\mathbf{v}}$ получаем уравнение, совпадающее с уравнением (1.39). Таким образом, решение параболического уравнения (1.39) допускает вероятностную интерпретацию, а именно: его можно формально записать в виде средней величины:

$$u(x, \mathbf{R}) = \langle \varphi[x, \mathbf{R}; \mathbf{v}(\xi)] \rangle_{\mathbf{v}}. \quad (3.11)$$

Это равенство можно записать в виде *фейнмановского континуального интеграла*:

$$u(x, \mathbf{R}) = \int D\mathbf{v}(x) u_0 \left(\mathbf{R} + \int_0^x d\xi \mathbf{v}(\xi) \right) \times \\ \times \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \left[\mathbf{v}^2(\xi) + \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_\xi^x d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right] \right\}, \quad (3.12)$$

где интегральная мера

$$D\mathbf{v}(x) = \frac{\prod_{\xi=0}^x d\mathbf{v}(\xi)}{\int \dots \int \prod_{\xi=0}^x d\mathbf{v}(\xi) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \mathbf{v}^2(\xi) \right\}}.$$

Представления (3.8) и (3.11) эквивалентны. В самом деле, рассматривая решение уравнения (3.6) как функционал случайного процесса $\mathbf{v}(\xi)$, равенство (3.11) можно

переписать в виде цепочки равенств:

$$u(x, \mathbf{R}) = \langle \varphi[x, \mathbf{R}; \mathbf{v}(\xi) + \mathbf{y}(\xi)] \rangle_{\mathbf{v}} \Big|_{\mathbf{y}=0} = \left\langle \exp \left\{ \int_0^x d\xi \mathbf{v}(\xi) \frac{\delta}{\delta \mathbf{y}(\xi)} \right\} \right\rangle_{\mathbf{v}} \varphi[x, \mathbf{R}; \mathbf{y}(\xi)] \Big|_{\mathbf{y}=0} = \\ = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{y}^2(\xi)} \right\} \varphi[x, \mathbf{R}; \mathbf{y}(\xi)] \Big|_{\mathbf{y}=0},$$

и, следовательно, в операторном виде (3.8).

Используя вероятностную аналогию, выражение (3.11) можно переписать в более удобном виде. Представим его в виде

$$u(x, \mathbf{R}) = \langle \varphi[x, \mathbf{R}; \mathbf{v}(\xi)] \rangle_{\mathbf{v}} = \\ = \int d\mathbf{q} \tilde{u}_0(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}} \left\langle \exp \left\{ i\mathbf{q} \int_0^x d\xi \mathbf{v}(\xi) + i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_\xi^x d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right\} \right\rangle_{\mathbf{v}},$$

где

$$\tilde{u}_0(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} u_0(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}.$$

Далее можно вынести экспоненту из под знака среднего (см. формулу (Б.20) на с. 99 в приложении). В результате получаем выражение

$$u(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{q} \tilde{u}_0(\mathbf{q}) \exp \left(i \left(\mathbf{q}\mathbf{R} - \frac{\mathbf{q}^2}{2k} x \right) \right) \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}), \quad (3.13)$$

где функция

$$\psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = \left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_\xi^x d\eta \left[\mathbf{v}(\eta) - \frac{\mathbf{q}}{k} \right] \right) \right\} \right\rangle_{\mathbf{v}}. \quad (3.14)$$

Эту функцию можно записать также в операторной форме:

$$\psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right\} \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_\xi^x d\eta \left[\mathbf{v}(\eta) - \frac{\mathbf{q}}{k} \right] \right) \right\} \Big|_{\mathbf{v}=0}. \quad (3.15)$$

Представления (3.14), (3.15) являются решением дифференциального уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right) \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) - \frac{\mathbf{q}}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}), \quad (3.16)$$

$$\psi(0, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = 1,$$

которое, разумеется, можно получить исходя из параболического уравнения (1.39) на с. 14.

Выражения (3.13)–(3.15) представляют собой разложение задачи по плоским волнам. Выражение, стоящее в правой части (3.13) под знаком интеграла, описывает

дифракцию плоской волны за счет неоднородностей поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$; при этом множитель $\tilde{u}_0(\mathbf{q}) \exp\left\{i\mathbf{q}\mathbf{R} - \frac{i\mathbf{q}^2}{2k}x\right\}$ описывает дифракцию в свободном пространстве в отсутствие флуктуаций $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, а множитель $\psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q})$ учитывает влияние неоднородностей на такую дифрагированную волну.

В заключение приведем выражения для функции Грина уравнения (1.39), описывающей поле сферической волны, соответствующее начальному условию в точке $x = x'$ вида $u(x', \mathbf{R}) = \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$:

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') = \exp\left(\frac{i}{2k} \int_{x'}^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta v^2(\xi)}\right) \times \left[\delta\left(\mathbf{R} - \mathbf{R}' + \int_{x'}^x d\xi \mathbf{v}(\xi)\right) \exp\left\{i\frac{k}{2} \int_{x'}^x d\xi \varepsilon\left(\xi, \mathbf{R} + \int_{\xi}^x d\eta \mathbf{v}(\eta)\right)\right\} \right]_{\mathbf{v}=0}, \quad (3.17)$$

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') = \int D\mathbf{v}(x) \delta\left(\mathbf{R} - \mathbf{R}' + \int_{x'}^x d\xi \mathbf{v}(\xi)\right) \times \exp\left\{i\frac{k}{2} \int_{x'}^x d\xi \left[\mathbf{v}^2(\xi) + \varepsilon\left(\xi, \mathbf{R} + \int_{\xi}^x d\eta \mathbf{v}(\eta)\right) \right]\right\}. \quad (3.18)$$

Комплексно сопряженные формулы описывают функцию Грина для сферической волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси x .

3.2. Статистическое описание волнового поля

Перейдем теперь к статистическому описанию распространения волны в случайно-неоднородной среде. Будем считать, что флуктуации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ являются гауссовым однородным случайным полем с корреляционной функцией

$$B_\varepsilon(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') = B_\varepsilon(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') = \langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \varepsilon(x', \mathbf{R}') \rangle. \quad (3.19)$$

Усредняя формулу (3.13) по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, получаем выражение для среднего поля в виде

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \int d\mathbf{q} \tilde{u}_0(\mathbf{q}) \exp\left(i\left(\mathbf{q}\mathbf{R} - \frac{\mathbf{q}^2}{2k}x\right)\right) \langle \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) \rangle, \quad (3.20)$$

где функция

$$\langle \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) \rangle = \left\langle \exp\left\{-\frac{k^2}{8} \int_0^x d\xi_1 \int_0^x d\xi_2 B_\varepsilon\left(\xi_1 - \xi_2, \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta \left[\mathbf{v}(\eta) - \frac{\mathbf{q}}{k}\right]\right)\right\} \right\rangle_{\mathbf{v}}. \quad (3.21)$$

Эту функцию можно записать также в операторной форме

$$\langle \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) \rangle = \exp\left\{\frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta v^2(\xi)}\right\} \times \exp\left\{-\frac{k^2}{8} \int_0^x d\xi_1 \int_0^x d\xi_2 B_\varepsilon\left(\xi_1 - \xi_2, \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta \left[\mathbf{v}(\eta) - \frac{\mathbf{q}}{k}\right]\right)\right\}_{\mathbf{v}=0}. \quad (3.22)$$

Аналогичным образом для функции когерентности второго порядка получаем интегральное представление:

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \int d\mathbf{q}_1 \int d\mathbf{q}_2 \tilde{u}_0(\mathbf{q}_1) \tilde{u}_0(\mathbf{q}_2) \times \exp\left\{i\left(\mathbf{q}_1 \mathbf{R}_1 - \mathbf{q}_2 \mathbf{R}_2\right) - \frac{i(\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_2^2)}{2k}x\right\} \langle \psi(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{q}_1) \psi^*(x, \mathbf{R}_2, \mathbf{q}_2) \rangle, \quad (3.23)$$

где функция

$$\langle \psi(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{q}_1) \psi^*(x, \mathbf{R}_2, \mathbf{q}_2) \rangle = \left\langle \exp\left\{-\frac{k^2}{8} \int_0^x d\xi_1 \int_0^x d\xi_2 \left[B_\varepsilon\left(\xi_1 - \xi_2, \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta \left[\mathbf{v}_1(\eta) - \frac{\mathbf{q}_1}{k}\right]\right) + B_\varepsilon\left(\xi_1 - \xi_2, \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta \left[\mathbf{v}_2(\eta) - \frac{\mathbf{q}_2}{k}\right]\right) - 2B_\varepsilon\left(\xi_1 - \xi_2, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 + \int_{\xi_1}^x d\eta \left[\mathbf{v}_1(\eta) - \frac{\mathbf{q}_1}{k}\right] - \int_{\xi_2}^x d\eta \left[\mathbf{v}_2(\eta) - \frac{\mathbf{q}_2}{k}\right]\right)\right\} \right\rangle_{\mathbf{v}_i}. \quad (3.24)$$

Формулу (3.24) можно записать также в операторной форме

$$\langle \psi(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{q}_1) \psi^*(x, \mathbf{R}_2, \mathbf{q}_2) \rangle = \exp\left\{\frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \left[\frac{\delta^2}{\delta v_1^2(\xi)} - \frac{\delta^2}{\delta v_2^2(\xi)} \right]\right\} \times \exp\left\{-\frac{k^2}{8} \int_0^x d\xi_1 \int_0^x d\xi_2 \left[B_\varepsilon\left(\xi_1 - \xi_2, \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta \left[\mathbf{v}_1(\eta) - \frac{\mathbf{q}_1}{k}\right]\right) + B_\varepsilon\left(\xi_1 - \xi_2, \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta \left[\mathbf{v}_2(\eta) - \frac{\mathbf{q}_2}{k}\right]\right) - 2B_\varepsilon\left(\xi_1 - \xi_2, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 + \int_{\xi_1}^x d\eta \left[\mathbf{v}_1(\eta) - \frac{\mathbf{q}_1}{k}\right] - \int_{\xi_2}^x d\eta \left[\mathbf{v}_2(\eta) - \frac{\mathbf{q}_2}{k}\right]\right)\right\}_{\mathbf{v}_i=0}. \quad (3.25)$$

К сожалению, мы не в состоянии в настоящее время вычислить континуальные интегралы (3.21), (3.24) или соответствующие им операторные выражения (3.22), (3.25). Необходимо прибегать к упрощающим предположениям. Так, если для корреляционной функции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ использовать приближение (1.79),

$$B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) = \delta(x)A(\mathbf{R}), \quad A(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx B_\varepsilon(x, \mathbf{R}),$$

т. е. считать поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ дельта-коррелированным по x , то выписанные выше интегралы вычисляются. При этом более удобно проводить все выкладки с операторной формой записи.

В этом случае для функции $\langle \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) \rangle$ получаем выражение

$$\langle \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) \rangle = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right\} \exp \left(-\frac{k^2}{8} A(0)x \right) \Big|_{\mathbf{v}=0} = \exp \left(-\frac{k^2}{8} A(0)x \right),$$

и формула (3.20), естественно, совпадает с выражением (1.93) на с. 27, полученным непосредственным усреднением стохастического параболического уравнения (1.39) на с. 14.

Аналогичным образом для формулы (3.25) получаем

$$\begin{aligned} \langle \psi(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{q}_1) \psi^*(x, \mathbf{R}_2, \mathbf{q}_2) \rangle &= \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \left[\frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}_1^2(\xi)} - \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}_2^2(\xi)} \right] \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 + \int_\xi^x d\eta \left[\mathbf{v}_1(\eta) - \mathbf{v}_2(\eta) - \frac{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2}{k} \right] \right) \right\}_{\mathbf{v}_i=0}, \end{aligned}$$

где, как и ранее, $D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R})$.

Делая функциональную замену переменных

$$\mathbf{v}_1(x) - \mathbf{v}_2(x) = \mathbf{v}(x), \quad \mathbf{v}_1(x) + \mathbf{v}_2(x) = 2\mathbf{V}(x)$$

и обозначая

$$\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 = \boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = 2\mathbf{R}, \quad \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 = \mathbf{q},$$

последнее выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle \psi(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{q}_1) \psi^*(x, \mathbf{R}_2, \mathbf{q}_2) \rangle &= \exp \left\{ \frac{i}{k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}(\xi) \delta \mathbf{V}(\xi)} \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\boldsymbol{\rho} + \int_\xi^x d\eta \left[\mathbf{v}(\eta) - \frac{\mathbf{q}}{k} \right] \right) \right\}_{\mathbf{v}_i=0} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{q}}{k}(x - \xi) \right) \right\}, \quad (3.26) \end{aligned}$$

и, следовательно, получить выражение для функции когерентности второго порядка, совпадающее с формулой (1.94) на с. 28.

Выражения для среднего поля и функции когерентности второго порядка легко получить и непосредственно, усредняя соответствующие стохастические уравнения. В этом смысле для вычисления указанных величин данные методы можно считать эквивалентными. Представляется, однако, существенным, что с помощью операторного метода (или континуального интеграла) мы можем выписывать выражения для таких величин, которые не могут быть описаны замкнутыми уравнениями (например, выражения, связанные с флуктуациями интенсивности волны). Так, можно получить замкнутое уравнение для функции когерентности четвертого порядка:

$$\Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4) = \langle u(x, \mathbf{R}_1) u(x, \mathbf{R}_2) u^*(x, \mathbf{R}_3) u^*(x, \mathbf{R}_4) \rangle,$$

с помощью которого затем найти величину $\langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle$, полагая в решении

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_4 = \mathbf{R}.$$

Однако решить аналитически это уравнение не представляется возможным, и оно содержит много лишних (для нахождения $\langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle$) параметров, в то время как запись величины в виде континуального интеграла этих параметров не содержит. Поэтому такая запись решения задачи может быть полезна для изучения асимптотических характеристик любых моментов и, следовательно, распределения вероятностей для интенсивности волнового поля. Кроме того, в ряде случаев представление поля в операторном виде позволяет найти соответствующие средние характеристики технически проще по сравнению с изучением соответствующих уравнений. Так, если мы захотим, например, вычислить величину

$$\langle \varepsilon(y, \mathbf{R}_1) I(x, \mathbf{R}) \rangle \quad (y < x),$$

то, если исходить из уравнения (1.39), следует составить дифференциальное уравнение для величины

$$\varepsilon(y, \mathbf{R}_1) u(x, \mathbf{R}_2) u^*(x, \mathbf{R}_3)$$

при $y < x$, усреднить его по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, установить граничное условие для величины $\langle \varepsilon(y, \mathbf{R}_1) u(x, \mathbf{R}_2) u^*(x, \mathbf{R}_3) \rangle$ при $x = y$, решить полученное уравнение с соответствующим граничным условием, а уже затем положить $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}$. В то же время вычисление этой величины с помощью представления в операторном виде мало чем отличается от вычисления величины $\langle \psi \psi^* \rangle$, рассмотренного выше.

Перейдем теперь к анализу асимптотического поведения флуктуаций интенсивности плоской волны в области сильных флуктуаций в случайно-неоднородной среде следуя [11, 56].

3.3. Асимптотический анализ флуктуаций интенсивности плоской волны

Рассмотрим статистический момент поля $u(x, \mathbf{R})$:

$$M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \left\langle \prod_{k=1}^n u(x, \mathbf{R}_{2k-1}) u^*(x, \mathbf{R}_{2k}) \right\rangle. \quad (3.27)$$

В приближении дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ моментная функция $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$ удовлетворяет уравнению (1.83) на с. 25 при $n = m$, которое

для плоской падающей волны в переменных \mathbf{R}_k записывается в виде уравнения с начальным условием:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \sum_{l=1}^{2n} (-1)^{l+1} \Delta_{\mathbf{R}_l} \right) M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \\ = \frac{k^2}{8} \sum_{l,j=1}^{2n} (-1)^{l+j} D(\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_j) M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}), \end{aligned} \quad (3.28)$$

где функция $D(\mathbf{R})$ описывается формулой

$$D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R}) = 2\pi \int d\mathbf{q} \Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q}) [1 - \cos(\mathbf{q}\mathbf{R})], \quad (3.29)$$

а $\Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q})$ — трехмерный спектр поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ от двумерного вектора \mathbf{q} .

Используя запись поля $u(x, \mathbf{R})$ в виде континуального интеграла (3.12) на с. 62, усредняя по полю $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, получаем выражение для $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$ в виде

$$\begin{aligned} M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \int \dots \int D\mathbf{v}_1(\xi) \dots D\mathbf{v}_{2n}(\xi) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \int_0^x d\xi v_j^2(\xi) - \right. \\ \left. - \frac{k^2}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} \int_0^x d\xi D \left(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l + \int_\xi^x dx' [\mathbf{v}_j(x') - \mathbf{v}_l(x')] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Формулу (3.30) можно также получить, решая уравнение (3.28) непосредственно методом, описанным выше. Формулу (3.30) можно записать в операторной форме:

$$\begin{aligned} M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \prod_{l=1}^{2n} \exp \left\{ \frac{i}{2k} (-1)^{l+1} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{k^2}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} \int_0^x dx' D \left(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l + \int_{x'}^x d\xi [\mathbf{v}_j(\xi) - \mathbf{v}_l(\xi)] \right) \right\}_{\mathbf{v}=0}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Если теперь совместить точки $\mathbf{R}_{2k-1} = \mathbf{R}_{2k}$, то функция $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$ перейдет в функцию $\left\langle \prod_{k=1}^n I(x, \mathbf{R}_{2k-1}) \right\rangle$, описывающую корреляционные характеристики интенсивности волны. Если же теперь положить все $\mathbf{R}_l = \mathbf{R}$, то функция

$$M_{nn}(x, \mathbf{R}, \dots, \mathbf{R}) = \Gamma_{2n}(x, \mathbf{R}) = \langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$$

будет описывать n -й момент интенсивности волнового поля.

Прежде чем обсуждать асимптотику функций $\Gamma_{2n}(x, \mathbf{R})$ для случая непрерывной случайной среды, рассмотрим более простую задачу о флуктуациях волнового поля за случайным фазовым экраном.

3.3.1. Случайный фазовый экран

Пусть имеется слой неоднородной среды, толщина которого настолько мала, что волна при прохождении через слой приобретает только случайный набег фазы

$$S(\mathbf{R}) = \frac{k}{2} \int_0^{\Delta x} d\xi \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) \quad (3.32)$$

и не меняет амплитуды. Будем считать, как и ранее, что случайное поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ — гауссово дельта-коррелированное по x поле. После прохождения неоднородного слоя волна распространяется в однородной среде, и ее распространение описывается уравнением, которое получается из (1.39) на с. 14 при $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = 0$. Решение этой задачи дается формулами

$$u(x, \mathbf{R}) = \exp \left(i \frac{x}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right) e^{iS(\mathbf{R})} = \frac{k}{2\pi i x} \int d\mathbf{v} \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \mathbf{v}^2 + iS(\mathbf{R} + \mathbf{v}) \right\}, \quad (3.33)$$

которые являются конечномерным аналогом формул (3.9), (3.12).

Рассмотрим функцию $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$. Подставляя (3.33) в (3.27) и усредняя, легко получаем формулу

$$\begin{aligned} M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^{2n} \int \dots \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_{2n} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \mathbf{v}_j^2 - \frac{k^2 \Delta x}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} D(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l + \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_l) \right\}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Эта формула является аналогом (3.30).

Прежде всего рассмотрим подробнее случай $n = 2$ при попарно совмещенных точках наблюдения:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}', \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_4 = \mathbf{R}'', \quad \mathbf{R}' - \mathbf{R}'' = \rho.$$

Тогда функция

$$\Gamma_4(x, \mathbf{R}', \mathbf{R}', \mathbf{R}'', \mathbf{R}'') = \langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle$$

— ковариация интенсивностей $I(x, \mathbf{R}) = |u(x, \mathbf{R})|^2$. Если в (3.34) (при $n = 2$) ввести новые переменные интегрирования

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{R}_1, \quad \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{R}_3, \quad \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{R},$$

то интегрирование по \mathbf{R} и \mathbf{R}_3 можно выполнить и получить в результате более простую формулу

$$\langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle = \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^2 \int \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \exp \left\{ \frac{ik}{x} \mathbf{R}_1 (\mathbf{R}_2 - \rho) - \frac{k^2 \Delta x}{4} F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \right\}, \quad (3.35)$$

где $\rho = \mathbf{R}' - \mathbf{R}''$ и функция $F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ определяется из равенства (1.98), т. е.

$$F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = 2D(\mathbf{R}_1) + 2D(\mathbf{R}_2) - D(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) - D(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2),$$

$$D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R}).$$

Интеграл (3.35) подробно исследовался (в том числе и численными методами) во многих работах. И его асимптотика при $x \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\begin{aligned} \langle I(x, \mathbf{R}')I(x, \mathbf{R}'') \rangle &= 1 + \exp \left\{ -\frac{k^2 \Delta x}{2} D(\boldsymbol{\rho}) \right\} + \\ &+ \pi k^2 \Delta x \int d\mathbf{q} \Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) \left[1 - \cos \frac{\mathbf{q}^2 x}{k} \right] \exp \left\{ i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho} - \frac{k^2 \Delta x}{2} D\left(\frac{\mathbf{q}x}{k}\right) \right\} + \\ &+ \pi k^2 \Delta x \int d\mathbf{q} \Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) \left[1 - \cos \left(\mathbf{q}\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{q}^2 x}{k} \right) \right] \exp \left\{ -\frac{k^2 \Delta x}{2} D\left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{q}x}{k}\right) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (3.36)$$

Отметим, что теперь в задаче, помимо пространственного масштаба $\rho_{\text{cог}}$, появляется второй характерный пространственный масштаб

$$r_0 = \frac{x}{k\rho_{\text{cог}}}. \quad (3.37)$$

Если теперь в выражении (3.36) положить $\boldsymbol{\rho} = 0$, то для дисперсии квадрата интенсивности можно получить выражение

$$\beta^2(x) = \langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle - 1 = 1 + \pi \Delta x \int d\mathbf{q} q^4 \Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) \exp \left\{ -\frac{k^2 \Delta x}{2} D\left(\frac{\mathbf{q}x}{k}\right) \right\} + \dots \quad (3.38)$$

Если флуктуации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ в неоднородном слое вызваны турбулентностью, так что $\Phi_\varepsilon(\mathbf{q})$ описывается формулой (1.155) на с. 42, то равенство (3.38) приводит результату

$$\beta^2(x) = 1 + 0,429\beta_0^{-4/5}(x), \quad (3.39)$$

где $\beta_0^2(x)$ — дисперсия квадрата интенсивности, рассчитанная по первому приближению метода плавных возмущений для фазового экрана (1.162) на с. 44.

Изложенные соображения легко обобщаются на более высокие моментные функции поля $u(x, \mathbf{R})$ и, в частности, на функции $\Gamma_{2n}(x, \mathbf{R}) = \langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$. Формула (3.34) в этом случае имеет вид

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^{2n} \int \dots \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_{2n} \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \mathbf{v}_j^2 - F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n}) \right\}, \quad (3.40)$$

где

$$F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n}) = \frac{k^2 \Delta x}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} D(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_l). \quad (3.41)$$

Функция $F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n})$ связана со случайными набегами фазы $S(\mathbf{v}_i)$, определяемыми формулой (3.32), соотношением

$$F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n}) = \frac{1}{2} \left\langle \left[\sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} S(\mathbf{v}_j) \right]^2 \right\rangle \geq 0.$$

Отсюда ясно, что если все нечетные точки \mathbf{v}_{2l+1} совпадают попарно с какими-либо четными точками, то положительные и отрицательные набеги фаз компенсируются и функция $F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n})$ обращается в нуль. Поэтому становится очевидным, что

при $\sqrt{x/k} \gg \rho_{\text{cог}}$ основной вклад в $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ будут давать те области, где происходит такая компенсация. Нетрудно подсчитать, что число таких областей равно $n!$. Тогда, заменяя (3.40) на умноженный на $n!$ интеграл лишь по одной из этих областей A_1 , в которой

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \sim |\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4| \sim \dots \sim |\mathbf{v}_{2n-1} - \mathbf{v}_{2n}| < \rho_{\text{cог}},$$

получим

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle \approx n! \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^{2n} \int \dots \int_{A_1} d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_{2n} \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \mathbf{v}_j^2 - F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n}) \right\}. \quad (3.42)$$

Убывание подынтегрального выражения по переменным $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4$ и т.д. обеспечивается соответствующим слагаемым из (3.41):

$$\frac{k^2 \Delta x}{8} D(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \quad \frac{k^2 \Delta x}{8} D(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) \quad \text{и т.д.}$$

Эти слагаемые следует оставить в показателе экспоненты, а экспоненту от остальных слагаемых следует разложить в ряд:

$$\begin{aligned} \langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle &\approx n! \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^{2n} \int \dots \int_{A_1} d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_{2n} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \mathbf{v}_j^2 - \frac{k^2 \Delta x}{4} \sum_{l=1}^n D(\mathbf{v}_{2l-1} - \mathbf{v}_{2l}) \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{k^2 \Delta x}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} '(-1)^{j+l+1} D(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_l) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Штрих у знака суммы означает, что из нее выброшены члены, вошедшие в экспоненту. В формуле (3.43) интегрирование можно распространить на все пространство, так как вне области A_1 подынтегральная функция пренебрежимо мала. С учетом этого многократный интеграл в (3.43) можно вычислить точно и получить для $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ формулу

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n! \left[1 + n(n-1) \frac{\beta^2(x) - 1}{4} + \dots \right], \quad (3.44)$$

в которой величина $\beta^2(x)$ определяется выражением (3.39). Обсуждение полученной формулы мы проведем несколько позднее, после того как рассмотрим распространение волн в непрерывной случайно-неоднородной среде, поскольку получающиеся в обоих случаях результаты аналогичны.

3.3.2. Случай непрерывной случайной среды

Рассмотрим теперь асимптотику высших моментных функций волнового поля $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$, распространяющегося в случайно-неоднородной среде. Формальное решение этой задачи дается выражениями (3.30), (3.31). От рассмотренных выше формул для фазового экрана они отличаются лишь заменой обычного интегрирования на континуальное. Рассмотрим сначала величину $\langle I(x, \mathbf{R}')I(x, \mathbf{R}'') \rangle$, которая получается из $M_{22}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_4)$ при попарном слиянии точек наблюдения

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}', \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_4 = \mathbf{R}''.$$

Для плоской волны ($u_0(\mathbf{R}) = 1$), используя (3.31) и вводя новые переменные, аналогичные случаю фазового экрана, получаем ($\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R}' - \mathbf{R}''$)

$$\begin{aligned} \langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle &= \exp \left\{ \frac{i}{k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}_1(\xi) \delta \mathbf{v}_2(\xi)} \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx' \left[2D \left(\boldsymbol{\rho} + \int_{x'}^x d\xi \mathbf{v}_1(\xi) \right) + 2D \left(\int_{x'}^x d\xi \mathbf{v}_2(\xi) \right) - \right. \right. \\ &\left. \left. - D \left(\boldsymbol{\rho} + \int_{x'}^x d\xi [\mathbf{v}_1(\xi) + \mathbf{v}_2(\xi)] \right) - D \left(\boldsymbol{\rho} + \int_{x'}^x d\xi [\mathbf{v}_1(\xi) - \mathbf{v}_2(\xi)] \right) \right] \right\}_{\mathbf{v}=0}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Формулу (3.45) можно записать и в виде континуального интеграла, вытекающем из (3.30), однако мы будем использовать операторную форму записи. Аналогично случаю фазового экрана выражение для $\langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle$ можно записать при $x \rightarrow \infty$ в виде

$$B_I(x, \boldsymbol{\rho}) = \langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle - 1 = B_I^{(1)}(x, \boldsymbol{\rho}) + B_I^{(2)}(x, \boldsymbol{\rho}) + B_I^{(3)}(x, \boldsymbol{\rho}), \quad (3.46)$$

где

$$\begin{aligned} B_I^{(1)}(x, \boldsymbol{\rho}) &= \exp \left\{ -\frac{k^2 x}{2} D(\boldsymbol{\rho}) \right\}, \\ B_I^{(2)}(x, \boldsymbol{\rho}) &= \pi k^2 \int_0^x dx' \int d\mathbf{q} \Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) \left[1 - \cos \frac{\mathbf{q}^2}{k} (x - x') \right] \times \\ &\times \exp \left\{ i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho} - \frac{k^2 x'}{2} D \left(\frac{\mathbf{q}}{k} (x - x') \right) - \frac{k^2}{2} \int_{x'}^x dx'' D \left(\frac{\mathbf{q}}{k} (x - x'') \right) \right\}, \\ B_I^{(3)}(x, \boldsymbol{\rho}) &= \pi k^2 \int_0^x dx' \int d\mathbf{q} \Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) \left[1 - \cos \left(\mathbf{q}\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{q}^2}{k} (x - x') \right) \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{k^2 x'}{2} D \left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{q}}{k} (x - x') \right) - \frac{k^2}{2} \int_{x'}^x dx'' D \left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{q}}{k} (x - x'') \right) \right\}. \end{aligned}$$

Полагая здесь $\boldsymbol{\rho} = 0$ и учитывая первый член разложения в ряд функции

$$1 - \cos \frac{\mathbf{q}^2}{k} (x - x'),$$

для дисперсии интенсивности

$$\beta^2(x) = \langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle - 1 = B_I(x, 0) - 1$$

будем иметь формулу, аналогичную (3.38):

$$\begin{aligned} \beta^2(x) &= 1 + \pi \int_0^x dx' (x - x') \int d\mathbf{q} q^4 \Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{k^2 x'}{2} D \left(\frac{\mathbf{q}}{k} (x - x') \right) - \frac{k^2}{2} \int_{x'}^x dx'' D \left(\frac{\mathbf{q}}{k} (x - x'') \right) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (3.47)$$

Если рассмотреть случай турбулентной среды, то из (3.47) имеем

$$\beta^2(x) = 1 + 0,861 \left(\beta_0^2(x) \right)^{-2/5}, \quad (3.48)$$

где $\beta_0^2(x)$ — дисперсия интенсивности волнового поля, рассчитанная по первому приближению метода плавных возмущений (1.164).

Выражение (3.47) остается в силе и в том случае, когда функции $\Phi_\varepsilon(\mathbf{q})$, $D(\boldsymbol{\rho})$ медленно меняются вдоль оси x . В этом случае легко перейти от (3.60) к (3.38), если считать, что $\Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) = 0$ вне слоя $0 \leq x' \leq \Delta x \ll x$.

Относительно корреляционной функции $B_I(x, \boldsymbol{\rho})$ отметим, что главный член $B_I^{(1)}(x, \boldsymbol{\rho})$ в (3.46) представляет собой квадрат модуля функции когерентности второго порядка (см., например, [11, 14, 17, 56]).

Рассмотрим теперь высшие моментные функции $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = \Gamma_{2n}(x, 0)$. Аналогично случаю фазового экрана, легко получить, что и при распространении волн в случайно-неоднородной среде для дисперсии интенсивности волнового поля имеет место разложение

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n! \left[1 + n(n-1) \frac{\beta^2(x) - 1}{4} + \dots \right], \quad (3.49)$$

совпадающее с выражением (3.44) для фазового экрана; при этом, разумеется, $\beta^2(x)$ в каждом случае определяется различными формулами.

Формула (3.49) дает первые два члена асимптотического разложения функции $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ при $\beta_0^2(x) \rightarrow \infty$. Так как $\beta^2(x) \rightarrow 1$ при $\beta_0^2(x) \rightarrow \infty$, второе слагаемое в (3.49) мало по сравнению с первым при достаточно больших $\beta_0^2(x)$. Лишь в том случае, когда

$$n(n-1) \frac{\beta^2(x) - 1}{4} \ll 1, \quad (3.50)$$

выражение (3.49) имеет смысл. Однако при фиксированном $\beta_0^2(x)$ всегда найдутся такие номера n , для которых условие (3.50) будет нарушаться. Поэтому формула (3.49) справедлива лишь для не слишком больших n . Следует также отметить, что и выход на асимптотику (3.49) при $\beta_0^2(x) \rightarrow \infty$ может быть достаточно медленным.

Формула (3.49) приводит к плотности вероятностей для интенсивности с сингулярными особенностями. Чтобы избежать их, можно аппроксимировать эту формулу выражением (см., например, [50])

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n! \exp \left\{ n(n-1) \frac{\beta^2(x) - 1}{4} \right\}, \quad (3.51)$$

которому соответствует плотность вероятностей вида (см., например, [48, 50])

$$P(x, I) = \frac{1}{\sqrt{\pi} (\beta(x) - 1)} \int_0^\infty dz \exp \left\{ -zI - \frac{\left[\ln z - \frac{\beta(x) - 1}{4} \right]^2}{\beta(x) - 1} \right\}. \quad (3.52)$$

Отметим, что, вообще говоря, распределение вероятностей (3.52) неприменимо в узкой окрестности $I \sim 0$ (окрестность тем уже, чем больше параметр $\beta_0^2(x)$). Это связано с тем, что из формулы (3.52) следуют бесконечно большие значения для моментов величины $1/I(x, \mathbf{R})$. Однако для конечного значения $\beta_0^2(x)$ (сколь велико оно ни было бы) величины $\langle 1/I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ конечны и, следовательно, должно выполняться

равенство $P(x, 0) = 0$. Существование такой узкой окрестности точки $I \sim 0$, конечно, не сказывается на поведении моментов (3.51) для больших значений параметра $\beta_0^2(x)$.

Асимптотические формулы (3.51), (3.52) описывают переход в область *насыщенных* флуктуаций интенсивности, где $\beta(x) \rightarrow 1$ при $\beta_0^2(x) \rightarrow \infty$. В этой области соответственно имеем

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n!, \quad P(x, I) = e^{-I}. \quad (3.53)$$

Экспоненциальное распределение вероятностей (3.53) означает, что комплексное поле $u(x, \mathbf{R})$ является гауссовым случайным полем. При этом

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R})e^{iS(x, \mathbf{R})} = u_1(x, \mathbf{R}) + iu_2(x, \mathbf{R}), \quad (3.54)$$

где $u_1(x, \mathbf{R})$ и $u_2(x, \mathbf{R})$ — действительная и мнимая части соответственно. Тогда интенсивность волнового поля

$$I(x, \mathbf{R}) = A^2(x, \mathbf{R}) = u_1^2(x, \mathbf{R}) + u_2^2(x, \mathbf{R}).$$

Гауссовость комплексного поля $u(x, \mathbf{R})$ означает, что случайные поля $u_1(x, \mathbf{R})$ и $u_2(x, \mathbf{R})$ также гауссовы статистически независимые поля с дисперсиями

$$\langle u_1^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \langle u_2^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{2}. \quad (3.55)$$

Естественно считать, что и их градиенты

$$\mathbf{p}_1(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} u_1(x, \mathbf{R}), \quad \mathbf{p}_2(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} u_2(x, \mathbf{R})$$

также статистически не зависят от полей $u_1(x, \mathbf{R})$, $u_2(x, \mathbf{R})$ и являются гауссовыми однородными и изотропными полями в плоскости \mathbf{R} с дисперсиями

$$\sigma_{\mathbf{p}}^2(x) = \langle \mathbf{p}_1^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \langle \mathbf{p}_2^2(x, \mathbf{R}) \rangle. \quad (3.56)$$

Следовательно, совместная плотность вероятностей полей $u_1(x, \mathbf{R})$, $u_2(x, \mathbf{R})$ и их градиентов $\mathbf{p}_1(x, \mathbf{R})$ и $\mathbf{p}_2(x, \mathbf{R})$ имеет вид

$$P(x, u_1, u_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{\pi^3 \sigma_{\mathbf{p}}^4(x)} \exp \left\{ -u_1^2 - u_2^2 - \frac{\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2}{\sigma_{\mathbf{p}}^2(x)} \right\}. \quad (3.57)$$

Рассмотрим теперь совместную плотность вероятностей интенсивности волнового поля $I(x, \mathbf{R})$ и градиента амплитуды:

$$\kappa(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} A(x, \mathbf{R}) = \frac{u_1(x, \mathbf{R})\mathbf{p}_1(x, \mathbf{R}) + u_2(x, \mathbf{R})\mathbf{p}_2(x, \mathbf{R})}{\sqrt{u_1^2(x, \mathbf{R}) + u_2^2(x, \mathbf{R})}}.$$

Для нее имеем

$$\begin{aligned} P(x, I, \kappa) &= \langle \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \delta(\kappa(x, \mathbf{R}) - \kappa) \rangle_{u_i, \mathbf{p}_i} = \\ &= \frac{1}{\pi^3 \sigma_{\mathbf{p}}^4(x)} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} du_2 \int d\mathbf{p}_1 \int d\mathbf{p}_2 \exp \left\{ -u_1^2 - u_2^2 - \frac{\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2}{\sigma_{\mathbf{p}}^2(x)} \right\} \times \\ &\times \delta(u_1^2 + u_2^2 - I) \delta \left(\frac{u_1 \mathbf{p}_1 + u_2 \mathbf{p}_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} - \kappa \right) = \frac{1}{2\pi \sigma_{\mathbf{p}}^2(x)} \exp \left\{ -I - \frac{\kappa^2}{2\sigma_{\mathbf{p}}^2(x)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

и, следовательно, поперечный градиент амплитуды статистически не зависит от интенсивности волнового поля и является гауссовым случайным полем с дисперсией

$$\langle \kappa^2(x, \mathbf{R}) \rangle = 2\sigma_{\mathbf{p}}^2(x). \quad (3.59)$$

Отметим, что поперечный градиент амплитуды также статистически не зависит от вторых производных по поперечным координатам интенсивности волнового поля.

В области сильных флуктуаций интенсивности функция когерентности второго порядка не зависит от дифракционных явлений и описывается выражением

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x, \mathbf{R} - \mathbf{R}') &= \langle u(x, \mathbf{R})u^*(x, \mathbf{R}') \rangle = \\ &= \langle u_1(x, \mathbf{R})u_1^*(x, \mathbf{R}') \rangle + \langle u_2(x, \mathbf{R})u_2^*(x, \mathbf{R}') \rangle = \exp \left(-\frac{1}{4}k^2 x D(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \right), \end{aligned} \quad (3.60)$$

где $D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R})$. И, следовательно, величина $\sigma_{\mathbf{p}}^2(x)$ из (3.55) определяется выражением

$$\sigma_{\mathbf{p}}^2(x) = \frac{k^2 x}{8} \Delta_{\mathbf{R}} D(\mathbf{R}) \Big|_{\mathbf{R}=0} = -\frac{k^2 x}{8} \Delta_{\mathbf{R}} A(\mathbf{R}) \Big|_{\mathbf{R}=0},$$

которое для турбулентных флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ совпадает, естественно, с формулой (1.166) на с. 45:

$$\sigma_{\mathbf{p}}^2(x) = \frac{1,476}{L_f^2(x)} D^{1/6}(x) \beta_0(x), \quad (3.61)$$

где $L_f(x) = \sqrt{x/k}$ — размер первой зоны Френеля, $D(x) = \kappa_m^2 x/k \gg 1$ — волновой параметр, а κ_m — волновое число, соответствующее микромасштабу турбулентности.

В заключение этого раздела отметим, что представление поля $u(x, \mathbf{R})$ в виде континуального интеграла позволяет исследовать и вопрос о пределах применимости приближения дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для флуктуаций интенсивности волны. При этом оказывается, что все условия применимости дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для вычисления величины $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ совпадают с условиями применимости дельта-коррелированного приближения для величины $\langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle$. Иначе говоря, приближение дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ не изменяет вида распределения вероятностей для интенсивности волнового поля.

Для турбулентных пульсаций температуры в области слабых флуктуаций приближение дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ справедливо при выполнении неравенств

$$\lambda \ll \sqrt{\lambda x} \ll x,$$

где $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны.

В области же сильных флуктуаций условием применимости приближения дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ является условие

$$\lambda \ll \rho_{\text{cog}} \ll r_0 \ll x,$$

где ρ_{cog} и r_0 определяются формулами (1.97) на с. 28 и (3.37) на с. 70. Все эти неравенства имеют простой физический смысл. Пока в задаче о распространении волны в среде со случайными неоднородностями наименьшим из всех продольных масштабов является радиус корреляции $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ (его роль для турбулентных пульсаций температуры играет размер первой зоны Френеля), справедливо дельта-коррелированное

приближение. При распространении волны в область сильных флуктуаций появляется продольный масштаб $\sim \rho_{\text{cog}} \sqrt{kx}$, который постепенно уменьшается, так что при достаточно большом значении параметра $\beta_0^2(x)$ он может стать меньше радиуса корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. При возникновении такой ситуации уже нельзя пользоваться дельта-коррелированным приближением.

Приведенные выше неравенства можно рассматривать и как ограничения снизу и сверху на величину масштаба функции корреляции интенсивности. При этом дельта-коррелированное приближение справедливо лишь в том случае, когда любые масштабы, возникающие в задаче, остаются малыми по сравнению с длиной трассы.

3.4. Каустическая структура волнового поля в случайно-неоднородной среде

Рассмотренные выше статистические характеристики волнового поля $u(x, \mathbf{R})$, например его корреляционная функция или средняя интенсивность в области сильных флуктуаций, совершенно не отражают реального поведения волнового поля в отдельных реализациях параметров среды (см. рис. 1.1, рис. 1.2 на с. 21). В общем случае интенсивность волнового поля описывается уравнением (1.148) на с. 41:

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} [I(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})] = 0, \quad I(0, \mathbf{R}) = I_0(\mathbf{R}). \quad (3.62)$$

Отсюда следует, что в общем случае произвольного падающего волнового пучка сохраняется мощность волнового поля в плоскости $x = \text{const}$:

$$E_0 = \int I(x, \mathbf{R}) d\mathbf{R} = \int I_0(\mathbf{R}) d\mathbf{R}.$$

Уравнение (3.62) можно трактовать как уравнение переноса консервативной примеси в потенциальном поле скоростей (уравнение непрерывности), для которой возникает кластерная структура поля примеси. Следовательно, реализации поля интенсивности волны также должны иметь кластерный характер. Это явление в рассматриваемом случае проявляется в виде каустических структур из-за эффектов случайных фокусировок и дефокусировок волнового поля в случайной среде. Так, на рис. 3.1 приведены фотографии поперечного сечения лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной среде в лабораторных исследованиях [9] при различных интенсивностях флуктуаций диэлектрической проницаемости. Аналогичные фотографии из работы [58] приведены на рис. 3.2. Эти фотографии получены путем численного моделирования, выполненного в работах [51, 52]. На этих рисунках ясно видно возникновение каустической структуры волнового поля.

Для анализа детальной структуры случайного волнового поля можно воспользоваться методами статистической топографии [22], которые позволяют понять, каким образом образуется каустическая структура волнового поля, и выяснить, какими статистическими параметрами она описывается. Отметим, что впервые, по-видимому, теория выбросов случайного поля интенсивности была применена для анализа задачи о распространении волн в турбулентной среде в работах [2, 3] (см. также [6]).

3.4.1. Элементы статистической топографии случайного поля интенсивности

Для плоской падающей волны, в силу пространственной однородности, все одноточечные статистические характеристики, в том числе и плотности вероятностей, не

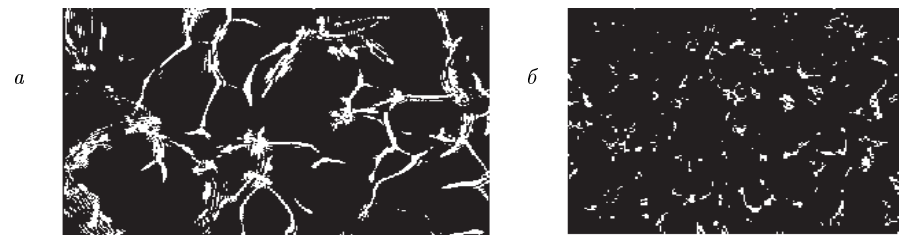


Рис. 3.1. Поперечное сечение лазерного пучка при распространении в турбулентной среде (в лабораторных условиях) в области сильных фокусировок (а) и в области сильных (насыщенных) флуктуаций (б)

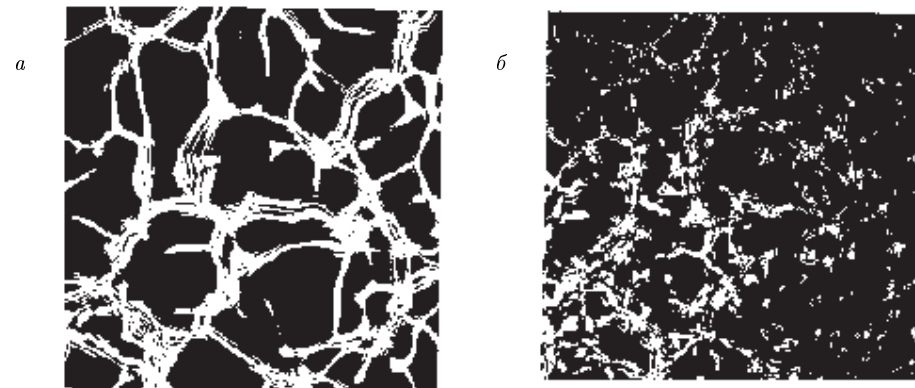


Рис. 3.2. Поперечное сечение лазерного пучка при распространении в турбулентной среде (численное моделирование) в области сильных фокусировок (а) и в области сильных (насыщенных) флуктуаций (б)

зависят от переменной \mathbf{R} . В этом случае можно ввести удельные (приходящиеся на единицу площади) значения ряда физических величин, достаточно полно характеризующих кластерную структуру интенсивности волнового поля. При этом, как указывалось выше, естественным масштабом длины в плоскости $x = \text{const}$, не зависящим от параметров среды, является размер *первой зоны Френеля* $L_f(x) = \sqrt{x/k}$, определяющий размер переходной области свет-тень при дифракции на краю непрозрачного экрана. К таким величинам относятся:

- удельная средняя общая площадь областей в плоскости $\{\mathbf{R}\}$, ограниченных линиями уровня, где $I(x, \mathbf{R}) > I$,

$$\langle s(x, I) \rangle = \int_I^\infty dI' P(x, I'),$$

где $P(x, I)$ — плотность вероятностей интенсивности волнового поля $I(x, \mathbf{R})$;

- удельная средняя мощность поля, заключенная в этих областях,

$$\langle e(x, I) \rangle = \int_I^\infty dI' P(x, I');$$

- удельное среднее значение длины этих контуров

$$\langle l(x, I) \rangle = L_f(x) \langle |p(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle,$$

где $p(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} I(x, \mathbf{R})$ — поперечный градиент интенсивности волнового поля;

- оценка для среднего числа разности числа контуров с противоположной ориентацией векторов нормали, приходящихся на первую зону Френеля:

$$\langle n(x, I) \rangle = \frac{1}{2\pi} L_f^2(x) \langle \kappa(x, \mathbf{R}; I) |p(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle,$$

где $\kappa(x, \mathbf{R}; I)$ — кривизна линии уровня,

$$\begin{aligned} \kappa(x, \mathbf{R}; I) &= \\ &= \frac{-p_y^2(x, \mathbf{R}) \frac{\partial^2 I(x, \mathbf{R})}{\partial z^2} - p_z^2(x, \mathbf{R}) \frac{\partial^2 I(x, \mathbf{R})}{\partial y^2} + 2p_y(x, \mathbf{R}) p_z(x, \mathbf{R}) \frac{\partial^2 I(x, \mathbf{R})}{\partial y \partial z}}{p^3(x, \mathbf{R})}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь динамику всех этих величин в зависимости от проходимой волной дистанции x (параметра $\beta_0(x)$).

3.4.2. Область слабых флуктуаций интенсивности

Область слабых флуктуаций интенсивности ограничивается значениями параметра $\beta_0(x) \leq 1$, и в этом случае интенсивность волнового поля имеет логнормальный характер и описывается выражением (1.159) на с. 44.

Для этого логарифмически нормального процесса кривой типичной реализации случайной интенсивности является экспоненциально спадающая с дистанцией кривая

$$I^*(x) = e^{-\beta_0(x)/2},$$

и формирование статистики (например, моментных функций $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$) осуществляется за счет больших выбросов процесса $I(x, \mathbf{R})$ относительно этой кривой.

Кроме того, для реализаций логарифмически нормального процесса существуют также различные мажорантные оценки. Так, например, с вероятностью $p = 1/2$ для отдельных реализаций интенсивности волнового поля выполняется неравенство

$$I(x) < 4e^{-\beta_0(x)/4}$$

на всем интервале расстояний $x \in (0, \infty)$. Все эти обстоятельства указывают на начало образования кластерной структуры интенсивности волнового поля.

Знание плотности вероятностей (1.159) позволяет, как указывалось выше, получить некоторые количественные характеристики таких кластерных образований. Так, средняя удельная площадь областей, внутри которых $I(x, \mathbf{R}) > I$, равна

$$\langle s(x, I) \rangle = \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{2\beta_0(x)}} \ln \left(\frac{1}{I} e^{-\beta_0(x)/2} \right) \right), \quad (3.63)$$

а удельная средняя мощность, сосредоточенная в этих областях, описывается выражением

$$\langle e(x, I) \rangle = \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{2\beta_0(x)}} \ln \left(\frac{1}{I} e^{\beta_0(x)/2} \right) \right), \quad (3.64)$$

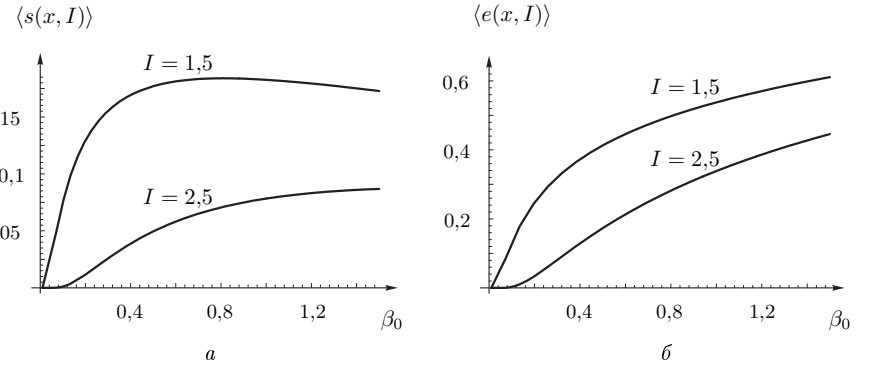


Рис. 3.3. Зависимости средних удельной площади (а) и мощности (б) от параметра $\beta_0(x)$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z dy e^{-y^2}$$

— стандартный интеграл ошибок.

Характер пространственной эволюции кластерной структуры при изменении параметра $\beta_0(x)$ существенно зависит от фиксируемого уровня I . В наиболее интересном случае $I > 1$, в начальной плоскости $\langle s(0, I) \rangle = 0$ и $\langle e(0, I) \rangle = 0$. С ростом $\beta_0(x)$ образуются небольшие кластерные области, где $I(x, \mathbf{R}) > I$, практически сохраняющиеся на некоторых расстояниях и интенсивно втягивающие в себя значительную часть общей мощности. В дальнейшем площади этих областей уменьшаются с увеличением $\beta_0(x)$, а содержащаяся в них мощность увеличивается, что соответствует увеличению средней яркости внутри этих областей. Данные процессы связаны с фокусировкой излучения отдельными участками среды. На рис. 3.3, а, б приведены графики изменения функций $\langle s(x, I) \rangle$ и $\langle e(x, I) \rangle$ в зависимости от параметра $\beta_0(x)$ из указанного диапазона значений. Максимальная величина средней удельной площади достигается при $\beta_0(x) = 2 \ln(I)$ и

$$\langle s(x, I) \rangle_{\max} = \Phi \left(-\frac{1}{\sqrt{\ln(I)}} \right).$$

При этом значении $\beta_0(x)$ средняя мощность $\langle e(x, I) \rangle = 1/2$.

В области слабых флуктуаций интенсивности пространственный градиент уровня амплитуды $\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})$ статистически не зависит от $\chi(x, \mathbf{R})$. Это позволяет как вычислить удельную среднюю длину контуров $I(x, \mathbf{R}) = I$, так и оценить удельное среднее число таких контуров. В самом деле, плотность вероятностей для градиента уровня амплитуды $\mathbf{q}(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})$ в области слабых флуктуаций имеет вид гауссова распределения:

$$P(x, \mathbf{q}) = \langle \delta(\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R}) - \mathbf{q}) \rangle = \frac{1}{\sigma_q^2(x)} \exp \left\{ -\frac{\mathbf{q}^2}{\sigma_q^2(x)} \right\}, \quad (3.65)$$

где $\sigma_q^2(x) = \langle \mathbf{q}^2(x, \mathbf{R}) \rangle$ — дисперсия градиента уровня амплитуды, описываемая формулой (1.166).

Следовательно, для удельной средней длины контуров получаем выражение

$$\langle l(x, I) \rangle = 2L_f(x) \langle |q(x, \mathbf{R})| \rangle IP(x, I) = L_f(x) \sqrt{\pi \sigma_q^2(x)} IP(x, I). \quad (3.66)$$

Аналогичным образом, для удельного среднего числа контуров имеем

$$\begin{aligned} \langle n(x, I) \rangle &= \frac{1}{2\pi} L_f^2(x) \langle \kappa(x, \mathbf{R}, I) | \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ &= -\frac{1}{2\pi} L_f^2(x) I \langle \Delta_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R}) \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ &= -\frac{1}{\pi} L_f^2(x) \langle \mathbf{q}^2(x, \mathbf{R}) \rangle I \frac{\partial}{\partial I} IP(x, I) = \frac{L_f^2(x) \sigma_{\mathbf{q}}^2(x)}{\pi \beta_0(x)} \ln \left(I e^{\beta_0(x)/2} \right) IP(x, I). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Отметим, что при значении $I = I_0(x) = e^{-\frac{1}{2}\beta_0(x)}$ выражение (3.67) обращается в нуль. Это означает, что для данного уровня интенсивности среднее удельное число контуров, ограничивающих область $I(x, \mathbf{R}) > I_0$, совпадает со средним удельным числом контуров, для которых $I(x, \mathbf{R}) < I_0$. Графики зависимости $\langle l(x, I) \rangle$ и $\langle n(x, I) \rangle$ от параметра $\beta_0(x)$ приведены на рис. 3.4, а, б.

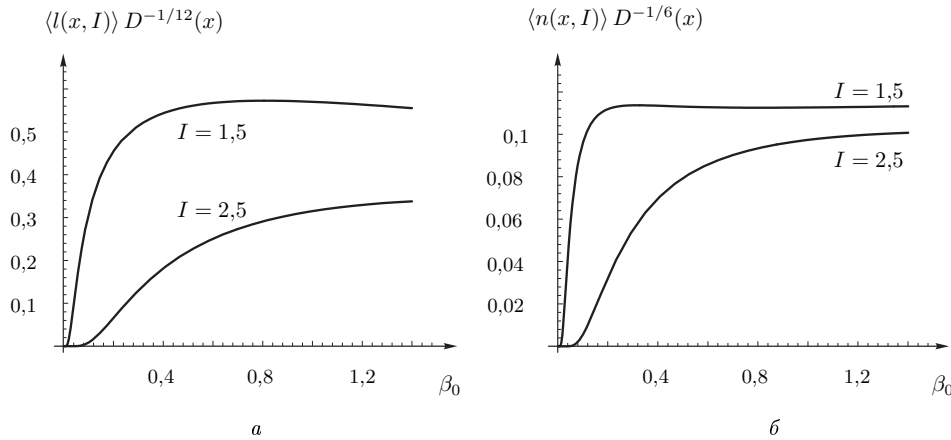


Рис. 3.4. Зависимости средних удельной длины контуров (а) и их числа (б) от параметра $\beta_0(x)$

Зависимость средней удельной длины линий уровня и среднего удельного числа контуров от микромасштаба турбулентности указывает на существование мелкой ряби, накладывающейся на крупномасштабный случайный рельеф. Эта рябь не влияет на перераспределение площадей и мощности, но ведет к большей изрезанности линий уровня и появлению малых контуров.

Как указывалось ранее, полученное описание справедливо при значениях $\beta_0(x) \leq 1$. При дальнейшем увеличении параметра $\beta_0(x)$ метод плавных возмущений уже неприменим и необходимо принимать во внимание нелинейный характер уравнения для комплексной фазы волнового поля. Эта область флуктуаций, называемая *областью сильных фокусировок*, очень трудна для аналитических исследований. При дальнейшем же увеличении параметра $\beta_0(x)$ ($\beta_0^2(x) \geq 10$) статистические характеристики интенсивности выходят на режим насыщения, и эта область изменения параметра $\beta_0(x)$ называется *областью сильных флуктуаций интенсивности*.

3.4.3. Область сильных флуктуаций интенсивности

Из выражения для плотности вероятностей (3.52) следует, что средняя удельная площадь областей, внутри которых $I(x, \mathbf{R}) > I$, равна

$$\langle s(x, I) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta(x) - 1)}} \int_0^\infty \frac{dz}{z} \exp \left\{ -zI - \frac{[\ln z - (\beta(x) - 1)/4]^2}{\beta(x) - 1} \right\}, \quad (3.68)$$

а удельная средняя мощность, сосредоточенная в этих областях, описывается выражением

$$\langle e(x, I) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta(x) - 1)}} \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left(I + \frac{1}{z} \right) \exp \left\{ -zI - \frac{[\ln z - (\beta(x) - 1)/4]^2}{\beta(x) - 1} \right\}. \quad (3.69)$$

На рис. 3.5, а, б приведены графики зависимости выражений (3.68) и (3.69) от параметра $\beta(x)$. Отметим очень медленную зависимость параметра $\beta(x)$ от $\beta_0(x)$. Так, предельному переходу $\beta_0(x) \rightarrow \infty$ соответствует значение параметра $\beta(x) = 1$, а величине $\beta_0(x) = 1$ соответствует значение параметра $\beta(x) = 1,861$.

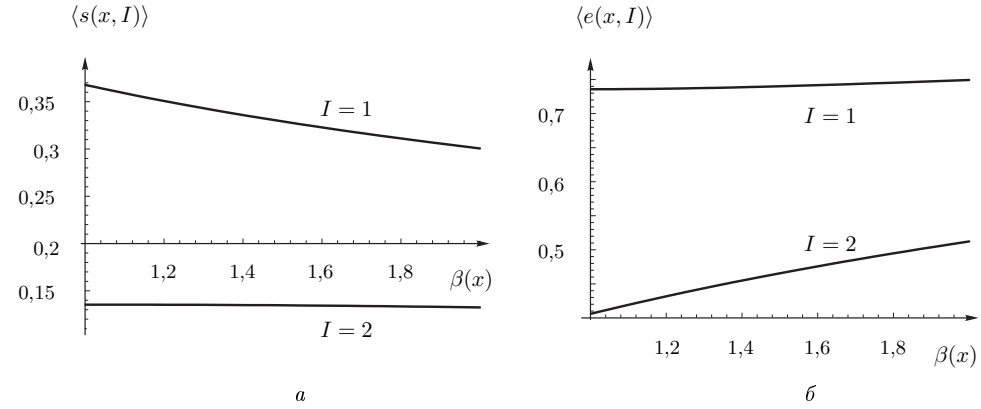


Рис. 3.5. Зависимости средних удельной площади (а) и мощности (б) в области сильных флуктуаций интенсивности от параметра $\beta(x)$

Асимптотические формулы (3.68), (3.69) описывают переход в область насыщенных флуктуаций интенсивности ($\beta(x) \rightarrow 1$). В этой области соответственно имеем

$$P(I) = e^{-I}, \quad \langle s(I) \rangle = e^{-I}, \quad \langle e(I) \rangle = (I + 1) e^{-I}, \quad (3.70)$$

а для удельной средней длины контуров получаем выражение

$$\begin{aligned} \langle l(x, I) \rangle &= L_f(x) \langle | \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) | \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = 2L_f(x) \sqrt{I} \langle | \kappa(x, \mathbf{R}) | \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ &= 2L_f(x) \sqrt{I} \langle | \mathbf{q}(x, \mathbf{R}) | \rangle P(x, I) = L_f(x) \sqrt{2\pi\sigma_{\mathbf{q}}^2(x)} IP(x, I), \end{aligned} \quad (3.71)$$

где дисперсия градиента уровня амплитуды в области насыщенных флуктуаций совпадает с дисперсией, вычисленной по первому приближению метода плавных возмущений. Максимальное значение в (3.71) достигается при $I = 1/\sqrt{2}$.

Для оценки среднего удельного числа контуров в этой области имеем

$$\begin{aligned} \langle n(x, I) \rangle &= \frac{L_f^2(x)}{2\pi} \langle \kappa(x, \mathbf{R}, I) | \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) | \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ &= -\frac{L_f^2(x)}{2\pi} \sqrt{I} \langle \Delta_{\mathbf{R}} A(x, \mathbf{R}) \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = -\frac{L_f^2(x)}{\pi} \langle \kappa^2(x, \mathbf{R}) \rangle \sqrt{I} \frac{\partial}{\partial I} \sqrt{I} P(x, I) = \\ &= -\frac{2L_f^2(x)\sigma_q^2(x)}{\pi} \sqrt{I} \frac{\partial}{\partial I} \sqrt{I} e^{-I} = \frac{2L_f^2(x)\sigma_q^2(x)}{\pi} \left(I - \frac{1}{2} \right) e^{-I}. \quad (3.72) \end{aligned}$$

Максимальное значение в (3.72) достигается при $I = 3/2$, а значение уровня, при котором среднее удельное число контуров, ограничивающих область $I(x, \mathbf{R}) > I_0$, совпадает со средним удельным числом контуров, для которых $I(x, \mathbf{R}) < I_0$, в данном случае равно $I_0 = 1/2$.

Отметим, что формула (3.72) неприменима в узкой окрестности значения $I \sim 0$. Для $I = 0$ должно быть $\langle n(x, 0) \rangle = 0$.

Как видно из выражений (3.71), (3.72) в области насыщенных флуктуаций средняя длина линий уровня и среднее число контуров продолжает расти с ростом параметра $\beta_0(x)$, хотя ограниченные ими средние площади и мощности, заключенные в них, остаются постоянными. Это связано с тем, что определяющую роль в этом режиме играет интерференция парциальных волн, приходящих с разных направлений.

Средняя длина уровня и среднее число контуров зависят, кроме параметра $\beta_0(x)$, также от волнового параметра $D(x)$, т. е. растут с уменьшением микромасштаба неоднородностей. Это связано с тем, что на более крупномасштабный рельеф накладывается мелкая рябь, возникающая вследствие рассеяния на малых неоднородностях.

Таким образом, мы сделали попытку дать качественное объяснение кластерной (каустической) структуры волнового поля плоской световой волны в поперечной плоскости при распространении ее в турбулентной среде и количественно оценить параметры такой структуры. В общем случае задача является многопараметрической. Однако если ограничиться анализом задачи в фиксированной плоскости, то для плоской волны, при постоянном значении волнового параметра, решение задачи описывается единственным параметром — дисперсией интенсивности в области слабых флуктуаций $\beta_0(x)$. Мы проанализировали два крайних асимптотических случая, соответствующие слабым и насыщенным флуктуациям интенсивности. Следует заметить, что, скорее всего, пределы применимости асимптотических формул зависят от величины уровня интенсивности I . Естественно думать, что для меньших значений уровня эти пределы расширяются.

Для анализа же наиболее интересного с точки зрения приложений промежуточного случая, соответствующего области развитой каустической структуры, требуется знание плотности вероятностей интенсивности и ее поперечного градиента для произвольного значения дистанции, пройденной волной. Такой анализ можно произвести либо используя аппроксимирующие выражения для плотности вероятностей для всех значений параметров [48], либо на основе численного моделирования, выполненного, например, в работах [51, 52, 67, 68].

ПРИЛОЖЕНИЯ

ЭЛЕМЕНТЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО

АППАРАТА ДЛЯ ОПИСАНИЯ

КОГЕРЕНТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Приложение А

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Остановимся теперь кратко на математическом аппарате, позволяющем описать когерентные процессы в стохастических динамических системах. Для более полной информации см. монографии [14, 15, 17]. Прежде всего обсудим общие свойства динамических систем, описываемых дифференциальными (обыкновенными или в частных производных) или интегральными уравнениями, решения которых является функционалом случайных параметров.

А.1. Вариационные (функциональные) производные

Напомним общее определение функционала. Мы говорим, что задан некоторый функционал, если установлено правило, по которому каждой функции из некоторой совокупности сопоставлено число. Примеры функционалов:

$$\text{а) } F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} d\tau a(\tau)\varphi(\tau),$$

где $a(t)$ — заданная (фиксированная) функция, а пределы t_1, t_2 могут быть как конечными, так и бесконечными. Это — линейный функционал.

$$\text{б) } F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2)\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2),$$

где $B(t_1, t_2)$ — фиксированная заданная функция. Это — квадратичный функционал.

$$\text{в) } F[\varphi(\tau)] = f(\Phi[\varphi(\tau)]),$$

где $f(x)$ — заданная функция, а величина $\Phi[\varphi(\tau)]$ сама является функционалом.

Оценим разность значений одного и того же функционала (см. рис. А.1), взятого для двух функций $\varphi(\tau)$ и $\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)$, $\delta\varphi(\tau) \neq 0$ при

$$t - \frac{1}{2}\Delta t < \tau < t + \frac{1}{2}\Delta t$$

Вариацией функционала называется линейная по $\delta\varphi(\tau)$ часть разности

$$\delta F[\varphi(\tau)] = \{F[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] - F[\varphi(\tau)]\}.$$

Вариационной (или функциональной) производной называется предел (см., например, [69])

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\int d\tau \delta\varphi(\tau)}. \quad (\text{А.1})$$

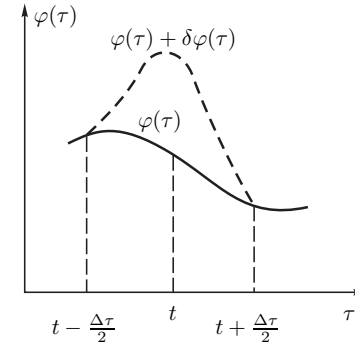


Рис. А.1. К определению вариационной производной

С целью сокращения записи вместо обозначения $\delta F[\varphi(\tau)]/\delta\varphi(t)dt$ будем использовать $\delta F[\varphi(\tau)]/\delta\varphi(t)$.

Отметим, что если в (А.1) взять в качестве функции $\delta\varphi(\tau) = \alpha\delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — обычная дельта-функция Дирака, то формулу (А.1) можно записать в виде, имеющем вид обычной производной:

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d}{d\alpha} F[\varphi(\tau) + \alpha\delta(\tau - t)].$$

Вариационная производная от функционала $F[\varphi(\tau)]$ является снова функционалом от $\varphi(\tau)$, зависящим еще от точки t как от параметра. Следовательно, эта вариационная производная будет иметь производные двойного типа: ее можно дифференцировать обычным образом по параметру t , а можно также составить ее вариационную производную по $\varphi(\tau)$ в точке $\tau = t'$, являющуюся второй вариационной производной от исходного функционала:

$$\frac{\delta^2 F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t')\delta\varphi(t)} = \frac{\delta}{\delta\varphi(t')} \left[\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} \right].$$

Вторая вариационная производная будет уже функционалом от $\varphi(\tau)$, зависящим от пары точек t, t' , и т. д.

Найдем вариационные производные от функционалов **(а)**, **(б)** и **(в)**.

В случае **(а)** имеем

$$\delta F[\varphi(\tau)] = F[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] - F[\varphi(\tau)] = \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} d\tau a(\tau)\delta\varphi(\tau).$$

Если функция $a(t)$ непрерывна на отрезке Δt , то по теореме о среднем

$$\delta F[\varphi(\tau)] = a(t') \int_{\Delta t} d\tau \delta\varphi(\tau),$$

где точка t' принадлежит отрезку $[t - \Delta t/2, t + \Delta t/2]$, так что

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a(t') = a(t). \quad (\text{А.2})$$

Аналогично, в случае **(б)** получаем

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t)} = \int_{t_1}^{t_2} d\tau [B(\tau, t) + B(t, \tau)] \varphi(\tau) \quad (t_1 < t < t_2).$$

Отметим, что здесь функцию $B(\tau_1, \tau_2)$ всегда можно считать симметричной функцией своих аргументов.

В случае **(в)** имеем

$$\begin{aligned} F[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] &= f(\Phi[\varphi(\tau)]) + \frac{\partial}{\partial \Phi}(\Phi[\varphi(\tau)]) \delta\Phi \delta\Phi[\varphi(\tau)] + \dots = \\ &= F[\varphi(\tau)] + \frac{\partial f(\Phi[\varphi(\tau)])}{\partial \Phi} \delta\Phi[\varphi(\tau)] + \dots \end{aligned}$$

и, следовательно, получаем

$$\frac{\delta}{\delta \varphi(t)} f(\Phi[\varphi(\tau)]) = \frac{\partial f(\Phi[\varphi(\tau)])}{\partial \Phi} \frac{\delta}{\delta \varphi}(t) \Phi[\varphi(\tau)]. \quad (\text{A.3})$$

Рассмотрим теперь функционал $\Phi[\varphi(\tau)] = F_1[\varphi(\tau)]F_2[\varphi(\tau)]$. Для него имеем

$$\begin{aligned} \delta\Phi[\varphi(\tau)] &= \{F_1[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)]F_2[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] - F_1[\varphi(\tau)]F_2[\varphi(\tau)]\} = \\ &= F_1[\varphi(\tau)]\delta F_2[\varphi(\tau)] + F_2[\varphi(\tau)]\delta F_1[\varphi(\tau)], \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta \varphi(t)} F_1[\varphi(\tau)]F_2[\varphi(\tau)] = F_1[\varphi(\tau)] \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} F_2[\varphi(\tau)] + F_2[\varphi(\tau)] \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} F_1[\varphi(\tau)]. \quad (\text{A.4})$$

Можно формально определить и выражение для вариационной производной функционала $\varphi(\tau_0)$ по функции $\varphi(t)$ соотношением

$$\frac{\delta \varphi(\tau_0)}{\delta \varphi(t)} = \delta(\tau_0 - t). \quad (\text{A.5})$$

Формулу (A.5) можно обосновать, например, рассматривая линейный функционал вида

$$F[\varphi(\tau)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \varphi(\tau) \exp\left\{-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (\text{A.6})$$

Для него, согласно (A.2), вариационная производная имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta \varphi(t)} F[\varphi(\tau)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(t - \tau_0)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (\text{A.7})$$

Переходя теперь формально к пределу при $\sigma \rightarrow 0$ в выражениях (A.6) и (A.7), мы и получаем формулу (A.5). И при этом

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t)} = \frac{\partial F[\varphi(\tau)]}{\partial \varphi(\tau)} \frac{\delta \varphi(\tau)}{\delta \varphi(t)} = \frac{\partial F[\varphi(\tau)]}{\partial \varphi(\tau)} \delta(\tau - t).$$

С помощью формулы (A.5) очень удобно производить функциональное дифференцирование функционалов, явно зависящих от $\varphi(\tau)$. Так для квадратичного функционала **(б)** имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) \varphi(\tau_1) \varphi(\tau_2) &\stackrel{(\text{A.4})}{=} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) \left[\frac{\delta \varphi(\tau_1)}{\delta \varphi(t)} \varphi(\tau_2) + \varphi(\tau_1) \frac{\delta \varphi(\tau_2)}{\delta \varphi(t)} \right] \stackrel{(\text{A.5})}{=} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d\tau [B(t, \tau) + B(\tau, t)] \varphi(\tau) \quad (t_1 < t < t_2). \end{aligned}$$

В качестве другого примера рассмотрим функционал

$$F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} d\tau L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right).$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} F[\varphi(\tau)] &\stackrel{(\text{A.3})}{=} \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left[\frac{\partial L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)}{\partial \varphi(\tau)} + \frac{\partial L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)}{\partial \dot{\varphi}(\tau)} \frac{d}{d\tau} \right] \frac{\delta \varphi(\tau)}{\delta \varphi(t)} \stackrel{(\text{A.5})}{=} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left[\frac{\partial L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)}{\partial \varphi(\tau)} + \frac{\partial L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)}{\partial \dot{\varphi}(\tau)} \frac{d}{d\tau} \right] \delta(\tau - t) = \\ &= \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}(t)} + \frac{\partial}{\partial \varphi(t)} \right) L\left(t, \varphi(t), \frac{d\varphi(t)}{dt}\right), \end{aligned}$$

где $\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t)$, если точка t принадлежит интервалу (t_1, t_2) .

Подобно тому как функция может быть разложена в ряд Тейлора, функционал $F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)]$ можно разложить в функциональный ряд Тейлора по функции $\eta(\tau)$ в окрестности $\eta(\tau) \sim 0$:

$$\begin{aligned} F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)] &= F[\varphi(\tau)] + \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t)} \eta(t) + \\ &+ \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \frac{\delta^2 F[\varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t_1) \delta \varphi(t_2)} \eta(t_1) \eta(t_2) + \dots \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

Отметим, что операторное выражение типа

$$\begin{aligned} 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} + \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \eta(t_1) \eta(t_2) \frac{\delta^2}{\delta \varphi(t_1) \delta \varphi(t_2)} + \dots = \\ = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} + \frac{1}{2!} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} \right]^2 + \dots \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

можно сокращенно записать в виде оператора

$$\exp\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} \right\}, \quad (\text{A.10})$$

действие которого надо понимать именно в смысле разложения (А.9). С помощью этого оператора формулу (А.8) можно переписать в виде

$$F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)] = \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} \right\} F[\varphi(\tau)], \quad (\text{А.11})$$

что позволяет нам интерпретировать оператор (А.10) как оператор функционального сдвига.

Рассмотрим теперь функционал $F[t; \varphi(\tau)]$, зависящий от параметра t . Этот функционал можно дифференцировать по t , а также найти его вариационную производную по $\varphi(t')$. Легко видеть, что эти операции перестановочны, т. е. имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta F[t; \varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t')} = \frac{\delta}{\delta \varphi(t')} \frac{\partial F[t; \varphi(\tau)]}{\partial t}. \quad (\text{А.12})$$

Если область изменения τ не зависит от t , то равенство (А.12) очевидно. В противном случае, например для функционалов $F[t; \varphi(\tau)]$, у которых $0 \leq \tau \leq t$, равенство (А.12) проверяется путем разложения функционала $F[t; \varphi(\tau)]$ в функциональный ряд Тейлора.

В качестве конкретного примера применения описанного формализма, рассмотрим простейшую задачу, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0. \quad (\text{А.13})$$

А.2. Зависимость решения задачи от коэффициентов уравнения и начальных условий

Для многих прикладных задач, связанных с изучением статистических характеристик их решений, требуется знание зависимости решений этих задач от коэффициентов уравнения (вообще говоря, функциональной) и начальных условий. Эти зависимости обладают некоторыми общими свойствами, из которых два особенно важны для статистического описания. Проиллюстрируем их на примере простейшей задачи — системы обыкновенных дифференциальных уравнений (А.13), которую можно переписать в виде нелинейного интегрального уравнения

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t d\tau \mathbf{U}(\mathbf{r}(\tau), \tau). \quad (\text{А.14})$$

Решение уравнения (А.14) зависит параметрически от начальных условий \mathbf{r}_0 , t_0 и функционально от векторного поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}', \tau)$.

А.2.1. Принцип динамической причинности

Проварьируем уравнение (А.14) по полю $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$. Считая, что начальное условие \mathbf{r}_0 не зависит от поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, с помощью равенства (А.5), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\delta U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r}(\tau) - \mathbf{r}') \delta(\tau - t'),$$

получаем линейное уравнение для вариационной производной:

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')) \theta(t' - t_0) \theta(t - t') + \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(\tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')}, \quad (\text{А.15})$$

где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — дельта функция Дирака, а

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases}$$

— ступенчатая функция Хевисайда. Из уравнения (А.15) следует, что

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = 0, \quad \text{если } t' > t \text{ или } t' < t_0, \quad (\text{А.16})$$

т. е. решение $\mathbf{r}(t)$ динамической задачи (А.14), если рассматривать его как функционал поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$, зависит только от значений $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$ при $t_0 < t' < t$. Следовательно, функция $\mathbf{r}(t)$ не меняется, если поле $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$ изменяется вне интервала (t_0, t') , т. е. для $t' < t_0$ или $t' > t$. Условие (А.16) будем называть *условием динамической причинности*.

Принимая это условие во внимание, уравнение (А.15) можно переписать в виде (при $t_0 < t' < t$)

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')) + \int_{t'}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(\tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')}, \quad (\text{А.17})$$

и, следовательно, переходя к пределу $t \rightarrow t' + 0$, получаем равенство

$$\left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t=t'+0} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')), \quad (\text{А.18})$$

или же в пределе $t' \rightarrow t - 0$

$$\left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t'=t-0} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \quad (\text{А.19})$$

Интегральное уравнение (А.17) для вариационной производной, очевидно, эквивалентно линейному дифференциальному уравнению с начальным условием

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right) = \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(t), t)}{\partial r_k} \left(\frac{\delta r_k(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right), \quad (\text{А.20})$$

$$\left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t=t'} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')).$$

Условие динамической причинности является общим свойством задач, описываемых дифференциальными уравнениями с начальными условиями.

А.2.2. Зависимость решения задачи от начального условия

Обозначим теперь зависимость решения уравнения (А.14) $\mathbf{r}(t)$ от параметров $\{\mathbf{r}_0, t_0\}$ вертикальной чертой:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0), \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0|\mathbf{r}_0, t_0).$$

Продифференцируем уравнение (А.14) по параметрам r_{0k} и t_0 . В результате для якобиевой матрицы $\frac{\partial}{\partial r_{0k}} r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)$ и величины $\frac{\partial}{\partial t_0} r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)$ получаем линейные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0k}} &= \delta_{ik} + \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_j} \frac{\partial r_j(\tau|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0k}}, \\ \frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0} &= -U_i(\mathbf{r}_0, t_0) + \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_j} \frac{\partial r_j(\tau|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Умножая теперь первое из этих уравнений на $U_k(\mathbf{r}_0, t_0)$, суммируя по индексу k и складывая его со вторым уравнением, получаем для векторной функции

$$F_i(t|\mathbf{r}_0, t_0) = \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)$$

линейное однородное уравнение

$$F_i(t|\mathbf{r}_0, t_0) = \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} F_k(\tau|\mathbf{r}_0, t_0). \quad (\text{A.22})$$

Дифференцируя это уравнение по времени, перейдем к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} F_i(t|\mathbf{r}_0, t_0) = \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(t), t)}{\partial r_k} F_k(t|\mathbf{r}_0, t_0)$$

с начальным условием при $t = t_0 - F_i(t_0|\mathbf{r}_0, t_0) = 0$, вытекающему из уравнения (А.22), и, следовательно, $F_i(t|\mathbf{r}_0, t_0) \equiv 0$. Таким образом, получаем равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0) = 0, \quad (\text{A.23})$$

которое можно рассматривать как линейное уравнение в частных производных по переменным \mathbf{r}_0, t_0 с начальным условием при $t_0 = t$

$$\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{r}_0. \quad (\text{A.24})$$

Теперь переменная t входит в задачу (А.23), (А.24) как параметр.

Уравнение (А.23) решается в направлении времени, обратном по отношению к задаче (А.13), и может быть названо *обратным уравнением*.

Уравнение (А.23) с начальным условием (А.24) можно переписать в виде интегрального уравнения

$$\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t d\tau \left(\mathbf{U}(\mathbf{r}_0, \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, \tau). \quad (\text{A.25})$$

Варьируя теперь уравнение (А.25) по функции $U_j(\mathbf{r}', t')$, получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\delta r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} &= \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}') \theta(t' - t_0) \theta(t - t') \frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0, t')}{\partial r_{j0}} + \\ &+ \int_{t_0}^t d\tau \left(\mathbf{U}(\mathbf{r}_0, \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) \frac{\delta r_i(t|\mathbf{r}_0, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')}, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

откуда следует, что

$$\frac{\delta r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = 0, \quad \text{если } t' > t \text{ или } t' < t_0,$$

т. е. функция $\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0)$ также обладает свойством динамической причинности по параметру t_0 (А.16), что естественно, и уравнение (А.26) можно переписать в виде (при $t_0 < t' < t$)

$$\frac{\delta r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}') \frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0, t')}{\partial r_{j0}} + \int_{t_0}^{t'} d\tau \left(\mathbf{U}(\mathbf{r}_0, \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) \frac{\delta r_i(t|\mathbf{r}_0, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')}. \quad (\text{A.27})$$

Полагая теперь $t' \rightarrow t_0 + 0$, получаем равенство

$$\left. \frac{\delta r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t'=t_0+0} = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0j}}. \quad (\text{A.28})$$

А.3. Уравнение Лиувилля

Современный аппарат теории случайных процессов позволяет построить замкнутое описание динамических систем, если эти системы удовлетворяют условию динамической причинности и описываются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных или интегральными уравнениями определенного типа. Переход от описания исходной, вообще говоря нелинейной, системы к эквивалентному описанию с помощью линейных уравнений в частных производных можно осуществить с помощью индикаторных функций. Однако размерность пространства переменных при этом увеличивается. Рассмотрим такой переход на примере уравнения (А.13).

А.3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пусть стохастическая задача описывается системой уравнений (А.13):

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0. \quad (\text{A.29})$$

Введем скалярную функцию в пространстве (\mathbf{r}, t) :

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}), \quad (\text{A.30})$$

обычно называемую *индикаторной функцией*, сосредоточенную на сечении случайного процесса $\mathbf{r}(t)$ заданной плоскостью $\mathbf{r}(t) = \text{const}$.

Дифференцируя (А.30) по времени t с помощью уравнения (А.29), получаем равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) = -\mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} [\mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t) \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r})]. \end{aligned}$$

Используя далее «выкалывающее» свойство дельта-функции

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t) \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}),$$

получаем линейное уравнение в частных производных

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \varphi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \varphi(\mathbf{r}, t_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (\text{А.31})$$

которое эквивалентно исходной системе и называется *уравнением Лиувилля*. Это уравнение соответствует уравнению непрерывности для движения фазовых точек в фазовом пространстве $\{\mathbf{r}, t\}$.

Замечание А.1. *Особенность работы с дельта-функцией*

Из изложенного метода вывода уравнения Лиувилля очевидно, что необходимо видеть различие между функцией $\mathbf{r}(t)$ и параметром \mathbf{r} . В связи с этим для правильной работы с дельта-функцией необходимо выписывать аргумент функции $\mathbf{r}(t)$ во всех промежуточных выкладках (ср. запись уравнений (А.29) и (А.13). Пренебрежение этим правилом приводит, как правило, к ошибке. \blacklozenge

Переход от системы (А.29) к уравнению Лиувилля (А.31) сопровождается расширением фазового пространства (\mathbf{r}, t) , которое, однако, имеет конечную размерность.

Уравнение (А.31) можно переписать в виде линейного интегрального уравнения:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \{ \mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau) \varphi(\mathbf{r}, \tau) \},$$

вариация которого по функции $U_i(\mathbf{r}', t')$ с использованием формулы (А.5) приводит к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} &= - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial r_i} \left\{ \frac{\delta U_i(\mathbf{r}, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \varphi(\mathbf{r}, \tau) \right\} - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau) \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right\} = \\ &= -\theta(t-t')\theta(t'-t_0) \frac{\partial}{\partial r_j} \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}, t') \} - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau) \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right\}, \quad (\text{А.32}) \end{aligned}$$

где, как и ранее, $\theta(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Следовательно,

$$\frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \sim \theta(t-t')\theta(t'-t_0),$$

и вариационная производная удовлетворяет условию

$$\frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = 0, \quad \text{если } t' < t_0 \text{ или } t' > t,$$

которое выражает условие динамической причинности для уравнения Лиувилля (А.31).

При условии $t_0 < t' < t$ уравнение (А.32) можно записать в виде

$$\frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = -\frac{\partial}{\partial r_j} \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}, t') \} - \int_{t'}^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau) \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right\}, \quad (\text{А.33})$$

откуда получаем равенство

$$\left. \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_i(\mathbf{r}', t')} \right|_{t=t'+0} = -\frac{\partial}{\partial r_i} \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}, t') \}. \quad (\text{А.34})$$

Отметим, что равенство (А.34) можно получить и непосредственно из выражения (А.18). В самом деле, вариационная производная $\delta \varphi(\mathbf{r}, t) / \delta U_j(\mathbf{r}', t')$, в силу определения функции $\varphi(\mathbf{r}, t)$,

$$\frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = \frac{\delta}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial r_i} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')}, \quad (\text{А.35})$$

и, следовательно, при $t = t' + 0$ имеем равенство

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right|_{t=t'+0} &= -\frac{\partial}{\partial r_i} \delta(\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}) \left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right|_{t=t'+0} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial r_j} \{ \delta(\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \} = -\frac{\partial}{\partial r_j} \{ \varphi(\mathbf{r}, t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \}. \quad (\text{А.36}) \end{aligned}$$

Решение уравнения (А.29) и, следовательно, функция (А.30) зависят от начальных условий \mathbf{r}_0, t_0 . Так, функция $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0)$, как функция переменных \mathbf{r}_0, t_0 , описывается линейным уравнением в частных производных первого порядка (А.23). Для таких уравнений также можно перейти к уравнению для индикаторной функции (см. следующий подраздел) $\varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)$, которое в данном случае также имеет вид линейного уравнения по переменным \mathbf{r}_0, t_0 :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) \varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0) = 0, \quad \varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (\text{А.37})$$

Уравнение (А.37) может быть названо *обратным уравнением Лиувилля*. И при этом для вариационной производной индикаторной функции $\varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)$

$$\frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = \frac{\delta}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0) - \mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial r_i} \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0) - \mathbf{r}) \frac{\delta r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')},$$

как следствие условия динамической причинности, согласно равенству (А.28) получаем выражение

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right|_{t'=t_0+0} &= -\frac{\partial}{\partial r_i} \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0) - \mathbf{r}) \left. \frac{\delta r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right|_{t'=t_0+0} = \\ &= -\delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}') \frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_0_j} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_i}. \quad (\text{А.38}) \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0j}} = - \frac{\partial r_i(t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0j}} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_i},$$

и, следовательно, равенство (А.38) принимает окончательный замкнутый вид

$$\left. \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right|_{t'=t_0} = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0j}}. \quad (\text{А.39})$$

А.3.2. Обратное уравнение Лиувилля

Рассмотрим теперь вывод обратного уравнения Лиувилля для индикаторной функции

$$\varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0, t_0) - \mathbf{r})$$

как функции параметров (\mathbf{r}_0, t_0) . Продифференцируем функцию $\varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$ по t_0 и r_{0j} . В результате с учетом уравнения (А.23) получаем выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0} &= - \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_i} \frac{\partial r_i(t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_i} \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial r_i(t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial \mathbf{r}_0}, \\ \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial \mathbf{r}_0} &= - \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_i} \frac{\partial r_i(t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial \mathbf{r}_0}. \end{aligned} \quad (\text{А.40})$$

Умножая теперь второе уравнение в (А.40) скалярно на $\mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0)$ и складывая с первым, приходим к замкнутому уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = 0, \quad \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (\text{А.41})$$

которое и является обратным уравнением Лиувилля, приведенным ранее без вывода.

Перепишем уравнение (А.41) в виде линейного интегрального уравнения:

$$\varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \int_{t_0}^t d\tau \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, \tau). \quad (\text{А.42})$$

Следовательно, вариационная производная $\delta \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) / \delta U_j(\mathbf{r}', t')$ описывается линейным интегральным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} &= \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}') \theta(t' - t_0) \theta(t - t') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t')}{\partial r_{0j}} + \\ &+ \int_{t_0}^t d\tau \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \sim \theta(t' - t_0) \theta(t - t'),$$

т. е. выполняется условие динамической причинности. При условии $t_0 < t' < t$ это уравнение упрощается и принимает вид

$$\frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t')}{\partial r_{0j}} + \int_{t_0}^{t'} d\tau \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')},$$

и, следовательно, в пределе $t' = t_0 + 0$ приходим к равенству (А.39), полученному ранее другим путем.

Приложение Б

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ

Б.1. Общие замечания

Если мы имеем случайную функцию $z(t)$ (случайный процесс), то все ее статистические характеристики в фиксированный момент времени t описываются одновременной плотностью вероятностей

$$P(z, t) = \langle \delta(z(t) - z) \rangle, \quad (\text{Б.1})$$

параметрически зависящей от времени, с помощью равенства

$$\langle f(z(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) P(z, t).$$

В формуле Б.1 через скобки $\langle \dots \rangle$ обозначена операция усреднения по ансамблю случайного процесса $z(t)$.

Интегральная функция распределения для этого процесса, определяющая вероятность того, что в момент времени t процесс $z(t) < Z$, вычисляется по формуле

$$F(t, Z) = P(z(t) < Z) = \int_{-\infty}^Z dz P(z, t),$$

и, следовательно,

$$F(t, Z) = \langle \theta(Z - z(t)) \rangle, \quad F(t, \infty) = 1, \quad (\text{Б.2})$$

где $\theta(z)$ — функция Хевисайда, равная нулю при $z < 0$ и единице при $z > 0$.

Отметим, что сингулярная дельта-функция Дирака, стоящая под знаком усреднения в (Б.1):

$$\varphi(z, t) = \delta(z(t) - z),$$

называется *индикаторной функцией*.

Для полного статистического описания случайной функции $z(t)$ достаточно знать ее характеристический функционал

$$\Phi[v(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau v(\tau) z(\tau) \right\} \right\rangle,$$

где функция $v(t)$ — произвольная (достаточно «хорошая») функция. Зная функционал $\Phi[v(\tau)]$, можно найти такие характеристики случайной функции $z(t)$, как ее среднее значение $\langle z(t) \rangle$, корреляционную функцию $\langle z(t_1) z(t_2) \rangle$, n -точечную моментную функцию $\langle z(t_1) \dots z(t_n) \rangle$ и т. д.

В самом деле, раскладывая характеристический функционал $\Phi[v(\tau)]$ в функциональный ряд Тейлора, получаем для него выражение через моментные функции процесса $z(t)$:

$$\Phi[v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n M_n(t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n),$$

$$M_n(t_1, \dots, t_n) = \langle z(t_1) \dots z(t_n) \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(t_1) \dots \delta v(t_n)} \Phi[v(\tau)] \Big|_{v=0}.$$

Таким образом, моментные функции случайного процесса $z(t)$ определяются через вариационные производные характеристического функционала. Вариационные производные и правила работы с ними определены в Приложении А.

Представим теперь $\Phi[v(\tau)]$ в виде $\Phi[v(\tau)] = \exp\{\Theta[v(\tau)]\}$. Функционал $\Theta[v(\tau)]$ также можно разложить в функциональный ряд Тейлора:

$$\Theta[v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_n(t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n), \quad (\text{Б.3})$$

где функция

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(t_1) \dots \delta v(t_n)} \Theta[v(\tau)] \Big|_{v=0}$$

называется *кумулянтной функцией* n -го порядка случайного процесса $z(t)$.

Аналогичным образом определяется и характеристический функционал случайного скалярного поля $f(\mathbf{x}, t)$:

$$\Phi[v(\mathbf{x}', \tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} dt v(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) \right\} \right\rangle = \exp \{ \Theta[v(\mathbf{x}', \tau)] \},$$

а также моментные и кумулянтные функции n -го порядка:

$$M_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \delta v(\mathbf{x}_n, t_n)} \Phi[v(\mathbf{x}', \tau)] \Big|_{v=0},$$

$$K_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \delta v(\mathbf{x}_n, t_n)} \Theta[v(\mathbf{x}', \tau)] \Big|_{v=0}.$$

Если $f(\mathbf{x}, t)$ — векторное случайное поле, то следует считать $v(\mathbf{x}, t)$ векторной функцией.

Б.2. Расщепление корреляций для гауссовых случайных процессов и полей (формула Фурутцу–Новикова)

Ограничимся для простоты одномерными случайными процессами (обобщения на многомерные случаи не вызывают затруднений). При статистическом анализе динамических систем необходимо уметь вычислять корреляцию $\langle z(t)R[z(\tau)] \rangle$, где $R[z(\tau)]$ — функционал, который может зависеть от процесса $z(t)$ как явным, так и неявным образом.

Для вычисления этого среднего значения рассмотрим вспомогательный функционал $R[z(\tau) + \eta(\tau)]$, где $\eta(t)$ — произвольная детерминированная функция, и вычислим величину $\langle z(t)R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle$. Интересующую нас корреляцию получим, положив в окончательном результате $\eta(\tau) = 0$.

Функционал $R[z(\tau) + \eta(\tau)]$ можно разложить в функциональный ряд Тейлора по $z(\tau)$ и представить его в виде

$$R[z(\tau) + \eta(\tau)] = e^{-\int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau)}} R[\eta(\tau)],$$

вводя оператор функционального сдвига. Тогда для корреляции $\langle z(t)R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle$ получаем выражение:

$$\langle z(t)R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \Omega \left[t; \frac{\delta}{i\delta \eta(\tau)} \right] \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle,$$

где функционал $\Omega[t; v(\tau)]$ определяется в виде

$$\Omega[t; v(\tau)] = \frac{\left\langle z(t) \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle}{\left\langle \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle} = \frac{1}{\Phi[v(\tau)]} \frac{\delta}{i\delta v(t)} \Phi[v(\tau)] \equiv \frac{\delta}{i\delta v(t)} \Theta[v(\tau)], \quad (\text{Б.4})$$

где $\Theta[v(\tau)] = \ln \Phi[v(\tau)]$, а $\Phi[v(\tau)]$ — характеристический функционал случайного процесса $z(t)$.

Учитывая, что вариационное дифференцирование по $\eta(\tau)$ можно заменить дифференцированием по $z(\tau)$ и положить затем $\eta(\tau) = 0$, получаем для интересующей нас корреляции окончательное выражение

$$\langle z(t)R[z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[t; \frac{\delta}{i\delta z(\tau)} \right] R[z(\tau)] \right\rangle. \quad (\text{Б.5})$$

Если воспользоваться разложением функционала $\Theta[v(\tau)]$ в функциональный ряд Тейлора (Б.18), то функционал

$$\Omega[t; v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_{n+1}(t, t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n)$$

и, следовательно, выражение (Б.5) принимает вид

$$\langle z(t)R[z(\tau)] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_{n+1}(t, t_1, \dots, t_n) \left\langle \frac{\delta^n R[z(\tau)]}{\delta z(t_1) \dots \delta z(t_n)} \right\rangle. \quad (\text{Б.6})$$

В физических задачах, удовлетворяющих условию динамической причинности по времени t , статистические характеристики решения в момент времени t определяются статистическими характеристиками случайного процесса $z(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq t$, которые полностью описываются характеристическим функционалом

$$\Phi[t; v(\tau)] = e^{\Theta[t; v(\tau)]} = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle.$$

В этом случае все полученные выше формулы остаются в силе для вычисления статистических средних $\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle$ при $t' < t$, $\tau \leq t$, т. е. имеет место равенство

$$\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[t', t; \frac{\delta}{i\delta z(\tau)} \right] R[t; z(\tau)] \right\rangle \quad (0 < t' < t), \quad (\text{Б.7})$$

где

$$\begin{aligned} \Omega[t', t; v(\tau)] &= \frac{\delta}{i\delta v(t')} \Theta[t; v(\tau)] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_n K_{n+1}(t', t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n). \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

В случае, когда $t' = t - 0$, формула в (Б.7) по-прежнему имеет место, т. е.

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[t, t; \frac{\delta}{i\delta z(\tau)} \right] R[t; z(\tau)] \right\rangle. \quad (\text{Б.9})$$

Однако разложение (Б.8) не всегда дает правильный предельный переход при $t' \rightarrow t - 0$ (т. е. операции предельного перехода и разложения в функциональный ряд Тейлора могут быть и не перестановочны). В этом случае

$$\Omega[t, t; v(\tau)] = \frac{1}{\Phi[t; v(\tau)]} \frac{d}{idv(t)} \Phi[t; v(\tau)] = \frac{d}{idv(t)} \Theta[t; v(\tau)] \quad (\text{Б.10})$$

и статистические средние в (Б.7) и (Б.9) могут быть разрывны при $t' = t - 0$.

Для гауссового случайного процесса $z(t)$ все формулы, полученные выше, существенно упрощаются. В этом случае логарифм характеристического функционала $\Phi[v(\tau)]$ имеет вид (среднее значение процесса $z(t)$ считаем равным нулю) (Б.7) и, следовательно, функционал $\Omega[t; v(\tau)]$ (Б.4) принимает вид линейного функционала

$$\Omega[t; v(\tau)] = i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(t, \tau_1) v(\tau_1), \quad (\text{Б.11})$$

а формула (Б.5) принимает вид

$$\langle z(t)R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(t, \tau_1) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau_1)} \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle. \quad (\text{Б.12})$$

Заменяя теперь дифференцирование по $\eta(\tau)$ на дифференцирование по $z(\tau)$ и полагая $\eta(\tau) = 0$, получаем равенство

$$\langle z(t)R[z(\tau)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(t, \tau_1) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(\tau_1)} R[z(\tau)] \right\rangle, \quad (\text{Б.13})$$

которое в физической литературе принято называть *формулой Фурутцу–Новикова* по имени авторов, впервые ее получивших [25, 54].

Легко написать и многомерное обобщение формулы (Б.13), которое можно записать в виде

$$\langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}) R[\mathbf{z}] \rangle = \int d\mathbf{r}' \langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}) z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}') \rangle \left\langle \frac{\delta R[\mathbf{z}]}{\delta z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}')} \right\rangle, \quad (\text{Б.14})$$

где через \mathbf{r} обозначены все непрерывные аргументы случайного поля векторного поля $\mathbf{z}(\mathbf{r})$, а через i_1, \dots, i_n — индексные аргументы. По повторяющимся индексным аргументам в правой части (Б.14) предполагается суммирование.

Если случайный процесс $z(\tau)$ определен только на отрезке времени $[0, t]$, то функционал $\Theta[t, v(\tau)]$ будет определяться выражением

$$\Theta[t, v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2), \quad (\text{Б.15})$$

а функционалы $\Omega[t', t; v(\tau)]$, $\Omega[t, t; v(\tau)]$ будут линейными функционалами:

$$\begin{aligned} \Omega[t', t; v(\tau)] &= \frac{\delta}{i\delta v(t')} \Theta[t, v(\tau)] = i \int_0^t d\tau B(t', \tau) v(\tau), \\ \Omega[t, t; v(\tau)] &= \frac{d}{iv(t)dt} \Theta[t, v(\tau)] = i \int_0^t d\tau B(t, \tau) v(\tau), \end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

и, следовательно, формулы (Б.7), (Б.9) будут иметь вид

$$\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle = \int_0^t d\tau B(t', \tau) \left\langle \frac{\delta R[z(\tau)]}{\delta z(\tau)} \right\rangle \quad (t' \leq t), \quad (\text{Б.17})$$

совпадающий с равенством (Б.13) при выполнении условия

$$\frac{\delta R[t; z(\tau)]}{\delta z(\tau)} = 0 \quad \text{при} \quad \tau < 0, \quad \tau > t. \quad (\text{Б.18})$$

Соответствующее обобщение многомерной формулы (Б.14) на случай причинного во времени функционала $R[t; \mathbf{z}(\tilde{\mathbf{r}}, \tau)]$ имеет вид

$$\langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}, t) R[t; \mathbf{z}(\tilde{\mathbf{r}}, \tau)] \rangle = \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' \langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}, t) z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}', t') \rangle \left\langle \frac{\delta R[t; \mathbf{z}(\tilde{\mathbf{r}}, \tau)]}{\delta z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}', t')} \right\rangle. \quad (\text{Б.19})$$

Отметим, что для гауссова случайного процесса $z(t)$ также имеет место равенство [14, 15, 17]:

$$\left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} R[t; z(\tau)] \right\rangle = \Phi[t; v(\tau)] \left\langle R \left[t; z(\tau) + i \int_0^t d\tau_1 B(\tau, \tau_1) v(\tau_1) \right] \right\rangle, \quad (\text{Б.20})$$

где $\Phi[t; v(\tau)]$ — характеристический функционал гауссова случайного процесса $z(t)$.

Приложение В

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТОПОГРАФИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ

Полное описание случайных процессов и полей, содержится в их характеристических функционалах. Однако даже знание одноточечных плотностей вероятностей случайных процессов и полей дает определенную информацию об эволюции случайных процессов во всем интервале времен и структуре случайных полей в пространстве. Эту информацию можно получить на основе идей статистической топографии случайных процессов и полей.

В.1. Случайные процессы

Прежде всего обсудим понятие типичной реализации случайного процесса $z(t)$, которое характеризует основные особенности поведения отдельной реализации процесса в целом на всем интервале времен.

В.1.1. Типичная реализация случайного процесса

Назовем кривой типичной реализации случайного процесса $z(t)$ детерминированную кривую $z^*(t)$, которая является *медианой интегральной функции распределения* (В.2) и определяется как решение алгебраического уравнения

$$F(t, z^*(t)) = \int_{-\infty}^{z^*(t)} dz P(z, t) = \frac{1}{2}. \quad (\text{В.1})$$

Основанием для этого является свойство медианы, заключающееся в том, что для любого интервала времени (t_1, t_2) случайный процесс $z(t)$ как-бы «обвивает» кривую $z^*(t)$ таким образом, что среднее время, в течение которого выполняется неравенство $z(t) > z^*(t)$, совпадает со средним временем в течение которого выполняется обратное

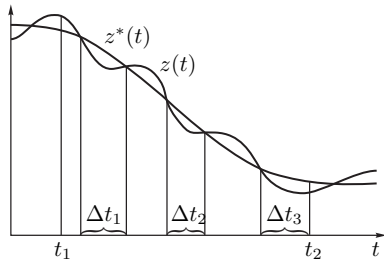


Рис. В.1. К определению кривой типичной реализации случайного процесса

неравенство $z(t) < z^*(t)$ (рис. В.1), т. е.

$$\langle T_{z(t) > z^*(t)} \rangle = \langle T_{z(t) < z^*(t)} \rangle = \frac{1}{2}(t_2 - t_1). \quad (\text{В.2})$$

В самом деле, интегрируя равенство (В.1) по времени в интервале (t_1, t_2) , получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt F(t, z^*(t)) = \frac{1}{2}(t_2 - t_1). \quad (\text{В.3})$$

С другой стороны, в силу определения интегральной функции распределения (В.2), интеграл в левой части (В.3) равен

$$\int_{t_1}^{t_2} dt F(t, z^*(t)) = \langle T(t_1, t_2) \rangle, \quad (\text{В.4})$$

где $T(t_1, t_2) = \sum_1^N \Delta t_k$ — общее время из интервала (t_1, t_2) , в течение которого реализация процесса $z(t)$ лежит выше кривой $z^*(t)$. Сопоставляя (В.3) с (В.4), и получаем равенство (В.2).

Кривая $z^*(t)$ может, естественно, существенно отличаться от любой конкретной реализации процесса $z(t)$ и не описывает величину возможных выбросов. Таким образом, кривая типичной реализации $z^*(t)$ случайного процесса $z(t)$, полученная с помощью одновременной плотности вероятностей, определена тем не менее на всем интервале времени $t \in (0, \infty)$.

Для конкретных типов случайных процессов можно получить дополнительную информацию, характеризующую уже выбросы относительно этой кривой.

В.1.2. Статистика числа точек пересечения процесса с прямой

Одноточечная плотность вероятностей (Б.1) для случайного процесса $z(t)$ является результатом усреднения сингулярной индикаторной функции по ансамблю реализаций случайного процесса $z(t)$. Эта функция сосредоточена на точках пересечения процесса $z(t)$ прямой $z = \text{const}$, определяемых как корни алгебраического уравнения

$$z(t_n) = z \quad (n = 0, 1, \dots, \infty),$$

и, следовательно, ее можно переписать в виде

$$\varphi(z, t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{|p(t_k)|} \delta(t - t_k),$$

где $p(t) = \frac{d}{dt} z(t)$.

Число таких точек само является случайной величиной, которая, очевидно, описывается формулой

$$n(t, z) = \int_{-\infty}^t d\tau |p(\tau)| \varphi(\tau; z). \quad (\text{В.5})$$

Следовательно, среднее значение числа точек пересечения процесса $z(t)$ прямой $z = \text{const}$ описывается корреляцией временной производной процесса $z(t)$ с ее индикаторной функцией или совместной одновременной плотностью вероятностей процесса $z(t)$ и ее временной производной $\frac{d}{dt} z(t)$.

Аналогичным образом легко определить и некоторые элементы статистики, связанной с точками максимума (минимума) и т. п. случайного процесса $z(t)$.

Рассмотрим теперь несколько примеров случайных процессов.

В.1.3. Простейшие примеры случайных процессов

Гауссов случайный процесс.

Прежде всего обсудим случай непрерывного процесса — гауссова случайного процесса $z(t)$ со средним значением, равным нулю ($\langle z(t) \rangle = 0$), и корреляционной функцией $B(t_1, t_2) = \langle z(t_1)z(t_2) \rangle$. Его характеристический функционал имеет вид

$$\Phi[v(\tau)] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 B(t_1, t_2) v(t_1) v(t_2) \right\}. \quad (\text{B.6})$$

Для этого процесса единственной отличной от нуля кумулянтной функцией является его корреляционная функция $K_2(t_1, t_2) = B(t_1, t_2)$, и, следовательно,

$$\Theta[v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 B(t_1, t_2) v(t_1) v(t_2). \quad (\text{B.7})$$

Отметим, что для гауссова процесса со средним значением, равным нулю, все моментные функции нечетного порядка равны нулю, а моментные функции четного порядка определяются суммой, в которой процессы $z(t_i)z(t_k)$ усредняются попарно всевозможными способами.

Если функция $v(\tau)$ в формуле (B.7) отлична от нуля только в интервале $0 < \tau < t$, то характеристический функционал

$$\Phi[t; v(\tau)] = \left\langle \exp \left(i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right) \right\rangle = \exp \left\{ -\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2) \right\} \quad (\text{B.8})$$

зависит также и от времени t , и в этом случае функционал $\Phi[t; v(\tau)]$, как функция параметра t , удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = -v(t) \int_0^t dt_1 B(t, t_1) v(t_1) \Phi[t; v(\tau)], \quad \Phi[0; v(\tau)] = 1. \quad (\text{B.9})$$

Чтобы получить одновременную характеристическую функцию в момент времени t для гауссова случайного процесса, положим в (B.6) функцию $v(\tau)$ в виде

$$v(\tau) = v\delta(\tau - t).$$

В результате получаем

$$\Phi(v, t) = \left\langle e^{ivz(t)} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz P(z, t) e^{ivz} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2(t) v^2 \right\}, \quad (\text{B.10})$$

где $\sigma^2(t) = B(t, t)$. Одновременную плотность вероятностей гауссова случайного процесса получим, выполняя обратное преобразование Фурье от (B.10):

$$P(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \Phi(v, t) e^{-ivz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma^2(t)} \right\}. \quad (\text{B.11})$$

Отметим, что для стационарного во времени случайного процесса $z(t)$ величина дисперсии $\sigma^2(t)$ не зависит от времени t , т. е. $\sigma^2(t) = \sigma^2 = \text{const}$.

Функция $P(z, t)$ симметрична по z относительно точки $z = 0$, т. е.

$$P(z, t) = P(-z, t). \quad (\text{B.12})$$

При наличии среднего значения для гауссова случайного процесса $z(t) - \langle z(t) \rangle$ вместо (B.11) получаем выражение

$$P(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{(z - \langle z(t) \rangle)^2}{2\sigma^2(t)} \right\}, \quad (\text{B.13})$$

и кривая типичной реализации (B.1) для гауссова случайного процесса $z(t)$, в силу свойства симметрии (B.12), очевидно, совпадает со средним значением процесса $z(t)$, т. е.

$$z^*(t) = \langle z(t) \rangle, \quad (\text{B.14})$$

так как равенство (B.1)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_{-\infty}^{z^*(t)} dz \exp \left\{ -\frac{(z - \langle z(t) \rangle)^2}{2\sigma^2(t)} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_{-\infty}^{z^*(t) - \langle z(t) \rangle} dz \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma^2(t)} \right\} = \frac{1}{2}$$

выполняется при условии (B.14).

Логарифмически нормальный случайный процесс.

Отметим, что для так называемого *логарифмически нормального* (логнормального) случайного процесса $y(t)$, логарифм которого является гауссовым случайным процессом

$$y(t) = e^{z(t)},$$

одновременная плотность вероятностей $P(y, t)$ имеет вид

$$P(y, t) = \frac{1}{y} P(z = \ln y, t) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [e^{-\langle z(t) \rangle} y]}{2\sigma^2(t)} \right\},$$

и, следовательно, интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{y^*(t)} dy P(y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_{-\infty}^{y^*(t)} \frac{dy}{y} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [e^{-\langle z(t) \rangle} y]}{2\sigma^2(t)} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_{-\infty}^{\ln [e^{-\langle z(t) \rangle} y^*(t)]} dz \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma^2(t)} \right\} \end{aligned}$$

равен 1/2 при условии, что $e^{-\langle z(t) \rangle} y^*(t) = 1$, т. е. кривая типичной реализации для логнормального случайного процесса $y(t)$ определяется равенством

$$y^*(t) = e^{\langle z(t) \rangle} = e^{\ln y(t)}. \quad (\text{B.15})$$

Отметим также, что если мы знаем поведение моментных функций случайного процесса $y(t)$ во времени, т. е. функции $\langle y^n(t) \rangle$ ($n = 1, 2, \dots$), то тем самым мы знаем и статистические характеристики случайного процесса $z(t) = \ln y(t)$. В самом деле,

$$\langle y^n(t) \rangle = \langle e^{n \ln y(t)} \rangle = \exp \left\{ n \langle \ln y(t) \rangle + \frac{n^2}{2} \sigma_{\ln y}^2(t) \right\},$$

и, следовательно,

$$\langle \ln y(t) \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \langle y^n(t) \rangle, \quad \sigma_{\ln y}^2(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} \ln \langle y^n(t) \rangle. \quad (\text{B.16})$$

В.2. Случайные поля

В статистической топографии случайных полей основным объектом изучения, как и в обычной топографии горных массивов, является система контуров — линий уровня (в двумерном случае) или поверхностей (в трехмерном случае) постоянных значений, определяемых равенством $f(\mathbf{r}, t) = f = \text{const}$.

Для анализа системы контуров (для простоты в данном разделе, будем говорить о двумерном случае ($\mathbf{r} = \mathbf{R}$)) удобно ввести сингулярную индикаторную функцию $\varphi(t, \mathbf{R}, f) = \delta(f(\mathbf{R}, t) - f)$, сосредоточенную на них.

Через эту функцию выражаются, например, такие величины как общая площадь областей, ограниченных линиями уровня, где $f(\mathbf{R}, t) > f$

$$S(t, f) = \int \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) d\mathbf{R} = \int_f^\infty df' \int d\mathbf{R} \varphi(t, \mathbf{R}, f'),$$

и общая "масса" поля, заключенная в этих областях

$$M(t, f) = \int f(\mathbf{R}, t) \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) d\mathbf{R} = \int_f^\infty f' df' \int d\mathbf{R} \varphi(t, \mathbf{R}, f').$$

Среднее значение индикаторной функции по ансамблю реализаций определяет одновременную во времени и одноточечную в пространстве плотность вероятностей

$$P(t, \mathbf{R}, f) = \langle \varphi(t, \mathbf{R}, f) \rangle = \langle \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \rangle,$$

и, следовательно, средние по ансамблю реализаций значения всех выражений непосредственно определяются этой плотностью вероятностей.

Дополнительную информацию о детальной структуре поля $f(\mathbf{R}, t)$ можно получить, включив в рассмотрение его пространственный градиент $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) = \nabla f(\mathbf{R}, t)$. Так, например, величина

$$l(t, f) = \int d\mathbf{R} |\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)| \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) = \oint dl \quad (\text{B.17})$$

описывает общую длину контуров [61–65] и является обобщением формулы (B.5) на случайные поля.

Подынтегральное выражение в (B.17) описывается расширенной индикаторной функцией

$$\varphi(t, \mathbf{R}, f, \mathbf{p}) = \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{p}), \quad (\text{B.18})$$

и среднее значение формулы (B.17) связано с совместной одновременной плотностью вероятностей полей $f(\mathbf{R}, t)$ и его градиента $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)$, которая определяется путем усреднения индикаторной функции (B.18) по ансамблю реализаций, т. е. функцией

$$P(t, \mathbf{R}, f, \mathbf{p}) = \langle \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{p}) \rangle.$$

Включение в рассмотрение пространственных производных второго порядка позволяет оценить общее число контуров $f(\mathbf{R}, t) = f = \text{const}$ с помощью приближенной (с точностью до незамкнутых линий) формулы [72]

$$N(t, f) = N_{\text{in}}(t, f) - N_{\text{out}}(t, f) = \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{R} \kappa(t, \mathbf{R}, f) |\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)| \delta(f(\mathbf{R}, t) - f),$$

где $N_{\text{in}}(t, f)$, $N_{\text{out}}(t, f)$ — число контуров, для которых вектор \mathbf{p} направлен по внутренней и внешней нормали, соответственно, а $\kappa(t, \mathbf{R}, f)$ — кривизна линии уровня.

Отметим, что для пространственно однородного поля $f(\mathbf{R}, t)$, когда соответствующие одноточечные плотности вероятностей $P(t, \mathbf{R}, f)$ и $P(t, \mathbf{R}, f, \mathbf{p})$ не зависят от \mathbf{R} , статистические средние всех выражений (без интегрирования по \mathbf{R}) будут описывать соответствующие удельные (приходящиеся на единицу площади) значения этих величин, если они, конечно, существуют. В этом случае случайное поле $f(\mathbf{R}, t)$ является статистически эквивалентным случайному процессу, все статистические характеристики которого совпадают с одноточечными характеристиками поля $f(\mathbf{R}, t)$.

Приложение Г

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЕЛЬТА-КОРРЕЛИРОВАННОГО ВО ВРЕМЕНИ ГАУССОВА СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

В предыдущих главах подробно рассматривались общие случаи анализа стохастических уравнений. Здесь мы рассмотрим приближение дельта-коррелированного во времени гауссова случайного поля в стохастических уравнениях и обсудим его физический смысл. Это приближение наиболее широко используется при решении практических задач.

Г.1. Уравнение Фоккера–Планка

Пусть векторная функция $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ удовлетворяет динамическому уравнению

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (\text{Г.1})$$

где $v_i(\mathbf{x}, t)$, ($i = 1, \dots, n$) — детерминированные функции, а $f_i(\mathbf{x}, t)$ — случайные функции ($n + 1$) переменных, обладающие следующими свойствами:

- а) $f_i(\mathbf{x}, t)$ — гауссово случайное поле в $(n + 1)$ -мерном пространстве (\mathbf{x}, t) ;
- б) $\langle f_i(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$.

Будем для определенности считать, что t — временная координата, а \mathbf{x} — пространственная.

Статистические характеристики поля $f_i(\mathbf{x}, t)$ полностью описываются заданием его корреляционного тензора

$$B_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = \langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t') \rangle.$$

Так как уравнение (Г.1) является уравнением первого порядка с начальным условием, то для него выполняется условие динамической причинности

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} x_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad t' < t_0 \quad \text{и} \quad t' > t, \quad (\text{Г.2})$$

т. е. его решение $\mathbf{x}(t)$ функционально зависит лишь от предшествующих по t значений $f_j(\mathbf{x}, t')$ из интервала $t_0 \leq t' \leq t$. При этом для вариационной производной имеем равенство

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t - 0)} x_i(t) = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}'). \quad (\text{Г.3})$$

Однако может существовать статистическая связь между $\mathbf{x}(t)$ и последующими значениями $f_j(\mathbf{x}, t'')$, где $t'' > t$, так как такие значения $f_j(\mathbf{x}, t'')$ коррелированы со значениями $f_j(\mathbf{x}, t')$ при $t' \leq t$. Ясно, что корреляция функции $\mathbf{x}(t)$ с последующими

значениями $f_j(\mathbf{x}, t'')$ заметна лишь при $t'' - t \leq \tau_0$, где τ_0 — радиус корреляции поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ по переменной t .

Для достаточно большого класса реальных физических процессов характерный временной масштаб изменения функции $\mathbf{x}(t)$ имеет величину порядка $T \gg \tau_0$, и в этом случае существует малый параметр — τ_0/T , который может быть использован для построения приближенного решения.

В первом приближении по этому параметру малости можно рассматривать асимптотику при $\tau_0 \rightarrow 0$. При этом значения $\mathbf{x}(t')$ при $t' < t$ будут не только функционально, но и статистически независимы от значений $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t'')$ при $t'' > t$. Это приближение эквивалентно замене корреляционного тензора B_{ij} на некоторый эффективный тензор, определяемый равенством

$$B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = 2\delta(t - t') F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t). \quad (\text{Г.4})$$

Величина $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ при этом определяется из условия равенства интегралов от $B_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t')$ и $B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t')$ по t' :

$$F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t'),$$

что и соответствует переходу к гауссовому дельта-коррелированному по времени t случайному полю.

Введем индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}), \quad (\text{Г.5})$$

где $\mathbf{x}(t)$ — решение уравнения (Г.1), удовлетворяющую уравнению Лиувилля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (\text{Г.6})$$

При этом

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t - 0)} \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}, t) \}. \quad (\text{Г.7})$$

Уравнение для плотности вероятностей решения уравнения (Г.1)

$$P(\mathbf{x}, t) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle$$

получим, усредняя уравнение (Г.6) по ансамблю реализаций поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle. \quad (\text{Г.8})$$

Уравнение (Г.8) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \int d\mathbf{x}' \int_{t_0}^t dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} \right\rangle. \quad (\text{Г.9})$$

Здесь мы воспользовались формулой Фурутцу–Новикова (Б.14) на с. 98:

$$\langle f_k(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}; \tau)] \rangle = \int d\mathbf{x}' \int dt' B_{kl}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}; \tau)]}{\delta f_l(\mathbf{x}', t')} \right\rangle, \quad (\text{Г.10})$$

справедливой для корреляции гауссова случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ с произвольным функционалом $R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$ от него, и условием динамической причинности (Г.2).

Уравнение (Г.9) показывает, что одновременная плотность вероятностей решения $\mathbf{x}(t)$ в момент времени t определяется функциональной зависимостью решения $\mathbf{x}(t)$ от поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}', t)$ для всех времен в интервале (t_0, t) .

В общем случае плотность вероятностей $P(\mathbf{x}, t)$ не описывается замкнутым уравнением. Если же для корреляционной функции поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ воспользоваться приближением (Г.4), то возникнут члены, связанные со значениями $\delta\varphi[\mathbf{x}, t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]/\delta f_j(\mathbf{x}', t')$ при совпадающих временных аргументах $t' = t - 0$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\right) P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \int d\mathbf{x}' F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \left\langle \frac{\delta\varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_j(\mathbf{x}', t-0)} \right\rangle,$$

которые, согласно равенству (Г.7), выражаются непосредственно через саму величину $\varphi[\mathbf{x}, t, \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$. Таким образом, мы приходим к замкнутому уравнению Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)]\right) P(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t)], \quad (\text{Г.11})$$

где

$$A_k(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x'_l} F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}}.$$

Уравнение (Г.11) следует решать с начальным условием $P(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, или же с начальным условием более общего вида: $P(\mathbf{x}, t_0) = W_0(\mathbf{x})$, если начальные условия также случайны, но статистически независимы от поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Уравнение Фоккера–Планка (Г.11) — уравнение в частных производных, и его дальнейший анализ существенно зависит от формулировки краевых условий по \mathbf{x} , которые формулируются для анализа конкретных задач.

Рассмотрим величины, входящие в уравнение (Г.11). Члены этого уравнения с $A_k(\mathbf{x}, t)$ и $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ обусловлены флуктуациями поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Если поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ стационарно во времени, то величины $A_k(\mathbf{x})$ и $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ не зависят от времени. Если к тому же поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ однородно и изотропно по всем пространственным координатам, то величина $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) = \text{const}$, что соответствует постоянному тензору коэффициентов диффузии, а величина $A_k(\mathbf{x}, t) = 0$ (заметим, однако, что зависимость $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ и $A_k(\mathbf{x}, t)$ от \mathbf{x} может быть связана и с использованием криволинейных координат).

Г.2. Плотность вероятностей перехода

Вернемся теперь к динамической системе (Г.1) и рассмотрим m -временную плотность вероятностей

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \langle \delta(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_1) \dots \delta(\mathbf{x}(t_m) - \mathbf{x}_m) \rangle, \quad (\text{Г.12})$$

относящуюся к m различным моментам времени $t_1 < t_2 < \dots < t_m$. Дифференцируя (Г.12) по времени t_m и используя затем динамическое уравнение (Г.1), условие динамической причинности (Г.2), определение функции $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t)$ и формулу

Фурутцу–Новикова (Г.10), можно получить уравнение, аналогичное уравнению Фоккера–Планка (Г.11):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_m} P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) + \\ & + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{mk}} [v_k(\mathbf{x}_m, t_m) + A_k(\mathbf{x}_m, t_m)] P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \\ & = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_{mk} \partial x_{ml}} [F_{kl}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m; t_m) P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m)]. \end{aligned} \quad (\text{Г.13})$$

Здесь суммирование по индексу m не производится. Начальное условие к (Г.13) можно найти из формулы (Г.12). Полагая $t_m = t_{m-1}$ в (Г.12), получаем

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_{m-1}) = \delta(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \quad (\text{Г.14})$$

Решение уравнения (Г.13) можно искать в виде

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \quad (\text{Г.15})$$

Так как все дифференциальные операции в (Г.13) относятся к t_m и \mathbf{x}_m , то, подставляя (Г.15) в (Г.13) и (Г.14), находим следующее уравнение для плотности вероятностей перехода:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)]\right) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)] \quad (\text{Г.16})$$

с начальным условием

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) |_{t=t_0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

где

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) | \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \rangle.$$

В уравнении (Г.16) мы обозначили переменные \mathbf{x}_m, t_m через \mathbf{x}, t , а переменные $\mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}$ — через \mathbf{x}_0, t_0 .

Применяя формулу (Г.15) $(m-1)$ раз, получаем соотношение

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) \dots p(\mathbf{x}_2, t_2 | \mathbf{x}_1, t_1) P(\mathbf{x}_1, t_1), \quad (\text{Г.17})$$

где $P(\mathbf{x}_1, t_1)$ — плотность вероятностей, определяемая уравнением (Г.11) и относящаяся к одному моменту времени t_1 . Равенство (Г.17) выражает многовременную плотность вероятностей через произведение плотностей вероятностей перехода и означает, что случайный процесс $\mathbf{x}(t)$ является марковским.

Г.3. Обратное уравнение Фоккера–Планка

Уравнение (Г.11) обычно называется *прямым уравнением Фоккера–Планка*. Легко получить и *обратное уравнение Фоккера–Планка*, которое описывает эволюцию плотности вероятностей перехода по отношению к начальным параметрам t_0, \mathbf{x}_0 .

Действительно, в приложении А было получено обратное уравнение Лиувилля (А.41) для индикаторной функции, которое описывает эволюцию динамической системы в зависимости от начальных условий \mathbf{x}_0, t_0 и имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0}\right) \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \quad (\text{Г.18})$$

с начальным условием

$$\varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Из уравнения (Г.18) вытекает равенство, аналогичное (Г.7):

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t_0 + 0)} \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x_{0j}} \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0). \quad (\text{Г.19})$$

Усредняя теперь обратное уравнение Лиувилля (Г.18) по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ с эффективным корреляционным тензором (Г.4), используя формулу Фурутцу–Новикова (Г.10) и соотношение (Г.19) для вариационной производной, мы приходим к обратному уравнению Фоккера–Планка (см. также, например, [5])

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + [v_k(\mathbf{x}_0, t_0) + A_k(\mathbf{x}_0, t_0)] \frac{\partial}{\partial x_{0k}} \right) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \\ & = -F_{kl}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0; t_0) \frac{\partial^2}{\partial x_{0k} \partial x_{0l}} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), \quad p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (\text{Г.20})$$

Прямое и обратное уравнения Фоккера–Планка эквивалентны. Первое более удобно для анализа эволюции статистических характеристик во времени решения задачи (Г.1). Второе же более удобно для изучения статистических характеристик, связанных с начальными условиями, таких, например, как время пребывания процесса $\mathbf{x}(t)$ в какой-либо области пространства, время достижения ее границ и т. п. В этом случае вероятность пребывания случайного процесса $\mathbf{x}(t)$ в области пространства V определяется интегралом

$$G(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \int_V d\mathbf{x} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0),$$

который, согласно уравнению (Г.20), описывается замкнутым уравнением

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + [v_k(\mathbf{x}_0, t_0) + A_k(\mathbf{x}_0, t_0)] \frac{\partial}{\partial x_{0k}} \right) G(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \\ & = -F_{kl}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0; t_0) \frac{\partial^2}{\partial x_{0k} \partial x_{0l}} G(t; \mathbf{x}_0, t_0), \end{aligned} \quad (\text{Г.21})$$

$$G(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x}_0 \in V), \\ 0 & (\mathbf{x}_0 \notin V). \end{cases}$$

Необходимо также сформулировать дополнительные краевые условия для уравнения (Г.21), которые определяются характером как самой области V , так и ее границ.

Г.3.1. Явление переброса в сингулярных системах

Рассмотрим простейший пример стохастической системы, возникающей в статистической теории волн и имеющей сингулярное поведение во времени:

$$\frac{d}{dt} x(t) = -x^2(t) + f(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (\text{Г.22})$$

где $f(t)$ — случайная функция времени.

В отсутствие случайностей решение уравнения (Г.22) имеет вид

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + x_0(t - t_0)}.$$

Если $x_0 > 0$, то при $t > t_0$ решение задачи $x(t)$ монотонно стремится к нулю с ростом времени. Если же $x_0 < 0$, то решение $x(t)$ обращается в $\{-\infty\}$ в течение конечного промежутка времени $T = t_0 - 1/x_0$, т. е. становится *сингулярным* и имеет *взрывной характер*. В этом случае влияние случайной силы $f(t)$ на динамику системы несущественно. Оно становится важным только в случае положительного значения x_0 . В этом случае решение задачи, слегка флуктуируя, уменьшается с ростом времени, оставаясь положительным. При достижении достаточно малого значения $x(t)$ оно будет «переброшено» под действием силы $f(t)$ в область отрицательных значений x и по прошествии некоторого конечного времени обратится в $-\infty$.

Таким образом, в стохастическом случае для любых значений величины x_0 решение задачи (Г.22) имеет взрывной характер и обращается в $-\infty$ в течение конечного времени T . Примерная реализация поведения решения задачи (Г.22) $x(t)$ во времени для $t > t_0$ имеет как бы *квази-периодическую* структуру и схематически изображена на рис. Г.1.

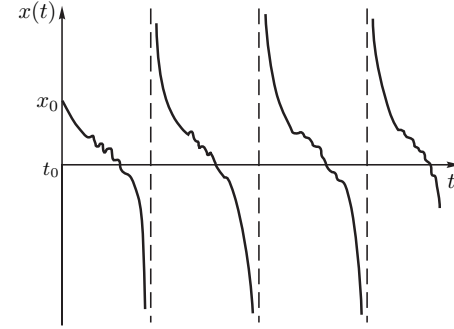


Рис. Г.1. Типичная реализация решения уравнения (Г.22)

Решение статистической задачи (Г.22) описывается прямым и обратным уравнениями Фоккера–Планка ($t - t_0 = \tau$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} p(x, \tau | x_0) &= \frac{\partial}{\partial x} x^2 p(x, \tau | x_0) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, \tau | x_0), \\ \frac{\partial}{\partial \tau} p(x, \tau | x_0) &= -x_0^2 \frac{\partial}{\partial x_0} p(x, \tau | x_0) + D \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} p(x, \tau | x_0). \end{aligned} \quad (\text{Г.23})$$

Отметим, что величины x , $p(x, \tau | x_0)$ и D имеют, соответственно, размерности

$$[x] = \tau^{-1}, \quad [D] = \tau^{-3}, \quad [p] = \tau$$

и, следовательно, обезразмеривая уравнения (Г.23) ($\tau \rightarrow D^{-1/3}\tau$, $x \rightarrow D^{1/3}x$), можно переписать их в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} p(x, \tau | x_0) &= \frac{\partial}{\partial x} x^2 p(x, \tau | x_0) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, \tau | x_0), \\ \frac{\partial}{\partial \tau} p(x, \tau | x_0) &= -x_0^2 \frac{\partial}{\partial x_0} p(x, \tau | x_0) + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} p(x, \tau | x_0). \end{aligned} \quad (\text{Г.24})$$

Необходимо далее сформулировать краевые условия для (Г.24). Существует два типа задач, представляющих непосредственный интерес.

Первый тип краевых условий возникает, если предположить, что кривая $x(t)$ обрывается в точке t_0 , где она обращается в $(-\infty)$. Это соответствует условию, что плотность потока вероятностей

$$J(\tau, x) = x^2 p(x, \tau | x_0) + \frac{\partial}{\partial x} p(x, \tau | x_0) \quad (\text{Г.25})$$

должна равняться нулю при $x \rightarrow \infty$, т. е. условиям

$$\begin{aligned} J(\tau, x) &\rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty, \\ p(x, \tau | x_0) &\rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

В этом случае величина $G(\tau | x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x, \tau | x_0) \neq 1$ определяет вероятность того, что функция $x(t)$ остается конечной на всей оси $(-\infty, \infty)$, т. е. вероятность отсутствия сингулярной точки в момент времени $t - G(\tau | x_0) = P(t < t_0)$. Следовательно, вероятность появления сингулярной точки в момент времени t определяется равенством

$$P(t > t_0) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x, \tau | x_0),$$

и плотность вероятностей

$$p(\tau | x_0) = \frac{\partial}{\partial t} P(t > t_0) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x, \tau | x_0) \quad (\text{Г.26})$$

описывается уравнением, вытекающим из обратного уравнения Фоккера–Планка (Г.24):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p(\tau | x_0) = -x_0^2 \frac{\partial}{\partial x_0} p(\tau | x_0) + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} p(\tau | x_0), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty} p(\tau | x_0) \rightarrow 0. \quad (\text{Г.27})$$

Оценим среднее время

$$\langle T(x_0) \rangle = \int_0^{\infty} \tau d\tau p(\tau | x_0),$$

за которое система перейдет из состояния x_0 в состояние $(-\infty)$. Эта величина описывается уравнением, вытекающим из (Г.27):

$$-1 = -x_0^2 \frac{d}{dx_0} \langle T(x_0) \rangle + \frac{d^2}{dx_0^2} \langle T(x_0) \rangle \quad (\text{Г.28})$$

с краевыми условиями: $\langle T(x_0) \rangle \rightarrow 0$ при $x_0 \rightarrow -\infty$ и величина $\langle T(x_0) \rangle$ ограничена при $x_0 \rightarrow \infty$. Это уравнение легко интегрируется, и в результате получаем

$$\langle T(x_0) \rangle = \int_{-\infty}^{x_0} d\xi \int_{\xi}^{\infty} d\eta \exp \left\{ \frac{1}{3} (\xi^3 - \eta^3) \right\}. \quad (\text{Г.29})$$

Для среднего времени между двумя сингулярными точками из (Г.29) получаем

$$\langle T(\infty) \rangle = \sqrt{\pi} \frac{12^{1/6}}{3} \Gamma \left(\frac{1}{6} \right) \approx 4,976.$$

Отметим также, что величина $\langle T(x_0) \rangle = \frac{2}{3} \langle T(\infty) \rangle$ соответствует среднему времени перехода из состояния $x_0 = 0$ в состояние $x_0 = -\infty$.

Совершенно другие краевые условия возникают, если считать, что функция $x(t)$ разрывна и определена для всех значений времени t . Если при этом ее обращение в $(-\infty)$ в момент времени $t \rightarrow t_0 - 0$ немедленно сопровождается ее появлением при $t \rightarrow t_0 + 0$ со значением ∞ , то краевым условием для уравнения (Г.24) будет условие непрерывности плотности потока вероятностей (Г.25), т. е. условие

$$J(\tau, x) \Big|_{x=-\infty} = J(\tau, x) \Big|_{x=+\infty}.$$

В этом случае существует стационарная плотность вероятностей, не зависящая от x_0 :

$$P(x) = J \int_{-\infty}^x d\xi \exp \left\{ \frac{1}{3} (\xi^3 - x^3) \right\}, \quad (\text{Г.30})$$

где стационарная плотность потока вероятностей

$$J = \frac{1}{\langle T(\infty) \rangle}.$$

Для больших значений x из (Г.30) следует асимптотическая формула

$$P(x) \approx \frac{1}{\langle T(\infty) \rangle x^2}. \quad (\text{Г.31})$$

Эта асимптотика формируется разрывами функции $x(t)$. В самом деле, в окрестности разрыва функция $x(t)$ имеет структуру

$$x(t) = \frac{1}{t - t_k}$$

и влияние случайностей несущественно. Для достаточно больших t и x , а именно при $t \gg \langle T(\infty) \rangle$, имеем

$$\begin{aligned} p(x, t | x_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \delta \left(x - \frac{1}{t - t_k} \right) \right\rangle = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta(t - t_k) \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} \langle e^{i\omega t_k} \rangle = \frac{1}{2\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \frac{\Phi_0(\omega)}{1 - \Phi(\omega)}, \end{aligned}$$

где $\Phi_0(\omega) = \langle e^{i\omega t_0} \rangle$ — характеристическая функция первой сингулярной точки, а $\Phi(\omega) = \langle e^{i\omega T} \rangle$ — характеристическая функция времени между сингулярностями. Следовательно, при $t \rightarrow \infty$ получаем асимптотику

$$P(x) = -\frac{1}{2\pi i x^2 \langle T(\infty) \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \frac{1}{\omega + i0} = \frac{J}{x^2},$$

совпадающую с (Г.31).

Г.4. Об условиях применимости уравнения Фоккера–Планка

Для оценки границ применимости уравнения Фоккера–Планка необходимо учитывать конечность радиуса корреляции τ_0 поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ по временной координате. В этом случае вместо уравнения для плотности вероятностей (Г.11) получается уравнение

$$\widehat{E}P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_k} S'(\mathbf{x}, t),$$

где \widehat{E} — оператор, стоящий в левой части уравнения (Г.11), в котором величина $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ заменена на

$$\widetilde{F}_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \int_0^t dt' B_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t),$$

а член $S'(\mathbf{x}, t)$ учитывает поправки к вектору плотности потока вероятностей, связанные с конечностью τ_0 . При $\tau_0 \rightarrow 0$ мы возвращаемся к уравнению (Г.11). Таким образом, условие малости параметра τ_0/T является необходимым, но, вообще говоря, не достаточным для возможности описывать статистические характеристики решения уравнения (Г.1) на основе приближения дельта-коррелированного случайного поля, которому соответствует уравнение Фоккера–Планка. Для каждой конкретной задачи необходимо проводить более детальные исследования. Далее мы приведем физически более наглядный метод, называемый *диффузионным приближением*, также приводящий к марковости решения уравнения (Г.1), но учитывающий, в определенной мере, конечность временного радиуса корреляции.

Здесь же подчеркнем, что приближение дельта-коррелированного случайного поля не означает формальной замены случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ в (Г.1) на случайное поле с корреляционной функцией (Г.4). Это приближение соответствует построению асимптотического разложения при стремлении временного радиуса корреляции τ_0 поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ к нулю. И при таком предельном переходе точные средние величины типа

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{x}', \tau)] \rangle$$

переходят в выражения, полученные с помощью формальной замены корреляционно-го тензора поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ на эффективный тензор (Г.4).

Г.5. Простейшие марковские случайные процессы

Существует лишь небольшое число уравнений Фоккера–Планка, допускающих точное решение. Это прежде всего уравнения Фоккера–Планка, соответствующие таким стохастическим уравнениям, которые сами допускают отыскание решения в аналитическом виде. Для таких задач зачастую удается определить не только одноточечную плотность вероятностей и переходную плотность вероятностей, но и характеристический функционал, а также другие важные для приложений статистические характеристики. Самым простым случаем является уравнение, определяющее *винеровский случайный процесс*. Учитывая особую важность таких процессов в физике (они, например, описывают *броуновское движение частиц*).

Г.5.1. Винеровский случайный процесс

Винеровский случайный процесс определяется как решение стохастического уравнения

$$\frac{d}{dt} w(t) = z(t), \quad w(0) = 0,$$

где $z(t)$ — гауссов дельта-коррелированный во времени процесс с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0\delta(t-t').$$

Решение этого уравнения

$$w(t) = \int_0^t d\tau z(\tau)$$

— непрерывный гауссов нестационарный случайный процесс с параметрами

$$\langle w(t) \rangle = 0, \quad \langle w(t)w(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0 \min(t, t').$$

И, следовательно, его характеристический функционал имеет структуру

$$\begin{aligned} \Phi[t; v(\tau)] &= \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau w(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle = \\ &= \exp \left\{ -\sigma^2\tau_0 \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 v(\tau_1) v(\tau_2) \min(\tau_1, \tau_2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Г.32})$$

Г.5.2. Винеровский случайный процесс со сносом

Обсудим более общий процесс со сносом, зависящий от параметра α по формуле

$$w(t; \alpha) = -\alpha t + w(t), \quad \alpha > 0.$$

Процесс $w(t; \alpha)$ — марковский процесс и его плотность вероятностей

$$P(w, t; \alpha) = \langle \delta(w(t; \alpha) - w) \rangle$$

описывается уравнением Фоккера–Планка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial w} \right) P(w, t; \alpha) = D \frac{\partial^2}{\partial w^2} P(w, t; \alpha), \quad P(w, 0; \alpha) = \delta(w), \quad (\text{Г.33})$$

где через коэффициент диффузии обозначена величина $D = \sigma^2\tau_0$. Его решение имеет вид гауссова распределения:

$$P(w, t; \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{(w + \alpha t)^2}{4Dt} \right\}. \quad (\text{Г.34})$$

Соответствующая интегральная функция распределения, равная вероятности того, что $w(t; \alpha) < w$, равна

$$F(w, t; \alpha) = \int_{-\infty}^w dw P(w, t; \alpha) = \Phi \left(\frac{w}{\sqrt{2Dt}} + \alpha \sqrt{\frac{t}{2D}} \right), \quad (\text{Г.35})$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z dy \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} \quad (\text{Г.36})$$

— интеграл вероятностей. При этом кривая типичной реализации винеровского случайного процесса со сносом, в соответствии с формулами (В.15) на с. 103, является линейной функцией времени:

$$w^*(t; \alpha) = -\alpha t.$$

С помощью винеровского случайного процесса можно конструировать и другие процессы, удобные для моделирования различных физических явлений. Для положительных величин такой простейшей аппроксимацией является логарифмически нормальный (логнормальный) процесс, который мы и рассмотрим более подробно.

Г.5.3. Логарифмически нормальный процесс

Определим логнормальный случайный процесс формулой

$$y(t; \alpha) = e^{w(t; \alpha)} = \exp\left\{-\alpha t + \int_0^t d\tau z(\tau)\right\}, \quad (\text{Г.37})$$

где $z(t)$ — гауссов процесс «белого шума» с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0\delta(t-t').$$

Он описывается стохастическим уравнением

$$\frac{d}{dt}y(t; \alpha) = \{-\alpha + z(t)\}y(t; \alpha), \quad y(0; \alpha) = 1.$$

Одновременная плотность вероятностей логнормального процесса

$$\begin{aligned} P(y, t; \alpha) &= \langle \delta(y(t; \alpha) - y) \rangle = \langle \delta(e^{w(t; \alpha)} - y) \rangle = \\ &= \frac{1}{y} \langle \delta(w(t; \alpha) - \ln y) \rangle = \frac{1}{y} P(w, t; \alpha)|_{w=\ln y}, \end{aligned}$$

где $P(w, t; \alpha)$ — одновременная плотность вероятностей винеровского процесса со сносом, описываемая равенством (Г.34), и, следовательно,

$$P(y, t; \alpha) = \frac{1}{2y\sqrt{\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{(\ln y + \alpha t)^2}{4Dt}\right\} = \frac{1}{2y\sqrt{\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{\ln^2(ye^{\alpha t})}{4Dt}\right\}, \quad (\text{Г.38})$$

где параметр $D = \sigma^2\tau_0$. Графики логарифмически нормальной плотности вероятностей (Г.38) для значения параметра $\alpha/D = 1$ и безразмерного времени $\tau = Dt = 0,1$ и 1 приведены на рис. Г.2.

Характерной особенностью этих графиков является появление длинного пологого «хвоста» при $\tau = 1$, означающего усиление роли больших выбросов процесса $y(t; \alpha)$ в формировании одновременной статистики. Соответственно, интегральная функция распределения, согласно (Г.35), (Г.36), определяется выражением

$$\begin{aligned} F(y, t; \alpha) &= P(y(t; \alpha) < y) = P(w(t; \alpha) < \ln y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\ln y} dw P(w, t; \alpha) = \Phi\left(\frac{\ln y}{\sqrt{2Dt}} + \alpha\sqrt{\frac{t}{2D}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln(ye^{\alpha t})\right). \quad (\text{Г.39}) \end{aligned}$$

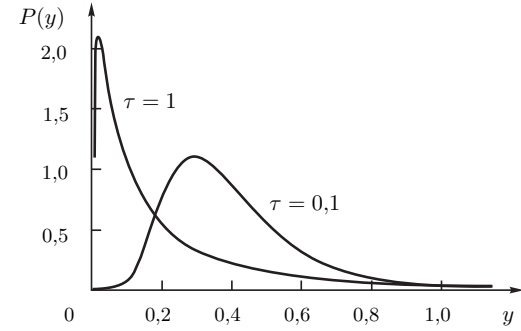


Рис. Г.2. Логарифмически нормальная плотность вероятностей (Г.38) для значения параметра $\alpha/D = 1$ и безразмерного времени $\tau = 0,1$ и 1

Зная только одноточечные статистические характеристики процесса $y(t; \alpha)$, можно получить важную информацию о поведении реализаций процесса $y(t; \alpha)$ на всем интервале времен $(0, \infty)$. В частности:

1) Логнормальный процесс $y(t; \alpha)$ является марковским процессом и его одновременная плотность вероятностей (Г.38) описывается уравнением Фоккера–Планка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} y\right) P(y, t; \alpha) = D \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} y P(y, t; \alpha), \quad P(y, 0; \alpha) = \delta(y - 1). \quad (\text{Г.40})$$

Исходя из уравнения (Г.40) легко написать уравнения для моментных функций процесса $y(t; \alpha)$, решения которых определяются равенствами

$$\langle y^n(t; \alpha) \rangle = e^{n(n-\alpha/D)Dt}, \quad \left\langle \frac{1}{y^n(t; \alpha)} \right\rangle = e^{n(n+\alpha/D)Dt}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{Г.41})$$

и экспоненциально растут во времени.

Исходя из уравнения (Г.40) также легко получить равенство

$$\langle \ln y(t) \rangle = -\alpha t$$

и, следовательно, параметр α можно записать в виде

$$-\alpha = \frac{1}{t} \langle \ln y(t) \rangle. \quad (\text{Г.42})$$

Замечание Г.1. Ляпуновская экспонента

Подходу, основанному на анализе устойчивости решений детерминированных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$$

по Ляпунову, уделяется большое внимание многими исследователями. При этом анализируется верхний предел решения задачи

$$\lambda_{\mathbf{x}(t)} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |\mathbf{x}(t)|,$$

который называется его характеристическим показателем. В приложении к стохастическим динамическим системам при таком подходе, зачастую, для интерпретации и упрощения полученных результатов, эти исследователи на последней стадии подключают статистический анализ и вычисляют их статистические средние такие, например, как

$$\langle \lambda_{\mathbf{x}(t)} \rangle = \overline{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \langle \ln |\mathbf{x}(t)| \rangle}. \quad (\text{Г.43})$$

◆

Таким образом параметр α является *ляпуновской экспонентой* для логнормального случайного процесса $y(t)$ (см., например, [18, 19]).

2) Зная интегральную функцию распределения, можно вычислить кривую типичной реализации логнормального процесса $y(t; \alpha)$, которая оказывается экспоненциально спадающей кривой:

$$y^*(t) = e^{\langle \ln y(t) \rangle} = e^{-\alpha t}, \quad (\text{Г.44})$$

в соответствии с формулами (В.15) на с. 103.

Экспоненциальный рост моментов обусловлен выбросами процесса $y(t; \alpha)$ относительно кривой типичной реализации $y^*(t; \alpha)$ как в сторону больших, так и в сторону малых значений y .

Для значения параметра $\alpha/D = 1$ среднее значение процесса $y(t; D)$ не зависит от времени и равно единице. При этом, однако, вероятность выполнения неравенства $y < 1$ при $Dt \gg 1$, согласно (Г.39), быстро стремится к единице по закону

$$P(y(t; D) < 1) = \Phi\left(\sqrt{\frac{Dt}{2}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} e^{-Dt/4},$$

т. е. подавляющее время графики реализаций процесса лежат ниже уровня его среднего значения $\langle y(t; D) \rangle = 1$, хотя статистические моменты процесса $y(t; D)$ в основном и определяются его большими выбросами.

Таким образом, мы имеем явное противоречие в характерах поведения статистических характеристик процесса $y(t; \alpha)$ и его реализаций.

3) Поведение реализаций процесса $y(t; \alpha)$ на всем интервале времени можно также оценить с помощью p -мажорантных кривых $M_p(t, \alpha)$, которые определим следующим образом. Назовем мажорантной кривой такую кривую $M_p(t, \alpha)$, для которой при любых временах t с вероятностью p выполняется неравенство $y(t; \alpha) < M_p(t, \alpha)$, т. е.

$$P\{y(t; \alpha) < M_p(t, \alpha) \text{ для всех } t \in (0, \infty)\} = p.$$

При этом существует однопараметрический класс экспоненциально спадающих мажорантных кривых

$$M_p(t, \alpha, \beta) = (1 - p)^{-D/\beta} e^{(\beta - \alpha)t}. \quad (\text{Г.45})$$

Обратим внимание на тот замечательный факт, что, несмотря на постоянство статистического среднего $\langle y(t; D) \rangle = 1$ и экспоненциальный рост высших моментов процесса $y(t; D)$, всегда можно указать экспоненциально спадающую мажорантную кривую (Г.45), ниже которой будут лежать реализации процесса $y(t; D)$ с любой наперед заданной вероятностью $p < 1$. В частности, например, с вероятностью $p = 1/2$ выполняется неравенство

$$y(t; D) < M_{1/2}(t, D, D/2) = 4e^{-Dt/2} \quad (\text{Г.46})$$

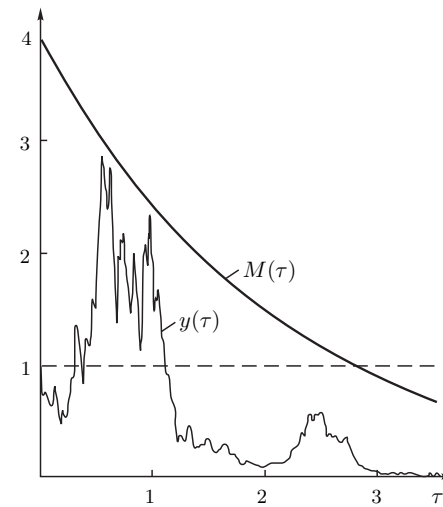


Рис. Г.3. Схематическое поведение реализации процесса $y(t; D)$ и мажорантной кривой $M(\tau)$ (Г.46)

для любого момента времени t из интервала $(0, \infty)$. Схематическое поведение реализации процесса $y(t; D)$ и мажорантной кривой (Г.46) приведено на рис. Г.3.

Это еще раз подтверждает сделанный ранее вывод о том, что экспоненциальный рост моментов процесса $y(t; D)$ во времени — эффект чисто статистический, обусловленный усреднением по всему ансамблю реализаций.

Отметим, что площадь под экспоненциально убывающими мажорантными кривыми конечна. Следовательно, большие выбросы процесса $y(t; \alpha)$, вызывая экспоненциальный рост высших моментов, не вносят существенного вклада в площадь под реализациями, которая практически для всех реализаций также конечна, т. е. выбросы логнормального процесса $y(t; \alpha)$ достаточно узки.

Г.6. Диффузионное приближение

Условием применимости приближения дельта-коррелированности случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ (т. е. уравнения Фоккера–Планка) является условие малости τ_0 — временного радиуса корреляции случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — по сравнению со всеми временными масштабами, имеющимися в рассматриваемой задаче. Учет конечности временного радиуса корреляции случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ можно провести в рамках диффузионного приближения. Это приближение более наглядно и физично, чем формальное математическое приближение дельта-коррелированного случайного поля. Это приближение справедливо также для достаточно малых флуктуаций параметров стохастической динамической системы и позволяет получить не только условия применимости дельта-коррелированного приближения, но и описать новые физические эффекты, порожденные конечностью временного радиуса корреляции случайных параметров.

В рамках диффузионного приближения предполагается, что влияние случайных воздействий на временных масштабах порядка τ_0 несущественно, т. е. система на этих масштабах эволюционирует как свободная.

Пусть опять векторная функция $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет динамическому уравнению

(Г.1) на с. 106:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (\text{Г.47})$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — векторная детерминированная функция, а $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — случайное статистически однородное в пространстве и стационарное во времени гауссово векторное поле со статистическими характеристиками

$$\langle f(\mathbf{x}, t) \rangle = 0, \quad B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = B_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t') \rangle.$$

Введем индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}), \quad (\text{Г.48})$$

где $\mathbf{x}(t)$ — решение уравнения (Г.47), удовлетворяющую уравнению Лиувилля (Г.6) на с. 107:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (\text{Г.49})$$

Уравнение для плотности вероятностей решения уравнения (Г.47)

$$P(\mathbf{x}(t) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle$$

получим, как и ранее, усредняя уравнение (Г.49) по ансамблю реализаций поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad P(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (\text{Г.50})$$

Используя формулу Фурютцу–Новикова (Г.10) на с. 107

$$\langle f_k(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \rangle = \int d\mathbf{x}' \int dt' B_{kl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta}{\delta f_l(\mathbf{x}', t')} R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \right\rangle,$$

справедливую для корреляции гауссова случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ с произвольным функционалом $R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$ от него, уравнение (Г.50) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{t_0}^t d\mathbf{x}' \int_{t_0}^t dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} \varphi(\mathbf{x}, t) \right\rangle. \quad (\text{Г.51})$$

В диффузионном приближении уравнение (Г.51) является точным, а вариационная производная и индикаторная функция на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \tau_0$ описываются системой динамических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} &= - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} \right\}, \\ \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} \Big|_{t=t'} &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}, t') \}, \end{aligned} \quad (\text{Г.52})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \}, \quad \varphi(\mathbf{x}, t) \Big|_{t=t'} = \varphi(\mathbf{x}, t').$$

Решение задачи (Г.51), (Г.52) справедливо для всех времен t . Однако в этом случае решение задачи (Г.47) $\mathbf{x}(t)$ не является векторным марковским случайным процессом,

так как ее многовременная плотность вероятностей не допускает факторизации с помощью плотности вероятностей перехода. В асимптотическом случае $t \gg \tau_0$ решение исходной динамической системы (Г.47) в диффузионном приближении уже будет марковским случайным процессом, и условиями применимости его является малость всех статистических эффектов на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции τ_0 .

Список литературы

1. *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Шевцов Б. М.* Геометрическое приближение в статистической теории волн // Акуст. журн. 1980. Т. 26, № 4. С. 488–493.
2. *Бункин Ф. В., Гочелашвили К. С.* Выбросы случайного скалярного поля // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1968. Т. 11, № 12. С. 1864–1870.
3. *Бункин Ф. В., Гочелашвили К. С.* Случайные пространственные выбросы интенсивности при распространении волны через турбулентную атмосферу // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1969. Т. 12, № 6. С. 875–881.
4. *Вировлянский А. Л., Саичев А. И., Славинский М. М.* Моментные функции при распространении волн в волноводах с протяженными случайными неоднородностями показателя преломления // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1985. Т. 28, № 9. С. 1149–1159.
5. *Гардинер К. В.* Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986.
6. *Гочелашвили К. С., Шишов В. И.* Волны в случайно неоднородной среде. — М.: ВИНТИ, 1981.
7. *Грачева М. Е., Гурвич А. С.* О сильных флуктуациях интенсивности света при распространении в приземном слое атмосферы // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1965. Т. 8, № 4. С. 717.
8. *Грачева М. Е., Гурвич А. С., Ломадзе С. О., Покасов В. В., Хрупин А. С.* Вероятностное распределение «сильных» флуктуаций интенсивности света в атмосфере // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1974. Т. 17, № 1. С. 105–112.
9. *Гурвич А. С., Каллистратова М. А., Мартвель Ф. Е.* Исследование сильных флуктуаций интенсивности света в турбулентной среде при малых волновых параметрах // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1977. Т. 20, № 7. С. 1020–1031.
10. *Гурвич А. С., Кон А. И., Миронов В. Л. и др.* Распространение лазерного излучения в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1976.
11. *Заворотный В. У., Кляцкин В. И., Татарский В. И.* Сильные флуктуации интенсивности электромагнитных волн в случайно неоднородных средах // ЖЭТФ. 1977. Т. 73, № 2. С. 481–497.
12. *Ишимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайной среде, Т. 1, 2. — М.: Мир, 1980.
13. *Кляцкин В. И.* Метод погружения в теории распространения волн. — М.: Наука, 1986.
14. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения глазами физика. Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения. — М.: Физматлит, 2001.
15. *Кляцкин В. И.* Динамика стохастических систем. Курс лекций. — М.: Физматлит, 2002.
16. *Кляцкин В. И.* Распространение электромагнитных волн в случайно-неоднородной среде как задача статистической математической физики // УФН. 2004. Т. 174, № 2. С. 177–195.
17. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения. Теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике. Т. 1, 2 — М.: Физматлит, 2008.
18. *Кляцкин В. И.* Динамические стохастические системы, кривая типичной реализации и ляпуновские экспоненты // Изв. АН, физ. атм. и океана. 2008. Т. 44, № 1. С. 21–35.
19. *Кляцкин В. И.* Статистическая топография и ляпуновские экспоненты в динамических стохастических системах // УФН. 2008. Т. 178, № 4. С. 419–431.
20. *Кляцкин В. И., Гуларий Д.* Когерентные явления в стохастических динамических системах // УФН. 1999. Т. 169, № 2. С. 171–207.
21. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.* Приближение параболического уравнения для распространения волн в среде со случайными неоднородностями // ЖЭТФ. 1970. Т. 58, № 2. С. 624–634.
22. *Кляцкин В. И., Якушкин И. Г.* К статистической теории распространения оптического излучения в турбулентной среде // ЖЭТФ. 1997. Т. 111, № 6. С. 2044–2059.
23. *Кравцов Ю. А.* «Геометрическая» деполаризация света в турбулентной атмосфере // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1970. Т. 13, № 2. С. 281–284.
24. *Кравцов Ю. А., Саичев А. И.* Эффекты двойного прохождения волн в случайно неоднородной среде // УФН. 1982. Т. 137, № 7. С. 501–527.
25. *Новиков Е. А.* Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности // ЖЭТФ. 1964. Т. 47, № 5. С. 1919–1926.
26. *Обухов А. М.* О влиянии слабых неоднородностей атмосферы на распространение звука и света // Изв. АН СССР, Сер. геофиз. 1953, № 2. С. 155–165.
27. *Обухов А. М.* Турбулентность и динамика атмосферы — Ленинград: Гидрометеоздат, 1988.
28. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1977–1978.
29. *Саичев А. И., Славинский М. М.* Уравнения для моментных функций волн, распространяющихся в случайно неоднородной среде с протяженными неоднородностями // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1985. Т. 28, № 1. С. 75–83.
30. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.

31. *Татарский В. И.* Оценка деполяризации света турбулентными неоднородностями атмосферы // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1967. Т. 10, № 12. С. 1762–1765 (1967).
32. *Татарский В. И.* Распространение света в среде со случайным показателем преломления в приближении марковского процесса // ЖЭТФ. 1969. Т. 56, № 6. С. 2106–2117.
33. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
34. *Фрадкин Е. С.* Метод функций Грина в теории квантованных полей и квантовой статистике // Труды ФИАН. 1965. Т. 29, № 7.
35. *Чернов Л. А.* Волны в случайных средах. — М.: Наука, 1975.
36. *Шевцов Б. М.* Статистическая теория обратного рассеяния в случайно-неоднородной среде // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1981. Т. 24, № 11. С. 1351–1355.
37. *Шевцов Б. М.* Трехмерная задача обратного рассеяния в стратифицированной случайно-неоднородной среде // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1982. Т. 25, № 9. С. 1032–1040.
38. *Шевцов Б. М.* Задача обратного рассеяния в трехмерной случайно неоднородной среде // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1983. Т. 26, № 4. С. 434–439.
39. *Шевцов Б. М.* Статистические характеристики обратно-рассеянного поля // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1985. Т. 28, № 6. С. 717–724.
40. *Шевцов Б. М.* Статистические характеристики волновых пакетов, рассеянных в слоистых случайных средах с отражающей поверхностью // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1987. Т. 30, № 8. С. 1007–1012.
41. *Шевцов Б. М.* Обратное рассеяние волн в слоистой случайной среде с регулярными неоднородностями // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1989. Т. 32, № 9. С. 1079–1083.
42. *Шевцов Б. М.* Статистические характеристики волн в слоистой случайной среде с регулярными неоднородностями // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1990. Т. 33, № 2. С. 191–195.
43. *Шевцов Б. М.* Нестационарные отражения в случайных и хаотических средах. — М.: Наука, 2008.
44. *Varabanenkov Yu. N., Kryukov D. I.* Functional Fokker-Planck formalism for wave propagation in random media under delocalized and weak localized regimes // Waves in Random Media. 1992. V. 2, № 1. P. 1–6.
45. *Varabanenkov Yu. N., Kravtsov Yu. A., Ozrin V. D., Saichev A. I.* Enhanced backscattering in optics / Progress in Optics. 1991. V. XXIX. P. 67–197, ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam.
46. *Beran M. J., Oz-Vogt J.* Imaging through turbulence in the atmosphere / Progress in Optics. 1994. V. XXXIII, P. 321–388, ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam.
47. *Charnotskii M. I., Gozani J., Tatarskii V. I., Zavorotnyi V. U.* Wave propagation theories in random media based on the path-integral approach / Progress in Optics. 1993. V. XXXII. P. 203–266. ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam.

48. *Churnside J. H., Clifford S. F.* Log-normal Rician probability-density function of optical scintillations in the turbulent atmosphere // JOSA. 1987. V. A4, № 10. P. 1923–1930.
49. *Dashen R.* Path integrals for waves in random media // J. Math. Phys. 1979. V. 20. P. 894–920.
50. *Dashen R.* Distribution of intensity in a multiply scattering medium // Opt. Lett. 1984. V. 9. P. 110–112.
51. *Flatté S. M., Wang G. Y., Martin J.* Irradiance variance of optical waves through atmospheric turbulence by numerical simulation and comparison with experiment // JOSA. 1993. V. A10. P. 2363–2370.
52. *Flatté S. M., Bracher C., Wang G. Y.* Probability-density functions of irradiance for waves in atmospheric turbulence calculated by numerical simulation // JOSA. 1994. V. A11. P. 2080–2092.
53. *Fradkin E. S.* Applications of functional methods in a quantum field theory and quantum statistics, II // Nucl. Phys. 1966. V. 11, P. 588.
54. *Furutsu K.* On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium // J. Res. NBS. 1963. V. D-67. P. 303.
55. *Furutsu K.* Random Media and Boundaries. Unified Theory, Two-Scale Method, and Applications. — N. Y.: Springer-Verlag, 1993.
56. *Klyatskin V. I.* Ondes et Équations Stochastiques dans les milieux Aléatoirement non Homogènes. — Besançon-Cedex: Leséditions de Physique, 1985.
57. *Klyatskin V. I.* Caustics in random media // Waves in random media. 1993. V. 3, № 2. P. 93–100.
58. *Kravtsov Yu. A.* Propagation of electromagnetic waves through a turbulent atmosphere // Rep. Prog. Phys. 1992. V. 55. P. 39–112.
59. *Kravtsov Yu. A., Saichev A. I.* Properties of coherent waves reflected in a turbulent medium // J. Opt. Soc. Am. 1985. V. A2, № 12. P. 2100–2105.
60. *Kulkarny V. A., White B. S.* Focusing of rays in a turbulent inhomogeneous medium // Phys. Fluids. 1982. V. 25, № 10. P. 1770–1784.
61. *Longuet-Higgins M. S.* Statistical properties of a moving wave-form // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1956. V. 52. P. 234–245.
62. *Longuet-Higgins M. S.* On the velocity of the maxima in a moving wave-form // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1957. V. 53. P. 230–233.
63. *Longuet-Higgins M. S.* The statistical analysis of a random, moving surface // Philos. Trans. R. Soc. London. 1957. Ser. A249, № 966. P. 321–387.
64. *Longuet-Higgins M. S.* Statistical properties of an isotropic random surface // Philos. Trans. R. Soc. London. 1957. Ser. A250, № 975. P. 157–174.

65. *Longuet-Higgins M.S.* The statistical geometry of random surfaces / In: Hydrodynamic Stability, Proc. 13-th Symp. Appl. Math., Am. Math. Soc. 1962. P. 105–142.
66. *Manning R.M.* Stochastic Electromagnetic Image Propagation And Adaptive Compensation. — N. Y.: McGraw-Hill, Inc., 1993.
67. *Martin J.M., Flatté S.M.* Intensity images and statistics from numerical simulation of wave propagation in 3-D random media // Appl. Opt. 1990. V. 27, № 11. P. 2111–2126.
68. *Martin J.M., Flatté S.M.* Simulation of point-source scintillation through three-dimensional random media // J. Opt. Soc. Am. 1990. V. A7. P. 838–847.
69. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидродинамика. Ч. 1, 2. — М.: Наука, 1965, 1967.
70. *Nair B., White B.S.* High frequency wave propagation in random media — a unified approach // SIAM. J. Appl. Math. 1991. V. 51, № 2. P. 374–411.
71. *Nicolis G., Prigogin I.*, Exploring Complexity, an Introduction. — New York: W.H. Freeman and Company, 1989.
72. *Swerling P.* Statistical properties of the contours of random surfaces // I.R.E. Trans. Inf. Theory. 1962. V. IT-8. P. 315–321.
73. *Tatarskii V.I., Zavorotnyi V.U.* Strong fluctuations in light propagation in a randomly inhomogeneous medium / Progress in Optics. 1980. V. XVIII. P. 204–256, ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam.
74. *Tatarskii V.I., Ishimaru A., Zavorotnyi V.U.* (eds.) Wave propagation in random media (scintillation). — SPIE, Bellingham, Wa. 1993.
75. *Tatarskii V.I., Charnotskii M.I., Gozani J., Zavorotnyi V.U.* Path integral approach to wave propagation in random media. Parts I–III / In: Wave propagation in random media (scintillation). P. 383–441. — SPIE, Bellingham, Wa. 1993.
76. *White B.S.* The stochastic caustic // SIAM. J. Appl. Math. 1983. V. 44, № 1. P. 127–149.
77. *Ziman J.M.*, Models of Disorder, The Theoretical Physics of Homogeneously Disordered Systems. — Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1979.
78. *Zwillinger D., White B.S.* Propagation of initially plane waves in the region of random caustics // Wave Motion. 1985. V. 7, № 2. P. 207–227.

Предметный указатель

- Броуновское движение, 114
- Вариационная производная, 84, 89, 96
- Волновой параметр, 45, 75
- Динамическая
локализация, 33
причинность, 18, 89, 91
- Закон Колмогорова–Обухова, 29
- Зона Френеля, 75, 77, 78
- Индекс мерцания, 43
- Индикатриса рассеяния, 27
- Интегральная функция распределения, 95, 100
- Каустическая структура, 21, 76–82
- Когерентные явления, 5
- Континуальный интеграл, 61–73
Феймана, 62
- Коэффициент экстинкции, 27
- Краевая задача, 8
- Кривая
мажорантная, 118–119
типичной реализации, 33, 78, 100, 101, 118
для гауссова процесса, 103
для логнормального процесса, 103
- Ляпуновская экспонента, 117
- Марковский процесс, 117
- Метод
Фрадкина, 61
Чернова (локальный), 37
возмущений, 34
плавных возмущений Рытова, 41
характеристик, 22
- Микромасштаб турбулентности, 43, 75
- Область
насыщенных флуктуаций, 74
- сильных флуктуаций, 6, 45, 80
- сильных фокусировок, 80
- слабых флуктуаций, 45
- Образование каустик, 51
- Обратнорассеянное поле, 14, 16
- Описание
лагранжево, 47–56
эйлерово, 56–60
- Параболический волновод, 29–33
- Перенос излучения, 27
- Плотность вероятностей
перехода, 109
поток, 112, 113
стационарная, 113
- Преобразование
Лапласа, 35
Фурье, 9, 35, 38, 40, 42, 58
поворота, 54
- Приближение
геометрической оптики, 21, 22, 47–60
дельта-коррелированного поля
гауссова, 106
диффузионное, 36–40, 114, 119
малоугловое, 27
френелевское, 18
- Радиус когерентности, 28
- Свойство
выкалывающее дельта-функции, 92
факторизации, 10, 18
- Случайный процесс, 95
винеровский, 114–116
гауссов, 102
логнормальный (логарифмически нормальный), 103, 116–119
- Собственная мода, 31
- Статистическая
топография, 6, 76
эквивалентность, 55

Теорема взаимности, 13, 20

Уравнение

Гамильтона, 22

Гамильтона–Якоби, 22, 56

Гельмгольца, 8, 9, 13

Лиувилля, 59, 91–107

 обратное, 93–94

Максвелла, 8

Фоккера–Планка, 33, 47, 49, 51, 55, 106

 обратное, 109–111

 прямое, 109, 111

 обратное, 90

 параболическое, 14, 17, 22, 61

 обобщенное, 14

 переноса, 21

Фазовый экран, 22, 44, 68–71

Формула Фурутцу–Новикова, 25, 98, 107,

 120

Функция

Бесселя, 29

Вигнера, 27, 58

Ганкеля, 11

Дирака, 85, 89, 95

Хевисайда, 89, 92, 95

индикаторная, 59, 91–107

когерентности, 25

ошибок (интеграл вероятностей), 79,

 116

полином Лежандра, 33

характеристическая, 53

Характеристические кривые

 лучи, 22, 47–56

Характеристический функционал, 95

Эйконал, 56

Явление переброса в сингулярных систе-

 мах, 110