

В.И. КЛЯЦКИН

КОГЕРЕНТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ  
В ДИНАМИКЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Том 1.

ДИФФУЗИЯ И КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ  
В СЛУЧАЙНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

Кляцкин В.И. **Когерентные явления в динамике стохастических систем.**  
 В 3 т. Том 1. Диффузия и кластеризация пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках.

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН  
 klyatskin@yandex.ru  
 http://klyatskinvalery.narod.ru

Настоящий электронный вариант монографии, представляет переработку второго тома монографии [11], дополненного необходимой информацией из первого тома. Для удобства пользования материал разбит на три небольших совершенно независимых тома, так как в них рассматриваются разные физические проблемы, не связанные друг с другом.

В первом томе на основе функционального подхода с единой точки зрения рассматриваются задачи о диффузии пассивной примеси в случайных потоках как в лагранжевом, так и эйлеровом описании. Основное внимание концентрируется на описании когерентных явлений на основе идей статистической топографии. Эти явления, происходящие с вероятностью равной единице, осуществляются практически во всех реализациях процесса диффузии примеси. К ним относятся такие явления как кластеризация частиц и поля примеси в случайных сжимаемых полях скоростей, имеющих потенциальную составляющую, кластеризация малоинерционных частиц в случайных несжимаемых полях скоростей, резкое обострение градиентов поля плотности и возникновение фрактальной структуры изолиний постоянной концентрации в бездивергентных полях скоростей. Все эти явления анализируются на основе единого подхода, основанного на анализе одноточечных пространственно-временных плотностей вероятностей.

Во втором томе рассматривается задача о распространении плоских волн в слоистых средах, которая описывается одномерной краевой задачей и традиционно привлекает внимание многих исследователей. Это обусловлено, с одной стороны, ее простотой по сравнению с аналогичными задачами для двух и трех измерений, а с другой стороны, ее важностью для понимания процесса распространения волн в случайных средах. Учитывая, что одномерная задача допускает точное асимптотическое решение, можно проследить на ее примере влияние различных моделей, параметров среды и краевых условий на статистические характеристики волнового поля.

В третьем томе рассматривается проблема статистического описания волнового поля при распространении волн в случайных многомерных средах в рамках приближения квазиоптики на основе параболического уравнения (в том числе и задача формирования каустической структуры волнового поля). Эти проблемы описываются как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных, и каждая из них распадается на большое множество отдельных задач, представляющих самостоятельный физический интерес.

Для научных работников, специализирующихся в областях гидродинамики, прикладной математики, теоретической и математической физики, имеющих дело со стохастическими динамическими системами, а также для студентов старших курсов и аспирантов.

## Содержание

<b>Предисловие</b> .....	<b>5</b>
<b>Глава 1. Основные особенности задачи и определяющие уравнения</b> ...	<b>8</b>
1.1. Малоинерционная примесь .....	8
1.2. Безынерционная примесь .....	9
1.2.1. Частицы в поле случайных скоростей .....	10
1.2.2. Связь лагранжева и эйлерова описаний .....	13
<b>Глава 2. Статистический анализ диффузии безынерционной примеси</b> <b>23</b>	
2.1. Общие замечания .....	23
2.2. Приближение дельта-коррелированного во времени поля скоростей ...	25
2.2.1. Лагранжево описание (диффузия частиц) .....	25
2.2.2. Эйлерово описание .....	34
2.3. Учет дополнительных факторов .....	40
2.3.1. Плоско-параллельный средний поток .....	40
2.3.2. Учет молекулярной диффузии .....	42
2.3.3. Условия применимости дельта-коррелированного приближения .	45
2.3.4. Диффузионное приближение .....	46
2.4. Особенности диффузии примеси в случайных волновых полях .....	49
2.4.1. Лагранжево описание .....	51
2.4.2. Эйлерово описание .....	55
<b>Глава 3. Диффузия и кластеризация примеси в случайных бездивергентных потоках</b> .....	<b>60</b>
3.1. Диффузия и кластеризация плавучей примеси .....	60
3.1.1. Плавучая примесь на случайной поверхности $z(\mathbf{R}, t)$ .....	61
3.2. Диффузия и кластеризация малоинерционной примеси .....	63
3.2.1. Особенность диффузии малоинерционных частиц (лагранжево описание) .....	64
3.2.2. Диффузия малоинерционной примеси в эйлеровом описании ...	66
3.2.3. Пространственные корреляции поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ .....	68
3.2.4. Корреляции пространственных производных поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ .....	69
3.2.5. Временной корреляционный тензор поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ .....	71
3.2.6. Об условиях применимости полученных результатов .....	73
3.3. Диффузия и кластеризация примеси с учетом вращения .....	73
3.3.1. Пространственные корреляции поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ .....	75
3.3.2. Временной корреляционный тензор поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ .....	77

<b>Глава 4. Диффузия и кластеризация оседающей примеси в случайных потоках</b> .....	<b>80</b>
4.1. Текущее состояние проблемы и основные уравнения .....	80
4.1.1. Диффузия частиц (лагранжево описание) .....	81
4.1.2. Эйлерово описание поля плотности примеси .....	82
4.2. Диффузия и кластеризация поля плотности оседающей безынерционной примеси .....	83
4.3. Учет малой инерционности оседающей примеси .....	89
4.3.1. Общие замечания .....	89
4.3.2. Диффузионное приближение .....	91
4.3.3. Пространственно-временной корреляционный тензор поля $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$ .....	92
4.3.4. Пространственно-временной корреляционный тензор поля $\text{div } \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$ .....	94
<b>Приложения. Элементы математического аппарата для описания когерентных явлений</b> .....	<b>98</b>
<b>Глава А. Некоторые общие характеристики динамических систем</b> .....	<b>98</b>
А.1. Вариационные (функциональные) производные .....	98
А.2. Принцип динамической причинности .....	102
А.3. Уравнение Лиувилля .....	103
<b>Глава Б. Статистические характеристики случайных процессов и полей</b> <b>106</b>	
Б.1. Общие замечания .....	106
Б.2. Расщепление корреляций для гауссовых случайных процессов и полей .....	107
<b>Глава В. Статистическая топография случайных процессов и полей</b> ... <b>111</b>	
В.1. Случайные процессы .....	111
В.1.1. Типичная реализация случайного процесса .....	111
В.1.2. Статистика числа точек пересечения процесса с прямой .....	112
В.1.3. Простейшие примеры случайных процессов .....	113
В.2. Случайные поля .....	115
<b>Глава Г. Приближение дельта-коррелированного гауссова случайного поля</b> .....	<b>117</b>
Г.1. Уравнение Фоккера–Планка .....	117
Г.2. Плотность вероятностей перехода .....	119
Г.3. Об условиях применимости уравнения Фоккера–Планка .....	120
Г.4. Простейшие марковские случайные процессы .....	121
Г.4.1. Винеровский случайный процесс .....	121
Г.4.2. Винеровский случайный процесс со сносом .....	122
Г.4.3. Логарифмически нормальный процесс .....	123
Г.5. Диффузионное приближение .....	126
<b>Список литературы</b> .....	<b>128</b>
<b>Предметный указатель</b> .....	<b>134</b>

## Предисловие

Задача о распространении пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках является одной из проблем статистической гидродинамики и имеет большое значение для решения экологических задач диффузии примеси в атмосфере Земли и океанах [27, 42, 60, 74, 82], диффузии в пористых средах [43] и крупномасштабного распределения массы на последней стадии формирования Вселенной [89]. Изучение ее интенсивно ведется начиная с пионерских работ [35, 36, 94, 95]. В дальнейшем многими исследователями были получены разнообразные уравнения, описывающие статистические характеристики поля примеси как в эйлеровом, так и лагранжевом описании. Вывод таких уравнений для различных моделей флуктуирующих параметров в различных приближенных схемах (как для моментных функций поля плотности примеси, так и для ее плотности вероятностей) и их анализ продолжается интенсивно и в последнее десятилетие.

В настоящей монографии рассматриваются вопросы только классической диффузии примеси, анализ которых осуществляется на основе стохастических уравнений в частных производных. В книге не обсуждаются вопросы аномальной диффузии (субдиффузии и супердиффузии), описываемые уравнениями в дробных производных. Информацию о таких диффузионных процессах можно найти, например, в обзорных работах [2, 29, 31, 37, 80].

В последнее время внимание и теоретиков, и экспериментаторов привлекает вопрос о связи динамики усредненных статистических характеристик решения задачи с поведением решения в отдельных реализациях. Это особенно актуально для геофизических проблем, связанных с атмосферой и океаном, где, вообще говоря, отсутствует соответствующий ансамбль усреднения и экспериментаторы, как правило, имеют дело с отдельными реализациями.

Решение динамических задач для этих конкретных реализаций параметров среды практически безнадежно из-за их чрезвычайной математической сложности. В то же время исследователей интересуют основные особенности протекающих явлений, без отвращения на частности. Поэтому очень привлекательной оказалась идея использовать хорошо развитый математический аппарат случайных процессов и полей, т. е. вместо отдельных реализаций исследуемых процессов рассматривать статистические средние по всему ансамблю возможных реализаций. В настоящее время, например, практически все задачи физики атмосферы и океана в той или иной степени основываются на статистическом анализе.

Введение случайности в параметрах среды порождает стохастичность в самих физических полях. Индивидуальные реализации, например скалярных двумерных полей  $\rho(\mathbf{R}, t)$ ,  $\mathbf{R} = \{x, y\}$ , напоминают сложный горный ландшафт со случайно распределенными пиками, провалами, хребтами и перевалами. На рис. 0.1 приведены примеры реализации двух случайных полей разной статистической структуры.

Обычно используемые методы статистического усреднения (т. е. вычисления средних типа среднего значения —  $\langle \rho(\mathbf{R}, t) \rangle$ , пространственно-временной корреляционной функции —  $\langle \rho(\mathbf{R}, t) \rho(\mathbf{R}', t') \rangle$  и т. п., где через  $\langle \dots \rangle$  обозначено усреднение по ансамблю реализаций случайных параметров) сглаживают качественные особенности отдельных реализаций, и зачастую полученные статистические характеристики не только не имеют ничего общего с поведением отдельных реализаций, но даже, на первый взгляд, им противоречат. Так, например, статистическое усреднение по всем реализациям делает поле средней концентрации пассивной примеси в случайном поле скоростей все более гладким, в то время как каждая его отдельная реализация, за счет

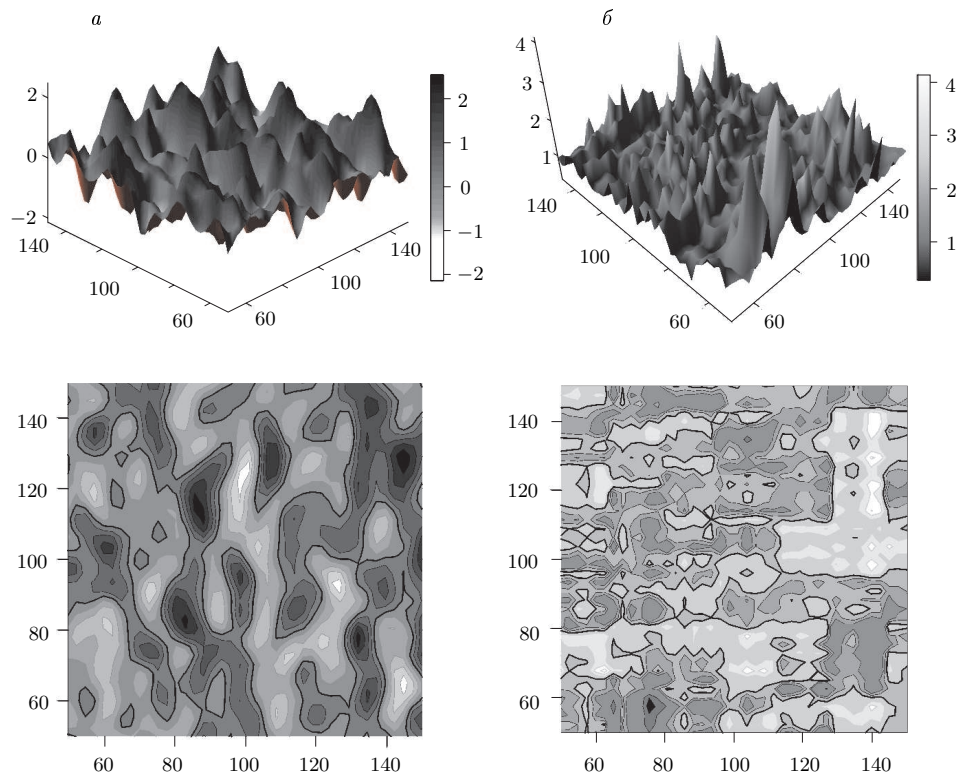


Рис. 0.1. Реализации гауссова с нулевым средним значением (*a*) и логнормального (*b*) полей и их топографические линии уровня. Жирными кривыми на нижних рисунках обозначены линии уровня, соответствующие значениям 0 (*a*) и 1 (*b*)

перемешивания областей с существенно разной концентрацией, стремится стать все более изрезанной в пространстве.

Таким образом, статистические средние указанного типа обычно характеризуют «глобальные» пространственно-временные масштабы области, где осуществляются стохастические процессы, и ничего не говорят о деталях развития процессов внутри ее. А такие детали для данного примера существенно зависят от характера поля скоростей — является оно дивергентным или бездивергентным. Так, в первом случае с вероятностью, равной единице, в отдельных реализациях образуются *кластеры* — компактные области повышенной концентрации примеси, окруженные обширными областями плотности низкой концентрации. Однако при этом все статистические моменты расстояния между частицами экспоненциально растут во времени, т. е. имеет место статистическое разбегание частиц в среднем.

Такие физические процессы и явления, происходящие с вероятностью единица, будем называть *когерентными* процессами и явлениями (см., например, [8, 9, 11, 14]). Подобную «статистическую когерентность» можно рассматривать как некую организацию сложной динамической системы, и выделение ее *статистически устойчивых характеристик* аналогично понятию *когерентности* как *самоорганизации* многокомпонентных систем, возникающих из хаотических взаимодействий их элементов

(см., например, [81]). Получить же ответ на вопрос о том, происходит ли такое явление с вероятностью единица, вообще говоря, достаточно сложно. Однако для ряда задач в рамках простейших моделей флуктуирующих параметров это удастся сделать путем аналитического анализа. В других случаях убедиться в этом можно с помощью численного моделирования или из анализа экспериментальных данных.

Полная статистика (например, полная совокупность всех  $n$ -точечных пространственно-временных моментных функций), безусловно, содержит всю информацию о динамической системе. Однако на практике удастся исследовать лишь некоторые простейшие статистические характеристики, связанные, главным образом, с одновременными и одноточечными распределениями вероятностей. Поэтому возникает вопрос: как, зная такого рода статистические характеристики и особенности системы, получить основные количественные и качественные особенности поведения отдельных ее реализаций?

Ответ на этот вопрос дают *методы статистической топографии*. На важность использования таких методов было указано еще в книге [101], где этот термин, по-видимому, и был впервые введен. Методы статистической топографии позволяют переосмыслить «философию» статистического анализа динамических стохастических систем, что может быть полезно и для экспериментаторов, планирующих статистическую обработку экспериментального материала. Все эти вопросы подробно обсуждаются в книге. Задачи диффузии примеси в случайных гидродинамических потоках описываются как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных, и каждая из них распадается на большое множество отдельных задач, представляющих самостоятельный физический интерес.

В Приложениях обсуждаются основные идеи математического аппарата, позволяющего описывать когерентные эффекты в стохастических динамических системах и, в частности, диффузию и кластеризацию пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках.

## Глава 1

### ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ЗАДАЧИ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

#### 1.1. Малоинерционная примесь

Диффузия поля плотности числа инерционных частиц, приходящихся на единицу объема,  $n(\mathbf{r}, t)$ , движущихся в случайном гидродинамическом потоке, описываемом *эйлеровым* полем скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ , удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \right) n(\mathbf{r}, t) = 0, \quad n(\mathbf{r}, 0) = n_0(\mathbf{r}). \quad (1.1)$$

Здесь через  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  обозначено поле скоростей частиц в гидродинамическом потоке.

Общее число частиц при этом сохраняется в процессе эволюции, т. е.

$$N_0 = \int d\mathbf{r} n(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} n_0(\mathbf{r}) = \text{const.}$$

Если плотность частицы —  $\rho_0$ , то эволюция поля плотности  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 n(\mathbf{r}, t)$  пассивной примеси, движущейся в гидродинамическом потоке, также описывается уравнением неразрывности

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}),$$

которое можно записать в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.2)$$

Мы не учитываем эффекта действия молекулярной диффузии, что справедливо на начальных этапах развития диффузии. При этом общая масса примеси сохраняется в процессе эволюции, т. е.

$$M = M(t) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r}) = \text{const.}$$

Поле скоростей примеси  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  в гидродинамическом потоке  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  для малоинерционных частиц можно описывать квазилинейным уравнением в частных производных (см., например, [68–73])

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -\lambda [\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)], \quad (1.3)$$

которое мы будем рассматривать как феноменологическое. В общем случае возможны неединственность решения уравнения (1.3), существование разрывов и т. п. Однако в асимптотическом случае малой инерционности частиц (параметр  $\lambda \rightarrow \infty$ ),

который и представляет для нас интерес, решение задачи будет единственным на разумном интервале времени. Отметим, что линейный по полю скоростей  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  член  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \lambda \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  в правой части (1.3) является известной *формулой Стокса* для силы сопротивления, действующей на медленно движущуюся частицу. При аппроксимации частицы шаром радиуса  $a$  параметр  $\lambda = 6\pi a \eta / m_p$ , где  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости, а  $m_p$  — масса частицы (см., например, [22, 24]).

В общем случае гидродинамическое поле скоростей имеет вид:  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , где  $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)$  — детерминированная составляющая (средний поток), а  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — случайная составляющая. Случайное поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , в свою очередь, может иметь как соленоидальную (для которой  $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ ), так и потенциальную (для которой  $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$ ) составляющие.

Уравнения (1.1)–(1.3) составляют *эйлерово описание* эволюции поля плотности числа малоинерционных частиц и поля плотности пассивной примеси. Эти уравнения являются уравнениями в частных производных первого порядка и могут быть решены методом характеристик.

Вводя характеристические кривые  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{V}(t)$ , описывающие движения частицы с помощью уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{V}(\mathbf{r}(t), t), & \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_0, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{V}(t) &= -\lambda [\mathbf{V}(t) - \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t)], & \mathbf{V}(0) &= \mathbf{V}_0(\mathbf{r}_0), \end{aligned} \quad (1.4)$$

перейдем от (1.1) и (1.2) к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n(t) &= -n(t) \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}(t), t)}{\partial \mathbf{r}}, & n(0) &= n_0(\mathbf{r}_0), \\ \frac{d}{dt} \rho(t) &= -\rho(t) \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}(t), t)}{\partial \mathbf{r}}, & \rho(0) &= \rho_0(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Уравнения (1.4) являются обычными уравнениями Ньютона для динамики частицы с линейной силой трения  $\mathbf{F}(t) = -\lambda \mathbf{V}(\mathbf{r}(t), t)$  (сила Стокса) под действием случайной силы  $\mathbf{f}(t) = \lambda \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t)$ , порожденной гидродинамическим потоком. Отметим, что результаты численного моделирования стохастической системы уравнений (1.4) приведены в работах [75, 100].

Решения уравнений (1.5) имеют наглядную геометрическую интерпретацию. Они описывают эволюцию плотности числа частиц и плотности пассивной примеси в окрестности фиксированной частицы, траектория которой определяется решением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  системы уравнений (1.4). Причем, как видно из (1.5), плотность числа частиц и плотность пассивной примеси в дивергентных потоках меняется, увеличиваясь в областях сжатия и уменьшаясь в областях разрежения среды.

#### 1.2. Безынерционная примесь

Для безынерционных частиц параметр  $\lambda \rightarrow \infty$  и, как следует из уравнения (1.3),

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t).$$

В этом случае траектория частицы и ее плотность в гидродинамическом потоке с полем скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \\ \frac{d}{dt}\rho(t) &= -\rho(t)\frac{\partial\mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t)}{\partial\mathbf{r}}, \quad \rho(0) = \rho_0(\mathbf{r}_0), \end{aligned} \quad (1.6)$$

а эйлерово поле плотности удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial\mathbf{r}}\rho(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.7)$$

Таким образом, для безынерционных частиц задача определения их траекторий в гидродинамическом потоке является чисто кинематической задачей.

### 1.2.1. Частицы в поле случайных скоростей

Остановимся на стохастических особенностях решения задачи (1.6) для системы частиц в отсутствие среднего потока ( $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = 0$ ). С формальной точки зрения, исходя из уравнения (1.6), каждая частица движется независимым образом. Однако если случайное поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  имеет конечный пространственный радиус корреляции  $l_{\text{cor}}$ , то частицы, расстояние между которыми меньше  $l_{\text{cor}}$ , находятся в общей зоне влияния случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , и могут появиться новые коллективные особенности в динамике такой системы частиц.

Для стационарного поля скоростей,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r})$ , уравнение (1.6) упрощается и принимает вид

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0. \quad (1.8)$$

Отсюда ясно, что стационарные точки  $\tilde{\mathbf{r}}$ , в которых  $\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{r}}) = 0$ , остаются неподвижными точками. При этом, в зависимости от того, являются они устойчивыми или неустойчивыми, они будут притягивать или отталкивать частицы, находящиеся в их окрестности. В силу случайности функции  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  положение точек  $\tilde{\mathbf{r}}$  также случайно.

Аналогичная ситуация должна иметь место и в общем случае пространственно-временного случайного поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

Если какие-то точки  $\tilde{\mathbf{r}}$  в течение достаточно большого времени остаются устойчивыми, то в отдельных реализациях случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  в их окрестностях должны образовываться кластерные области частиц (т.е. компактные области повышенной концентрации частиц, расположенные в большей степени в разреженных зонах). Если же смена устойчивости этих точек на неустойчивость происходит достаточно быстро и частицы не успевают значительно перестроиться, то кластерных областей образовываться не будет.

Численное моделирование (см. работы [21, 86, 103]) показывает, что динамика системы частиц существенно различается в зависимости от того, является ли случайное поле скоростей бездивергентным или дивергентным. Так, на рис. 1.1, *a* для конкретной реализации бездивергентного стационарного во времени поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  схематически изображена эволюция системы частиц (двумерный случай), равномерно расположенных в круге, в безразмерном времени, связанном со статистическими параметрами поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ . В этом случае площадь, ограниченная контуром, сохраняется и частицы относительно равномерно заполняют область, ограниченную деформированным контуром. Возникает лишь сильная изрезанность фрактального характера

этого контура. Такое явление интенсивно изучается в настоящее время и получило название *хаотической адвекции* (см., например, [1]).

Для случая же дивергентного поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  частицы, равномерно расположенные в квадрате в начальный момент времени, в процессе временной эволюции образуют кластерные области. Результаты численного моделирования для этого случая приведены на рис. 1.1, *б*. Подчеркнем, что образование кластеров — чисто кинематический эффект. Очевидно, что при усреднении по ансамблю реализаций случайного поля скоростей такая особенность динамики частиц исчезает.

Увидеть как происходит кластеризация частиц, можно на простейшем примере [15], в котором случайное поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  имеет структуру

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t)f(\mathbf{r}), \quad (1.9)$$

где  $\mathbf{v}(t)$  — случайный векторный процесс, а детерминированная функция

$$f(\mathbf{r}) = \sin 2(\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (1.10)$$

является функцией одной переменной. Отметим, что такой вид функции  $f(\mathbf{r})$  соответствует первому члену ряда разложения функции  $f(\mathbf{r})$  по гармоническим составляющим и обычно используется при численном моделировании задачи [21, 103].

В этом случае уравнение (1.6) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t)\sin 2(\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0.$$

Для такой модели движение частицы по направлениям вектора  $\mathbf{k}$  и перпендикулярно вектору  $\mathbf{k}$  расщепляется, и если выбрать ось  $x$  в направлении вектора  $\mathbf{k}$ , то уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= v_x(t)\sin(2kx), \quad x(0) = x_0, \\ \frac{d}{dt}\mathbf{R}(t) &= \mathbf{v}_R(t)\sin(2kx), \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Решение первого уравнения в (1.11) имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{k}\arctg\left[e^{T(t)}\text{tg}(kx_0)\right], \quad (1.12)$$

где

$$T(t) = 2k\int_0^t d\tau v_x(\tau). \quad (1.13)$$

Учитывая равенство, вытекающее из (1.12),

$$\sin(2kx) = \sin(2kx_0)\frac{1}{e^{-T(t)}\cos^2(kx_0) + e^{T(t)}\sin^2(kx_0)},$$

последнее уравнение в (1.11) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\mathbf{R}(t|\mathbf{r}_0) = \sin(2kx_0)\frac{\mathbf{v}_R(t)}{e^{-T(t)}\cos^2(kx_0) + e^{T(t)}\sin^2(kx_0)}.$$

И, следовательно,

$$\mathbf{R}(t|\mathbf{r}_0) = \mathbf{R}_0 + \sin(2kx_0)\int_0^t d\tau\frac{\mathbf{v}_R(\tau)}{e^{-T(\tau)}\cos^2(kx_0) + e^{T(\tau)}\sin^2(kx_0)}. \quad (1.14)$$

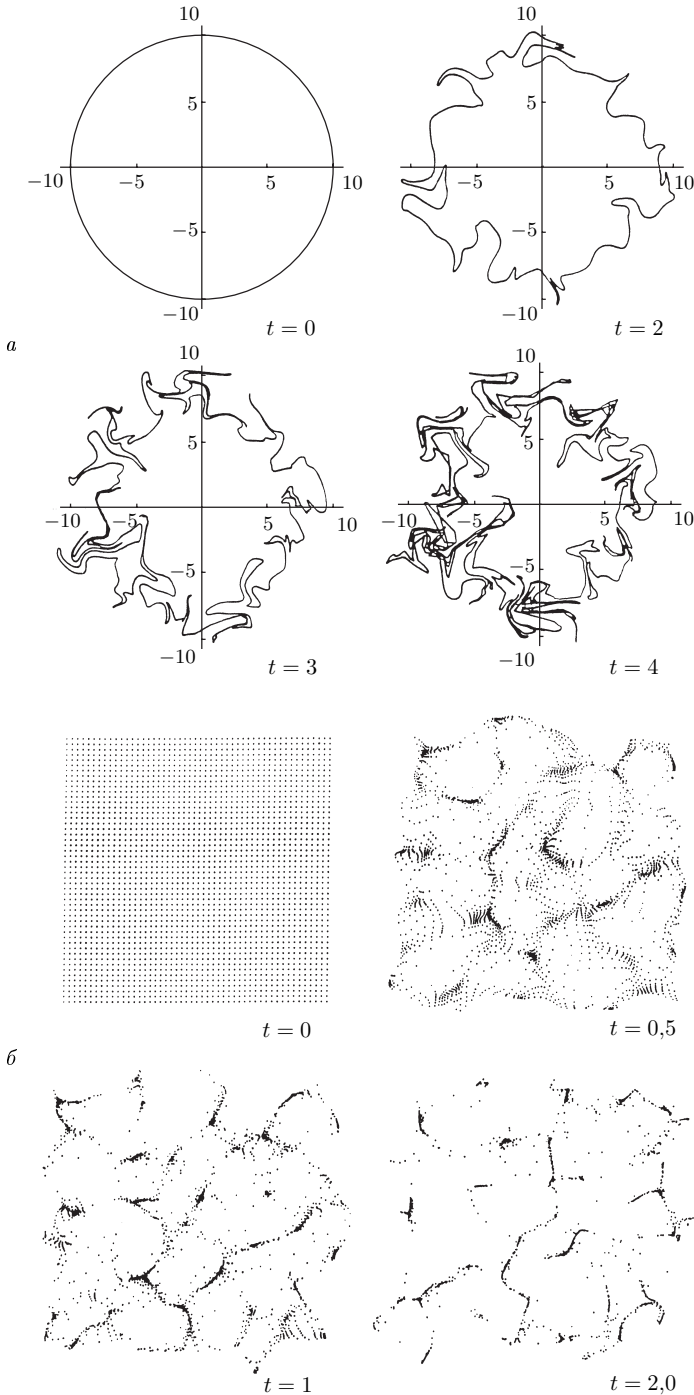


Рис. 1.1. Результаты численного моделирования диффузии системы частиц, описываемых уравнением (1.8) в соленоидальном (а) и дивергентном (б) случайных стационарных полях скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$

Таким образом, если начальное положение частицы  $x_0$  такое, что

$$kx_0 = n\frac{\pi}{2}, \tag{1.15}$$

где  $n = 0, \pm 1, \dots$ , то частица будет неподвижной и  $\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{r}_0$ .

Равенства (1.15) определяют в общем случае плоскости или в одномерном случае — точки. Они соответствуют нулям поля скоростей. Устойчивость этих точек, однако, зависит от знака функции  $\mathbf{v}(t)$ , который изменяется в процессе эволюции. В результате можно ожидать, что частицы будут сгущаться в окрестностях этих точек, если  $v_x(t) \neq 0$ , что и должно соответствовать кластеризации.

Для бездивергентного поля скорости, когда  $v_x(t) = 0$ , и, следовательно,  $T(t) \equiv 0$ ,

$$x(t|x_0) \equiv x_0, \quad \mathbf{R}(t|\mathbf{r}_0) = \mathbf{R}_0 + \sin 2(kx_0) \int_0^t d\tau \mathbf{v}_R(\tau),$$

т. е. никакой кластеризации не наблюдается.

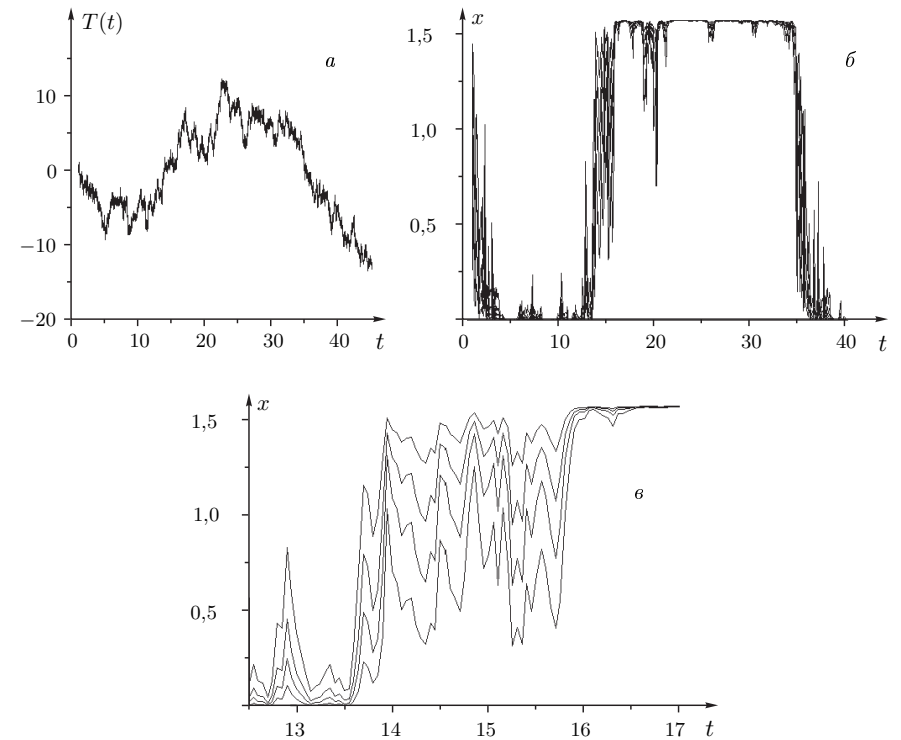


Рис. 1.2. Кусок реализации случайного процесса  $T(t)$  (а), полученный путем численного интегрирования равенства (1.13) для одной реализации случайного процесса  $v_x(t)$  и используемый для расчета временной эволюции  $x$  координат четырех частиц (б), (в)

На рис. 1.2, а представлен кусок реализации случайного процесса  $T(t)$ , полученный путем численного интегрирования равенства (1.13) для одной реализации случайного процесса  $v_x(t)$ , используемый для численного моделирования временной эволюции

координат четырех частиц  $x(t)$  ( $x \in (0, \pi/2)$ ) с начальными координатами  $x_0(i) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{i}{5}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) (рис. 1.2, б). Из рис. 1.2, б видно, что частицы в безразмерный момент времени  $t \approx 4$  образуют кластер в окрестности точки  $x = 0$ . Далее в момент времени  $t \approx 16$  первоначальный кластер исчезает и образуется новый кластер в окрестности точки  $x = \frac{\pi}{2}$ . В момент времени  $t \approx 40$  снова образуется кластер в окрестности точки  $x = 0$  и т. д. При этом частицы в кластерах помнят свою предысторию и расходятся на значительные расстояния в переходных временных областях (рис. 1.2, в).

Таким образом, видим, что в рассматриваемом примере кластер, как цельное образование, не переходит из одной области пространства в другое, а разрушается с последующим образованием нового. При этом время существования кластеров значительно больше, чем переходное время. По-видимому, это свойство конкретной рассматриваемой модели поля скоростей, и возникает оно из-за стационарности точек (1.15).

Что касается диффузии частиц по  $y$  оси, то в этом направлении образования кластеров не наблюдается.

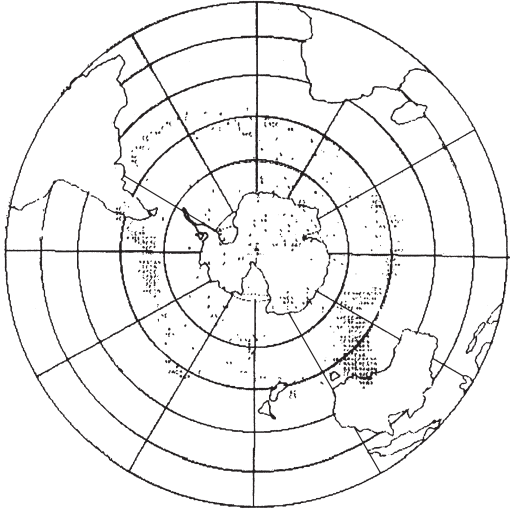


Рис. 1.3. Распределение баллонов в атмосфере через 105 суток после начала численного эксперимента

Отметим, что впервые, по-видимому, такого рода кластеризация для системы частиц была обнаружена в работах [76–79], где в рамках простейших уравнений динамики атмосферы проводилось численное моделирование так называемого *Eole-эксперимента*. В рамках этого глобального эксперимента в 1970–1971 годах было запущено в Аргентине 500 баллонов постоянной плотности, которые распространялись по всему южному полушарию на высоте примерно в 12 км. На рис. 1.3 представлено распределение баллонов по южному полушарию на 105 суток после начала численного моделирования этого процесса [78], из которого ясно видно, что баллоны концентрируются в группы, что и соответствует кластеризации. Результаты статистической обработки расположения баллонов можно найти, например, в работах [26, 45, 83].

### 1.2.2. Связь лагранжева и эйлерова описаний

Решение системы уравнений (1.6) зависит от характеристического параметра  $\mathbf{r}_0$  — начальной координаты частицы:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0), \quad \rho(t) = \rho(t|\mathbf{r}_0), \quad (1.16)$$

что будем отмечать вертикальной чертой. Компоненты вектора  $\mathbf{r}_0$ , однозначно определяющего положение произвольной частицы, называют ее *лагранжескими координатами*. При этом уравнения (1.6) соответствуют *лагранжескому описанию* эволюции поля плотности пассивной примеси. Связь между эйлеровым и лагранжеским описаниями задается первым из равенств (1.16). Разрешив его относительно  $\mathbf{r}_0$ , получим соотношение, выражающее лагранжеские координаты через эйлеровы:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t). \quad (1.17)$$

Исключая затем, с помощью (1.17), зависимость от  $\mathbf{r}_0$  в оставшемся равенстве (1.16), вернемся к эйлерову описанию поля плотности пассивной примеси:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(t|\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)) = \int d\mathbf{r}_0 \rho(t|\mathbf{r}_0) j(t|\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \quad (1.18)$$

где введена новая функция, называемая *расходимостью*:

$$j(t|\mathbf{r}_0) = \det \|j_{ik}(t|\mathbf{r}_0)\| = \det \left\| \frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0)}{\partial r_{0k}} \right\|.$$

Дифференцируя (1.6) по компонентам вектора  $\mathbf{r}_0$ , приходим к уравнениям для элементов якобиевой матрицы  $j_{ik}(t|\mathbf{r}_0)$ :

$$\frac{d}{dt} j_{ik}(t|\mathbf{r}_0) = \frac{\partial U_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} j_{lk}(t|\mathbf{r}_0), \quad j_{ik}(0|\mathbf{r}_0) = \delta_{ik}.$$

Отсюда следует, что определитель этой матрицы (Якобиан) описывается уравнением

$$\frac{d}{dt} j(t|\mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} j(t|\mathbf{r}_0), \quad j(0|\mathbf{r}_0) = 1. \quad (1.19)$$

Величина  $j(t|\mathbf{r}_0)$  является количественной мерой степени сжатия или растяжения физически бесконечно малых жидких частиц. Сопоставляя уравнения (1.6) и (1.19), видим, что

$$\rho(t|\mathbf{r}_0) = \frac{\rho_0(\mathbf{r}_0)}{j(t|\mathbf{r}_0)}. \quad (1.20)$$

Таким образом, выражение (1.18) можно переписать в виде равенства

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \quad (1.21)$$

устанавливающего связь между лагранжескими и эйлеровыми характеристиками.

Дельта-функция в правой части (1.21) является *индикаторной функцией* для положения лагранжеской частицы, и, следовательно, после усреднения равенства (1.21) по ансамблю реализаций случайного поля скоростей получаем хорошо известную связь средней плотности пассивной примеси в эйлеровом описании с одновременной плотностью вероятностей

$$P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0) = \langle \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) \rangle$$



положения безынерционной лагранжевой частицы (см., например, [27]) в виде

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0).$$

Очевидно, что приведенное равенство справедливо и для малоинерционных частиц, описываемых уравнениями (1.4).

Аналогичным образом получаем и связь пространственной корреляционной функции поля плотности в эйлеровом описании,

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle \rho(\mathbf{r}_1, t) \rho(\mathbf{r}_2, t) \rangle,$$

с совместной плотностью вероятностей положения двух частиц,

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t | \mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_{02}) = \langle \delta(\mathbf{r}_1(t | \mathbf{r}_{01}) - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_2(t | \mathbf{r}_{02}) - \mathbf{r}_2) \rangle,$$

в виде равенства

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \int d\mathbf{r}_{01} \int d\mathbf{r}_{02} \rho_0(\mathbf{r}_{01}) \rho_0(\mathbf{r}_{02}) P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t | \mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_{02}).$$

Для бездивергентного поля скоростей ( $\text{div } \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0$ ) расходимость частицы, так же как и ее плотность, сохраняются, т. е.

$$j(t | \mathbf{r}_0) = 1, \quad \rho(t | \mathbf{r}_0) = \rho_0(\mathbf{r}_0),$$

и, следовательно, решение уравнения (1.7) в этом случае имеет структуру

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)).$$

Остановимся теперь на стохастических особенностях решения задачи (1.7). Удобно анализировать динамику случайных полей в *топографических* понятиях. Так, для бездивергентного поля скоростей эволюция во времени контура постоянных значений концентрации  $\rho = \text{const}$  совпадает с динамикой частиц в этом поле скоростей и совпадает, следовательно, с динамикой, приведенной на рис. 1.1, *a*. В этом случае площадь, ограниченная контуром, сохраняется и, как видно из рисунка, возникает сильная изрезанность картины *фрактального характера*, т. е. происходит как обострение градиентов, так и возникновение динамики контура на все меньших и меньших масштабах. В другом предельном случае (дивергентного поля скоростей) площадь, ограниченная контуром, стремится к нулю и поле плотности сжимается, образуя *кластеры*. Примеры численного моделирования для этого случая приведены в работах [21, 103]. При усреднении по ансамблю реализаций эти особенности динамики исчезают.

Проследить образование кластеров в эйлеровом описании можно на примере случайного поля скоростей вида (1.9), (1.10). В этом случае поле плотности  $\rho(\mathbf{r}, t)$  описывается выражением [15]

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}_0) \frac{1}{e^{T(t)} \cos^2(kx) + e^{-T(t)} \sin^2(kx)}, \quad (1.22)$$

где функция  $T(t)$  описывается формулой (1.13).

Для бездивергентного поля скорости, когда  $v_x(t) = 0$ ,  $T(t) \equiv 0$ ,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \left( \mathbf{r} - \sin(2kx) \int_0^t d\tau \mathbf{v}(\tau) \right).$$

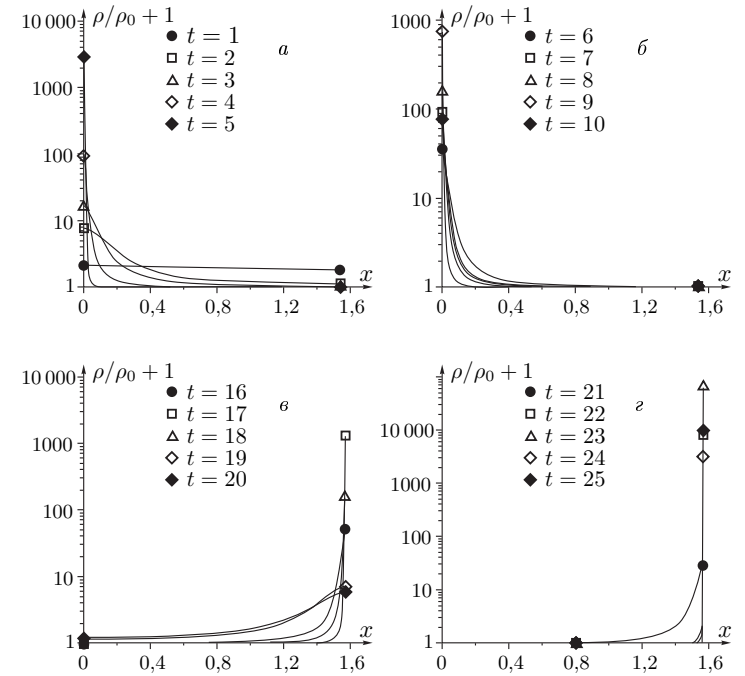


Рис. 1.4. Пространственно-временная эволюция эйлерова поля плотности, описываемая формулой (1.23)

В частном случае, когда начальное распределение плотности не зависит от  $\mathbf{r}$ , т. е.  $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0$ , равенство (1.22) упрощается и принимает вид

$$\rho(\mathbf{r}, t) / \rho_0 = \frac{1}{e^{T(t)} \cos^2(kx) + e^{-T(t)} \sin^2(kx)}. \quad (1.23)$$

На рис. 1.4, *a-g* представлена пространственно-временная эволюция эйлерова поля плотности  $1 + \rho(\mathbf{r}, t) / \rho_0$ , рассчитанная по формуле (1.23) в безразмерных переменных (единица добавлена, чтобы не иметь проблем с близкими к нулю значениями плотности в логарифмическом масштабе). Из этих рисунков наглядно видно последовательное перетекание поля плотности к узким окрестностям точек  $x \approx 0$  и  $x \approx \pi/2$ , т. е. образование кластеров. Так, на рис. 1.4, *a, б* изображена временная последовательность ( $t = 1 \div 10$ ) образования кластера в окрестности точки  $x \approx 0$ . На рис. 1.4, *в, г* изображена временная последовательность ( $t = 16 \div 25$ ) перетекания поля плотности из окрестности точки  $x \approx 0$  в окрестность точки  $x \approx \pi/2$ , т. е. ликвидация кластера в окрестности  $x \approx 0$  и рождение нового кластера в окрестности  $x \approx \pi/2$ . Далее этот процесс повторяется во времени. «Время жизни» таких кластеров, как видно из рисунков, для рассматриваемой модели имеет порядок «времени их формирования».

Итак, мы рассмотрели простейшую модель для диффузии примеси (частиц и эйлерова поля плотности) в случайном поле скоростей, в которой наглядно виден процесс образования кластерной структуры. Особенностью рассмотренной модели является фиксированный характер точек, где образуются кластеры. Это конечно, уменьшает ценность рассмотренной модели.

Однако эта модель позволяет понять основное отличие диффузии в дивергентных и бездивергентных полях скоростей. В бездивергентных (несжимаемых) полях скорости частицы (и, следовательно, поле плотности) не успевают притягиваться к устойчивым центрам притяжения за время их существования и частицы слегка флуктуируют относительно своего первоначального местонахождения. В дивергентном же (сжимаемом) поле скоростей за то же время существования устойчивых центров притяжения частицы успевают притянуться к ним, так как этот процесс притяжения убыстряется экспоненциальным образом, что наглядно проявляется в формуле (1.23).

Из описанной картины ясно, что динамическое уравнение (1.7) в качестве модельного уравнения, описывающего физическую реальность, может использоваться только на ограниченном интервале времени. Для более полного анализа необходимо включить в рассмотрение поле градиента концентрации примеси  $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$ , которое описывается уравнением (по повторяющимся индексам предполагается суммирование)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) p_i(\mathbf{r}, t) = -p_k(\mathbf{r}, t) \frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} - \rho(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^2 U(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i \partial r_i}, \quad (1.24)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{p}_0(\mathbf{r}) = \nabla \rho_0(\mathbf{r}).$$

Кроме того, следует учесть также эффект молекулярной диффузии (с коэффициентом молекулярной диффузии  $\mu$ ), сглаживающий упомянутое обострение градиентов, который описывается линейным уравнением в частных производных второго порядка:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = \mu \Delta \rho(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}). \quad (1.25)$$

### Замечание 1.1. Учет эффекта молекулярной диффузии

Отметим, что и в общем случае уравнения (1.25) можно воспользоваться статистической интерпретацией решения стохастического уравнения, содержащего производные первого порядка, а именно: если рассмотреть вспомогательное уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{V}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \tilde{\rho}(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (1.26)$$

где  $\mathbf{V}(t)$  — векторный гауссов процесс «белого шума» с характеристиками

$$\langle V_i(t) \rangle = 0, \quad \langle V_i(t) V_j(t') \rangle = 2\mu \delta_{ij} \delta(t - t'), \quad (1.27)$$

то

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \langle \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\mathbf{V}}.$$

Решение же самого уравнения (1.26), согласно равенству (1.21), можно записать в виде

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}),$$

и, следовательно,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) \langle \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{V}}, \quad (1.28)$$

где характеристическая кривая (траектория частицы) описывается динамическим уравнением

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{V}(t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0. \quad (1.29)$$

Усредняя теперь равенство (1.28) по ансамблю реализаций случайного поля  $\{\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\}$ , получаем окончательное равенство

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0), \quad (1.30)$$

где теперь одновременная плотность вероятностей положения лагранжевой частицы

$$P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0) = \langle \langle \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{V}} \rangle. \quad (1.31)$$

Таким образом, и для уравнения с частными производными второго порядка (1.3) можно рассматривать лагранжево описание на основе динамического уравнения (1.26). Аналогичным образом для пространственной корреляционной функции поля плотности в эйлеровом описании с учетом эффекта молекулярной диффузии,

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle \rho(\mathbf{r}_1, t) \rho(\mathbf{r}_2, t) \rangle,$$

получаем связь с совместной плотностью вероятностей положения двух частиц

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t|\mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_{02}) = \langle \delta(\mathbf{r}_1(t|\mathbf{r}_{01}) - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_2(t|\mathbf{r}_{02}) - \mathbf{r}_2) \rangle$$

в виде равенства

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \int d\mathbf{r}_{01} \int d\mathbf{r}_{02} \rho_0(\mathbf{r}_{01}) \rho_0(\mathbf{r}_{02}) P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t|\mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_{02}),$$

где совместная плотность вероятностей положения двух частиц

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t|\mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_{02}) = \langle \delta(\mathbf{r}_1(t|\mathbf{r}_{01}) - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_2(t|\mathbf{r}_{02}) - \mathbf{r}_2) \rangle_{\{\mathbf{V}\}, \mathbf{U}}$$

определяется из статистического анализа динамики двух частиц, описываемых теперь уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{r}_1(t) &= \mathbf{U}(\mathbf{r}_1, t) + \mathbf{V}_1(t), & \mathbf{r}_1(0) &= \mathbf{r}_{01}, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{r}_2(t) &= \mathbf{U}(\mathbf{r}_2, t) + \mathbf{V}_2(t), & \mathbf{r}_2(0) &= \mathbf{r}_{02}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где  $\mathbf{V}_1(t)$  и  $\mathbf{V}_2(t)$  — статистически независимые векторные процессы с параметрами (1.27).

◆

Итак, в лагранжевом представлении поведение безынерционных частиц и плотности пассивной примеси описывается обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями (1.6), (1.19). От них легко перейти к линейному уравнению Лиувилля для индикаторных функций в соответствующем фазовом пространстве. Для этого введем индикаторную функцию

$$\varphi_{\text{Lag}}(\mathbf{r}, \rho, j, t|\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) \delta(\rho(t|\mathbf{r}_0) - \rho) \delta(j(t|\mathbf{r}_0) - j), \quad (1.33)$$

в форме записи которой явно учтено, что решение исходных динамических уравнений зависит от лагранжевых координат  $\mathbf{r}_0$ . Дифференцируя (1.33) по времени и используя уравнения (1.6) и (1.19), приходим к уравнению Лиувилля, эквивалентному исходной задаче:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \varphi_{\text{Lag}}(\mathbf{r}, \rho, j, t|\mathbf{r}_0) &= \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial}{\partial j} j \right) \varphi_{\text{Lag}}(\mathbf{r}, \rho, j, t|\mathbf{r}_0), \\ \varphi_{\text{Lag}}(\mathbf{r}, \rho, j, 0|\mathbf{r}_0) &= \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \delta(\rho_0(\mathbf{r}_0) - \rho) \delta(j - 1). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Одновременная плотность вероятностей для решения статистических задач (1.6) и (1.19) совпадает с усредненным по ансамблю реализаций значением индикаторной функции:

$$P(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0) = \langle \varphi_{\text{Lag}}(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0) \rangle.$$

Для описания поля плотности в эйлеровом представлении введем индикаторную функцию, аналогичную (1.33),

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho), \quad (1.35)$$

сосредоточенную на поверхности  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$  в трехмерном случае или на контуре в двумерном случае. Она связана с лагранжевой индикаторной функцией равенством:

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \int d\mathbf{r}_0 \int_0^\infty j dj \varphi_{\text{Lag}}(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0),$$

и, следовательно, удовлетворяет уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho \varphi(\mathbf{r}, t; \rho)], \quad (1.36)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, 0; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho),$$

из которого видно, что принципиальные особенности возникают только для дивергентного поля скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ .

Одноточечная плотность вероятностей для решения динамического уравнения (1.7) в этом случае совпадает с усредненной по ансамблю реализаций индикаторной функцией:

$$P(\mathbf{r}, t; \rho) = \langle \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \rangle,$$

и, следовательно, одноточечная плотность вероятностей поля плотности в эйлеровом описании связана с одновременной плотностью вероятностей в лагранжевом описании равенством

$$P(\mathbf{r}, t; \rho) = \int d\mathbf{r}_0 \int_0^\infty j dj P(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0). \quad (1.37)$$

Эйлерова индикаторная функция дает богатую количественную и качественную информацию о геометрической структуре случайного поля плотности  $\rho(\mathbf{r}, t)$  (см. Приложение). Для ее анализа удобно использовать идеологию статистической топографии.

В статистической топографии основным объектом изучения, как и в обычной топографии горных массивов, является система контуров — линий уровня (в двумерном случае) или поверхностей (в трехмерном случае) постоянных значений, определяемых равенством

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}.$$

Для анализа системы контуров (здесь для простоты будем говорить о двумерном случае) удобно ввести сингулярную индикаторную функцию (1.35), сосредоточенную на контурах и являющуюся функционалом параметров среды.

Через функцию (1.35) выражаются, например, такие величины, как общая площадь областей, ограниченных линиями уровня, где  $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$ :

$$S(t, \rho) = \int_\rho^\infty d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}, t; \tilde{\rho}), \quad (1.38)$$

и общая «масса» поля, заключенная в этих областях:

$$M(t, \rho) = \int_\rho^\infty \tilde{\rho} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}, t; \tilde{\rho}). \quad (1.39)$$

Так, для динамики пассивной примеси, описываемой уравнением Лиувилля (1.36), дифференцируя по времени равенства (1.38) и (1.39), получаем выражения

$$\frac{\partial}{\partial t} S(t, \rho) = \int d\mathbf{r} \int_\rho^\infty d\tilde{\rho} \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \tilde{\rho} + 1 \right) \varphi(\mathbf{r}, t; \tilde{\rho}),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} M(t, \rho) = \int d\mathbf{r} \int_\rho^\infty d\tilde{\rho} \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \tilde{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \tilde{\rho} + 1 \right) \varphi(\mathbf{r}, t; \tilde{\rho}),$$

и, следовательно, площадь области, ограниченной контуром  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$ , а также общая масса, сосредоточенная в этой области, сохраняются для бездивергентного поля скорости. Очевидно, что в этом случае сохраняется число замкнутых контуров, которые не могут исчезать и порождаться в среде, а лишь эволюционируют во времени исходя из заданного в начальный момент времени распределения контуров в пространстве, определяемого равенством  $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho = \text{const}$ .

При наличии у поля скорости потенциальной составляющей все эти величины эволюционируют во времени.

Средние по ансамблю реализаций значения выражений (1.38) и (1.39) непосредственно определяются одноточечной плотностью вероятностей.

Дополнительную информацию о детальной структуре поля  $\rho(\mathbf{r}, t)$  можно получить, включив в рассмотрение его пространственный градиент  $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$ . Так, например, величина

$$l(t, \rho) = \int d\mathbf{r} |\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)| \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) = \oint dl \quad (1.40)$$

описывает общую длину контуров  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$ .

Выражение (1.40) описывается расширенной индикаторной функцией

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}), \quad (1.41)$$

удовлетворяющей для примеси в случайном поле скоростей расширенному уравнению Лиувилля, вытекающему из (1.7) и (1.24):

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = \\ & = \left[ \frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial p_i} p_k + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right) + \frac{\partial^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i \partial r_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \rho \right] \varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (1.42)$$

с начальным условием

$$\varphi(\mathbf{r}, 0; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho) \delta(\mathbf{p}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{p}).$$

Следствием уравнения (1.42) является эволюционное уравнение для длины контура (1.40):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}l(t, \rho) &= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} p \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = \\ &= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} \left[ -\frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} \frac{p_i p_k}{p} + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} p \frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i \partial \mathbf{r}} \frac{p_i}{p} \rho \right] \varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (1.43)$$

из которого видно, что длина контура эволюционирует во времени даже для бездивергентного поля скоростей.

Отметим, что средние значения формул (1.40), (1.43) связаны с совместной одноточечной плотностью вероятностей поля плотности  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и его градиента  $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$ , определяемой путем усреднения индикаторной функции (1.41) по ансамблю реализаций, т. е. функцией

$$P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = \langle \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}) \rangle.$$

## Глава 2

### СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИФФУЗИИ И КЛАСТЕРИЗАЦИИ БЕЗЫНЕРЦИОННОЙ ПРИМЕСИ

Рассмотрим теперь задачу статистического описания диффузии безынерционной пассивной примеси в случайном поле скоростей в отсутствие среднего потока ( $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = 0$ ).

#### 2.1. Общие замечания

Случайная составляющая поля скоростей предполагается в общем случае дивергентным ( $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$ ) и в то же время статистически однородным и изотропным в пространстве и стационарным во времени случайным гауссовым полем с корреляционным и спектральным тензорами ( $\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$ ):

$$\begin{aligned} B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle = \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}, t - t') e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \\ E_{ij}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{r} B_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E_{ij}^s(\mathbf{k}, t) + E_{ij}^p(\mathbf{k}, t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $d$  — размерность пространства, а спектральные составляющие тензора поля скоростей имеют структуру

$$E_{ij}^s(\mathbf{k}, t) = E^s(k, t) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad E_{ij}^p(\mathbf{k}, t) = E^p(k, t) \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (2.2)$$

Здесь через  $E^s(k, t)$  и  $E^p(k, t)$  обозначены соответственно соленоидальная и потенциальная компоненты спектральной плотности поля скоростей.

Временной радиус корреляции поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  определим равенством

$$\tau_0 \sigma_{\mathbf{u}}^2 = \int_0^\infty d\tau B_{ii}(0, \tau) = \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} [(d-1) E^s(k, \tau) + E^p(k, \tau)],$$

где дисперсия поля скоростей

$$\sigma_{\mathbf{u}}^2 = B_{ii}(0, 0) = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle.$$

Непосредственный практический интерес представляют следующие случаи.

- Чисто бездивергентный гидродинамический поток, для которого  $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$  ( $E^p(k, t) = 0$ ).
- Случай чисто потенциального поля скоростей ( $E^s(k, t) = 0$ ). Такой случай имеет место, например, при диффузии примеси в случайных волновых полях.

- Смешанный случай. Такой случай осуществляется, например, при диффузии плавучей примеси и диффузии малоинерционных частиц.

В силу однородности и изотропности поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  имеют место равенства

$$\begin{aligned} B_{kl}(0, \tau) &= D_0(\tau)\delta_{kl}, \quad \frac{\partial}{\partial r_i} B_{kl}(0, \tau) = 0, \\ -\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} B_{kl}(0, \tau) &= \frac{D^s(\tau)}{d(d+2)} [(d+1)\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}] + \\ &+ \frac{D^p(\tau)}{d(d+2)} [\delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь  $d$  — размерность пространства, по повторяющимся индексам, как обычно, предполагается суммирование и введены обозначения

$$\begin{aligned} D_0(\tau) &= \frac{1}{d} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{d} \int d\mathbf{k} [(d-1)E^s(k, \tau) + E^p(k, \tau)], \\ D^s(\tau) &= \int d\mathbf{k} k^2 E^s(k, \tau), \\ D^p(\tau) &= \int d\mathbf{k} k^2 E^p(k, \tau) = \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Отметим, что интегралы по времени от коэффициентов (2.4) описываются выражениями

$$\begin{aligned} D_0 &= \int_0^\infty d\tau D_0(\tau) = \frac{1}{d} \sigma_{\mathbf{u}}^2 \tau_0, \quad D^s = \int_0^\infty d\tau D^s(\tau) = \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} k^2 E^s(k, \tau), \\ D^p &= \int_0^\infty d\tau D^p(\tau) = \tau_{\text{div } \mathbf{u}} \sigma_{\text{div } \mathbf{u}}^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\tau_{\text{div } \mathbf{u}}$  — временной радиус корреляции поля  $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , а ее дисперсия —  $\sigma_{\text{div } \mathbf{u}}^2 = \langle (\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{r})^2 \rangle$ .

Для бездивергентного поля скоростей ( $E^p = 0$ ) равенства (2.3) и (2.4) упрощаются и величина  $D^s$ ,

$$D^s = \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} k^2 E^s(k, \tau) = -\frac{1}{d-1} \int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (2.6)$$

связана с вихревой структурой случайного бездивергентного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

Случайное поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  коррелирует с решениями уравнений (1.34), (1.36), которые являются функционалами поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Расщепление корреляций для гауссова поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  осуществляется на основе формулы Фурутцу–Новикова (Б.19) на с. 110 в Приложении, которая в рассматриваемом случае принимает вид:

$$\langle u_k(\mathbf{r}, t) R[t; \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)] \rangle = \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' B_{kl}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \left\langle \frac{\delta R[t; \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)]}{\delta u_l(\mathbf{r}', t')} \right\rangle. \quad (2.7)$$

Эта формула справедлива для гауссова случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  с нулевым средним значением и произвольным функционалом от него  $R[t; \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)]$  ( $0 \leq \tau \leq t$ ) (см. также [8, 9]).

## 2.2. Приближение дельта-коррелированного во времени поля скоростей

При расчете статистических свойств диффузии безынерционных частиц и поля плотности воспользуемся приближением дельта-коррелированности во времени поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , в рамках которого корреляционный тензор (2.1) аппроксимируется выражением

$$B_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = 2B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r})\delta(\tau), \quad (2.8)$$

где

$$B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau B_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = \int_0^{\infty} d\tau B_{ij}(\mathbf{r}, \tau).$$

В этом случае вместо равенств (2.3) имеем соответственно равенства

$$\begin{aligned} B_{kl}^{\text{eff}}(0) &= D_0 \delta_{kl}, \quad \frac{\partial}{\partial r_i} B_{kl}^{\text{eff}}(0) = 0, \\ -\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} B_{kl}^{\text{eff}}(0) &= \frac{D^s}{d(d+2)} [(d+1)\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}] + \\ &+ \frac{D^p}{d(d+2)} [\delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}] \end{aligned} \quad (2.9)$$

с коэффициентами (2.5).

Диффузия примеси в случайном поле скоростей в лагранжевом представлении описывается уравнением Лиувилля (1.34), а в эйлеровом представлении — уравнением (1.36). Усреднение этих уравнений по ансамблю реализаций поля скоростей  $\{\mathbf{u}\}$  приводит к уравнениям для одновременного лагранжева вероятностного распределения  $P(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0)$  и одноточечной плотности эйлерова вероятностного распределения  $P(\mathbf{r}, t; \rho)$ .

Расщепление корреляций для гауссова поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  с функционалами от него осуществляется по формуле Фурутцу–Новикова (2.7), которая для дельта-коррелированного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  упрощается и принимает вид

$$\langle u_k(\mathbf{r}, t) R[t; \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)] \rangle = \int d\mathbf{r}' B_{kl}^{\text{eff}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\langle \frac{\delta R[t; \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)]}{\delta u_l(\mathbf{r}', t - 0)} \right\rangle, \quad (2.10)$$

где  $0 \leq \tau \leq t$ .

### 2.2.1. Лагранжево описание (диффузия частиц)

#### Одноточечные статистические характеристики

Усреднив уравнение (1.34) на с. 19 по ансамблю реализаций случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , используя формулу Фурутцу–Новикова (2.10) и принимая во внимание равенство

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u_\beta(\mathbf{r}', t - 0)} \varphi_{\text{Lag}}(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0) &= \\ &= \left\{ -\frac{\partial}{\partial r_\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_\beta} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial j} \right) \right\} \varphi_{\text{Lag}}(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0) \end{aligned}$$

и соотношения (2.9), придем к уравнению Фоккера–Планка для одновременной лагранжевой плотности вероятностей  $P(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0)$  координаты частицы  $\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0)$ , ее плотности  $\rho(t | \mathbf{r}_0)$  и расходимости  $j(t | \mathbf{r}_0)$ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta\right) P(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0) = D^p \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial j} \rho j + \frac{\partial^2}{\partial j^2} j^2 \right) P(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0),$$

$$P(\mathbf{r}, \rho, j, 0 | \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\rho - \rho_0(\mathbf{r}_0)) \delta(j - 1). \quad (2.11)$$

Решение уравнения (2.11) имеет вид

$$P(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0) = P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0) P(j, t | \mathbf{r}_0) P(\rho, t | \mathbf{r}_0), \quad (2.12)$$

где  $P(t; \mathbf{r} | \mathbf{r}')$  — вероятностное распределение координат частицы, удовлетворяющее уравнению, вытекающему из (2.11),

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0) = D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0), \quad P(\mathbf{r}, 0 | \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

и, следовательно, является гауссовым распределением:

$$P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0) = \exp \left\{ D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{d/2}} \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{4D_0 t} \right\}, \quad (2.13)$$

где  $d$  — размерность пространства.

Функция  $P(j, t | \mathbf{r}_0)$  — вероятностное распределение поля расходимости в окрестности частицы — удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка, вытекающему из (2.11),

$$\frac{\partial}{\partial t} P(j, t | \mathbf{r}_0) = D^p \frac{\partial^2}{\partial j^2} j^2 P(j, t | \mathbf{r}_0), \quad P(j, 0 | \mathbf{r}_0) = \delta(j - 1), \quad (2.14)$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} j P(j, t | \mathbf{r}_0) = D^p j \frac{\partial}{\partial j} \left( j \frac{\partial}{\partial j} + 1 \right) j P(j, t | \mathbf{r}_0), \quad P(j, 0 | \mathbf{r}_0) = \delta(j - 1). \quad (2.15)$$

В уравнении (2.15) можно выполнить замену переменных

$$j = e^\eta, \quad \eta = \ln j, \quad (2.16)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = j \frac{\partial}{\partial j}.$$

Тогда, после замены переменных (2.16), уравнение (2.15) для функции

$$j P(j, t | \mathbf{r}_0) \Big|_{j=e^\eta} = F(\eta, t)$$

принимает вид уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} F(\eta, t) = D^p \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} + 1 \right) F(\eta, t) \quad (2.17)$$

с начальным условием

$$F(\eta, 0) = j P(j, 0 | \mathbf{r}_0) \Big|_{j=e^\eta} = e^\eta \delta(e^\eta - 1) = e^\eta \frac{\delta(\eta)}{e^\eta} = \delta(\eta). \quad (2.18)$$

Следовательно, решение задачи (2.17), (2.18) соответствует гауссову распределению вероятностей:

$$F(\eta, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{(\eta + \tau)^2}{4\tau} \right\}. \quad (2.19)$$

В (2.19) и ниже используется безразмерное время  $\tau = D^p t$ . Переходя теперь к функции  $F(\eta, t) \Big|_{\eta=\ln j} = j P(j, t | \mathbf{r}_0)$ , получаем решение уравнения (2.14) в виде

$$P(j, t | \mathbf{r}_0) = \exp \left\{ D^p t \frac{\partial^2}{\partial j^2} j^2 \right\} \delta(j - 1) = \frac{1}{2j\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{(\ln j + \tau)^2}{4\tau} \right\} = \frac{1}{2j\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(je^\tau)}{4\tau} \right\}. \quad (2.20)$$

Подчеркнем, что полученное решение (2.12) означает статистическую независимость координат  $\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0)$  и расходимости  $j(t | \mathbf{r}_0)$  в окрестности частицы с лагранжевой координатой  $\mathbf{r}_0$ . Причем логарифмически нормальное распределение (2.20) означает, что величина  $\eta(t | \mathbf{r}_0) = \ln j(t | \mathbf{r}_0)$  распределена по гауссову закону с параметрами

$$\langle \eta(t | \mathbf{r}_0) \rangle = -\tau, \quad \sigma_\eta^2(t) = 2\tau. \quad (2.21)$$

В частности, из (2.20), как впрочем и непосредственно из уравнения (2.14), вытекают следующие выражения для моментов случайного поля расходимости:

$$\langle j^n(t | \mathbf{r}_0) \rangle = e^{n(n-1)\tau}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.22)$$

Отметим, что средняя расходимость постоянна:  $\langle j(t | \mathbf{r}_0) \rangle = 1$ , а ее высшие моменты экспоненциально растут со временем.

Заметим еще, что согласно равенствам (1.20) на с. 15 и (2.22) имеем следующее выражение для лагранжевых моментов плотности:

$$\langle \rho^n(t | \mathbf{r}_0) \rangle = \rho_0^n(\mathbf{r}_0) e^{n(n+1)\tau},$$

означающее, в частности, экспоненциальный рост как средней плотности, так и ее высших моментов в лагранжевом представлении. При этом случайный процесс  $\rho(t | \mathbf{r}_0)$  является логнормальным и плотность вероятностей для плотности частицы имеет вид

$$P(\rho, t | \mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(\rho e^{-\tau}/\rho_0(\mathbf{r}_0))}{4\tau} \right\}. \quad (2.23)$$

Эту плотность вероятностей можно получить и как решение уравнения Фоккера–Планка, следующего из (2.11):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(\rho, \tau | \mathbf{r}_0) = \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} P(\rho, \tau | \mathbf{r}_0), \quad P(\rho, 0 | \mathbf{r}_0) = \delta(\rho - \rho_0(\mathbf{r}_0)). \quad (2.24)$$

Запишем уравнение (2.24) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho P(\rho, \tau | \mathbf{r}_0) = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - 1 \right) \rho P(\rho, \tau | \mathbf{r}_0), \quad P(\rho, 0 | \mathbf{r}_0) = \delta(\rho - \rho_0(\mathbf{r}_0)). \quad (2.25)$$

Тогда, после замены переменных, аналогичной (2.16),

$$\rho = e^\eta, \quad \eta = \ln \rho,$$

уравнение (2.25) для функции

$$\rho P(\rho, \tau | \mathbf{r}_0) |_{\rho=e^\eta} = F(\eta, \tau | \mathbf{r}_0)$$

принимает вид уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F(\eta, \tau | \mathbf{r}_0) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} - 1 \right) F(\eta, \tau | \mathbf{r}_0) \quad (2.26)$$

с начальным условием

$$F(\eta, 0 | \mathbf{r}_0) = \rho P(\rho, 0 | \mathbf{r}_0) |_{\rho=e^\eta} = e^\eta \delta(e^\eta - \rho_0(\mathbf{r}_0)) = \delta(\eta - \ln \rho_0(\mathbf{r}_0)). \quad (2.27)$$

Следовательно, решение задачи (2.26), (2.27) соответствует гауссову распределению вероятностей

$$F(\eta, \tau | \mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{(\eta - \ln \rho_0(\mathbf{r}_0) - \tau)^2}{4\tau} \right\}. \quad (2.28)$$

Переходя теперь к функции  $F(\eta, \tau | \mathbf{r}_0) |_{\eta=\ln \rho} = \rho P(\rho, \tau | \mathbf{r}_0)$ , и получаем решение уравнения (2.24) в виде (2.23). Отметим, что теперь логарифмически нормальное распределение (2.28) означает, что величина  $\eta(t | \mathbf{r}_0) = \ln \rho(t | \mathbf{r}_0)$  распределена по гауссову закону с параметрами

$$\langle \eta(t | \mathbf{r}_0) \rangle = \ln \rho_0(\mathbf{r}_0) + \tau, \quad \sigma_\eta^2(t) = 2\tau.$$

Выявленное выше парадоксальное поведение статистических характеристик расходимости и плотности, состоящее в одновременном росте со временем их моментных функций, объясняется свойствами логарифмически нормального распределения вероятностей. Так, в соответствии с формулами (B.15) и (B.16) на с. 114 Приложения, кривой типичной реализации случайной расходимости является экспоненциально спадающая кривая

$$j^*(t) = e^{-\tau}.$$

Кроме того, для реализаций логарифмически нормального процесса существуют также мажорантные оценки. И, например, с вероятностью  $p = 1/2$

$$j(t | \mathbf{r}_0) < 4e^{-\tau/2}$$

на всем интервале времени  $t \in (t_1, t_2)$ .

Аналогично, для реализаций плотности имеем кривую типичной реализации и минорантную оценку:

$$\rho^*(t) = \rho_0 e^\tau, \quad \rho(t | \mathbf{r}_0) > \frac{\rho_0}{4} e^{\tau/2}.$$

Подчеркнем, что исследованные выше лагранжевы статистические свойства частицы в потоках, содержащих случайную потенциальную составляющую, качественно отличаются от статистических свойств частицы в бездивергентных потоках, где  $j(t | \mathbf{r}_0) \equiv 1$ , а плотность в окрестности фиксированной частицы сохраняется:  $\rho(t | \mathbf{r}_0) = \rho_0(\mathbf{r}_0) = \text{const}$ . Приведенные выше статистические оценки для частицы означают, что статистика случайных процессов  $j(t | \mathbf{r}_0)$  и  $\rho(t | \mathbf{r}_0)$  формируется выбросами их реализаций относительно кривых типичных реализаций.

В то же время распределения вероятностей координат частиц в обоих случаях дивергентного и бездивергентного поля скоростей по сути одинаковы.

## Плоско-параллельный средний поток

Выше мы рассмотрели статистическое описание динамики частицы в отсутствие среднего потока. Представляет также определенный интерес случай двумерного *плоско-параллельного среднего потока* жидкости, для которого

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = v(y)\mathbf{l},$$

где  $\mathbf{r} = (x, y)$ ,  $\mathbf{l} = (1, 0)$ . В этом случае векторное уравнение (1.6) на с. 10 сводится к двум скалярным:

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(y) + u_1(\mathbf{r}, t), \quad \frac{d}{dt}y(t) = u_2(\mathbf{r}, t). \quad (2.29)$$

Практический интерес представляют потоки следующих видов:

- линейный сдвиговой поток, для которого  $v(y) = \alpha y$ ;
- тангенциальный разрыв, для которого  $v(y) = v_0 \theta(y - y_0) - v_0 \theta(y_0 - y)$ , где  $\theta(y)$  — ступенчатая функция Хевисайда, равная 1 при  $y > 0$  и 0 в противоположном случае;
- колмогоровский поток, для которого  $v(y) = v_0 \sin \beta y$ ;
- струйное течение, для которого  $v(y) = \tilde{v}(y) \theta(|y_0| - y)$ .

Здесь мы не рассматриваем вопрос об устойчивости таких потоков жидкости. Для потоков такого типа в задаче (2.29) стохастическое уравнение Лиувилля для индикаторной функции

$$\varphi(x, y, t) = \delta(x(t) - x) \delta(y(t) - y)$$

упрощается и принимает вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(\mathbf{r}, t) = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} u_1(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial y} u_2(\mathbf{r}, t) \right] \varphi(\mathbf{r}, t). \quad (2.30)$$

Усреднив теперь уравнение (2.30) по ансамблю реализаций случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , получаем уравнение Фоккера–Планка

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) P(\mathbf{r}, t) = D_0 \Delta P(\mathbf{r}, t), \quad P(\mathbf{r}, 0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0). \quad (2.31)$$

В этом случае уравнению (2.31) статистически эквивалентна частица, динамика которой описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(y) + u_1(t), \quad \frac{d}{dt}y(t) = u_2(t),$$

где  $u_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , — статистически независимые гауссовы процессы «белого шума» со статистическими характеристиками

$$\langle \mathbf{u}(t) \rangle = 0, \quad \langle u_i(t) u_j(t') \rangle = 2D_0 \delta(t - t').$$

Эти уравнения интегрируются, и, следовательно,

$$y(t) = y_0 + w_2(t), \quad x(t) = x_0 + w_1(t) + \int_0^t d\tau v(y + w_2(\tau)), \quad (2.32)$$

где

$$w_i(t) = \int_0^t d\tau u_i(\tau)$$

— независимые винеровские процессы с характеристиками

$$\langle \mathbf{w}(t) \rangle = 0, \quad \langle w_i(t)w_j(t') \rangle = 2D_0\delta_{ij} \min\{t, t'\}.$$

В частности, из (2.32) следует, что координата  $y(t)$  имеет гауссову плотность распределения вероятностей с параметрами

$$\langle y(t) \rangle = y_0, \quad \langle y^2(t) \rangle = y_0^2 + 2D_0t,$$

что соответствует обычному броуновскому движению с коэффициентом диффузии  $D_0$ .

Из равенств (2.32) также легко вычислить любые моментные функции  $\langle x^n(t) \rangle$  и корреляции  $\langle x^n(t)y^m(t) \rangle$  для траектории частиц.

Так, в простейшем примере линейного сдвигового потока

$$v_x = \alpha y, \quad v_y = 0$$

равенства (2.32) соответствуют совместной гауссовой плотности вероятностей с параметрами [42, 50, 102]

$$\langle y(t) \rangle = y_0, \quad \langle x(t) \rangle = x_0 + \alpha y_0 t,$$

$$\sigma_{xx}^2(t) = 2D_0t \left( 1 + \alpha t + \frac{1}{3}\alpha^2 t^2 \right), \quad \sigma_{yy}^2(t) = 2D_0t, \quad \sigma_{xy}^2(t) = 2D_0t(1 + \alpha t),$$

где

$$\sigma_{xx}^2(t) = \langle [x(t) - \langle x(t) \rangle]^2 \rangle, \quad \sigma_{yy}^2(t) = \langle [y(t) - \langle y(t) \rangle]^2 \rangle,$$

$$\sigma_{xy}^2(t) = \langle [x(t) - \langle x(t) \rangle][y(t) - \langle y(t) \rangle] \rangle.$$

В случае колмогоровского потока имеем

$$\langle y(t) \rangle = y_0, \quad \langle x(t) \rangle = x_0 + \frac{v_0}{\beta^2 D_0} [1 - e^{-\beta^2 D_0 t}] \sin(\beta y_0),$$

и при условии  $t \gg 1/(D_0\beta^2)$

$$\langle x(t) \rangle = x_0 + \frac{v_0}{\beta^2 D_0} \sin(\beta y_0),$$

т. е. частица в среднем находится в конечной части пространства. В этом случае корреляция  $x(t)$  и  $y(t)$  также не зависит от времени:

$$\langle (x(t) - x_0)(y(t) - y_0) \rangle_{t \rightarrow \infty} = x_0 + \frac{4v_0}{\beta^3 D_0} \cos(\beta y_0).$$

Однако в этом пределе величина  $x(t)$  ведет себя как броуновская частица с коэффициентом диффузии  $D_0$ , т. е.  $\sigma_{xx}^2 \sim 2D_0t$ .

Отметим, что после потери устойчивости течения Колмогорова устанавливается квазипериодический в плоскости  $(x, y)$  поток. Диффузия примеси в потоке такого типа с  $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = \{B \cos y, A \sin x\}$  рассматривалась в работах [41, 46].

### Замечание 2.1. Диффузия облака примеси

Выше мы рассмотрели диффузию частиц при наличии среднего плоско-параллельного потока жидкости. В этом случае уравнение для средней плотности в эйлеровом описании, очевидно, также имеет вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = D_0 \Delta \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad \langle \rho(\mathbf{r}, 0) \rangle = \rho_0(\mathbf{r}),$$

отличающийся от (2.31) только начальным условием. С точки зрения эйлерова описания для средней концентрации поля примеси найденные моментные функции типа  $\langle x^n(t)y^m(t) \rangle$ , характеризуют расплывание «облака» примеси. Так, величина

$$\langle \mathbf{r}(t) \rangle = \frac{1}{M} \int d\mathbf{r} \mathbf{r} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

где  $M = \int d\mathbf{r} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r})$  — общая масса примеси, определяет положение «центра тяжести» облака примеси во времени, а более высокие моменты, как, например,

$$\langle r_i(t)r_j(t) \rangle = \frac{1}{M} \int d\mathbf{r} r_i r_j \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

характеризуют деформацию этого облака. ◆

### Двухточечные статистические характеристики

Рассмотрим теперь совместную динамику двух частиц в отсутствие среднего потока. В этом случае индикаторная функция

$$\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \delta(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_2)$$

описывается уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = - \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t) \right] \varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t).$$

И усреднение этой функции по ансамблю реализаций поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , с учетом формулы Фурутцу–Новикова (2.10) на с. 25 и равенства

$$\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}', t - 0)} \varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = - \left[ \frac{\partial}{\partial r_{1j}} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') + \frac{\partial}{\partial r_{2j}} \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') \right] \varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t),$$

приводит для совместной плотности вероятностей положения двух частиц,

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle \varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) \rangle,$$

к уравнению Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = & \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_{1i} \partial r_{1j}} + \frac{\partial^2}{\partial r_{2i} \partial r_{2j}} \right] B_{ij}^{\text{eff}}(0) P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) + \\ & + 2 \frac{\partial^2}{\partial r_{1i} \partial r_{2j}} B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Умножая теперь уравнение (2.33) на функцию  $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{l})$  и интегрируя по  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , получаем для плотности вероятностей относительной диффузии двух частиц,

$$P(\mathbf{l}, t) = \langle \delta(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{l}) \rangle,$$



уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{l}, t) = \frac{\partial^2}{\partial l_\alpha \partial l_\beta} D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) P(\mathbf{l}, t), \quad P(\mathbf{l}, 0) = \delta(\mathbf{l} - \mathbf{l}_0), \quad (2.34)$$

где

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = 2 \left[ B_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(0) - B_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(\mathbf{l}) \right]$$

— структурная матрица векторного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , а  $\mathbf{l}_0$  — начальное расстояние между частицами.

В общем случае решить уравнение (2.34) не удастся. Однако если начальное расстояние между частицами  $l_0 \ll l_{\text{cor}}$ , где  $l_{\text{cor}}$  — пространственный радиус корреляции поля скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , то можно разложить функции  $D_{\alpha\beta}(\mathbf{l})$  в ряд Тейлора, в результате чего в первом приближении получаем

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = - \left. \frac{\partial^2 B_{\alpha\beta}^{\text{eff}}(\mathbf{l})}{\partial l_i \partial l_j} \right|_{\mathbf{l}=0} l_i l_j.$$

С использованием представления (2.2)–(2.4) на с. 23 диффузионный тензор упрощается и может быть записан в виде

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = \frac{1}{d(d+2)} \left\{ [D^s(d+1) + D^p] \delta_{\alpha\beta} l^2 - 2(D^s - D^p) l_\alpha l_\beta \right\}, \quad (2.35)$$

где  $d$  — размерность пространства.

Подставляя теперь (2.35) в (2.34), умножая обе части получившегося уравнения на  $|\mathbf{l}|^n = l^n$  и интегрируя по  $\mathbf{l}$ , получаем замкнутое уравнение

$$\frac{d}{dt} \ln \langle l^n(t) \rangle = \frac{1}{d(d+2)} [(D^s(d+1) + D^p) n(d+n-2) - 2(D^s - D^p) n(n-1)],$$

решение которого соответствует экспоненциально растущим во времени функциям для всех моментов ( $n = 1, 2, \dots$ ). При этом распределение вероятностей для случайного процесса  $l(t)/l_0$  будет логарифмически нормальным.

Отметим, что умножая уравнение (2.34) на  $\delta(|\mathbf{l}| - l)$  и интегрируя по  $\mathbf{l}$ , легко получить уравнение для плотности вероятностей модуля вектора  $\mathbf{l}(t)$ ,

$$P(l, t) = \langle \delta(|\mathbf{l}(t)| - l) \rangle = \int d\mathbf{l} \delta(|\mathbf{l}(t)| - l) P(\mathbf{l}, t),$$

вида

$$\frac{\partial}{\partial t} P(l, t) = - \frac{\partial}{\partial l} \frac{D_{ii}(l)}{l} P(l, t) + \frac{\partial}{\partial l} \frac{N(l)}{l} P(l, t) + \frac{\partial^2}{\partial l^2} N(l) P(l, t),$$

где  $N(l) = l_i l_j D_{ij}(\mathbf{l})/l^2$ . Отсюда легко получить уравнение для функции  $\langle \ln l(t) \rangle$ , а именно

$$\frac{d}{dt} \langle \ln l(t) \rangle = \left\langle \frac{D_{ii}(l)}{l^2} - 2 \frac{N(l)}{l^2} \right\rangle,$$

и, следовательно, для тензора  $D_{ij}(\mathbf{l})$  вида (2.35) получаем выражение

$$\left\langle \ln \left( \frac{l(t)}{l_0} \right) \right\rangle = \frac{1}{d(d+2)} \{ D^s(d-1)d - D^p(4-d) \} t.$$

Следовательно, в соответствии с формулами (B.15) и (B.16) на с. 114 Приложения, кривой типичной реализации для расстояния между двумя частицами будет экспоненциальная функция времени

$$l^*(t) = l_0 \exp \left\{ \frac{1}{d(d+2)} [D^s d(d-1) - D^p(4-d)] t \right\}, \quad (2.36)$$

и эта функция связана с *ляпуновской экспонентой*.

Отсюда следует, что в двумерном случае ( $d = 2$ ) выражение

$$l^*(t) = l_0 \exp \left\{ \frac{1}{4} (D^s - D^p) t \right\}$$

существенно зависит от знака разности ( $D^s - D^p$ ). В частности, для бездивергентного поля скоростей ( $D^p = 0$ ) имеем экспоненциально растущую типичную реализацию, что соответствует экспоненциально быстрому разбеганию частиц при малых расстояниях между ними. Этот результат справедлив для времен

$$\frac{1}{4} D^s t \ll \ln \left( \frac{l_{\text{cor}}}{l_0} \right),$$

при которых справедливо разложение (2.35). В другом предельном случае — потенциальном поле скоростей ( $D^s = 0$ ) — типичной реализацией будет экспоненциально убывающая кривая, т.е. налицо стремление частиц «слиться». Учитывая, что при этом сами жидкие частицы сжимаются, мы видим, что в этом случае должны образовываться *кластеры*, т.е. зоны компактного сосредоточения частиц, расположенные в большей степени в разреженных зонах, что согласуется с результатами численного моделирования эволюции реализации однородного в начальный момент времени распределения частиц в случайном потенциальном поле скоростей, приведенного на рис. 1.1, б, с. 12 (правда, для совершенно другой статистической модели поля скоростей). Это означает, что само явление кластеризации не зависит от модели случайного поля скоростей, хотя, конечно, статистические параметры, характеризующие это явление, могут существенно зависеть от модели. Таким образом, для кластеризации частиц должно выполняться неравенство

$$D^s < D^p. \quad (2.37)$$

В трехмерном же случае ( $d = 3$ ) из (2.36) следует, что

$$l^*(t) = l_0 \exp \left\{ \frac{1}{15} (6D^s - D^p) t \right\},$$

и кривая типичной реализации будет экспоненциально затухать со временем при выполнении более жесткого (чем в двумерном случае) условия

$$D^p > 6D^s.$$

В одномерном случае

$$l^*(t) = l_0 e^{-D^p t}$$

кривая типичной реализации всегда убывает со временем, так как поле скоростей в этом случае всегда дивергентно.

### 2.2.2. Эйлерово описание

Прежде всего отметим, что в случае дельта-коррелированного случайного поля скорости от линейного уравнения (1.25) на с. 18 в отсутствие среднего потока сравнительно легко перейти к замкнутым уравнениям как для средней плотности примеси, так и для ее высших многоточечных корреляционных функций. Например, усреднив уравнение (1.25), используя формулу Фурутцу–Новикова (2.10) на с. 25 и выражение для вариационной производной,

$$\frac{\delta\rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_\alpha(\mathbf{r}', t=0)} = -\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}, t),$$

вытекающее из уравнения (1.25), получим уравнение для средней плотности примеси:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho(\mathbf{r}, t)\rangle = (D_0 + \mu)\Delta\langle\rho(\mathbf{r}, t)\rangle. \quad (2.38)$$

При выполнении условия  $D_0 \gg \mu$  ( $\mu \ll \sigma_u^2 l_{\text{cor}}^2$ ), где  $\sigma_u^2$  — дисперсия случайного поля скоростей, а  $l_{\text{cor}}$  — его радиус корреляции, уравнение (2.38) совпадает с уравнением для вероятностного распределения координат частицы (2.13) и, следовательно, коэффициент диффузии  $D_0$ , аналогично диффузии в бездивергентном случайном поле скоростей, характеризует лишь масштабы области сосредоточения примеси в целом, не неся информации о локальной структуре реализаций плотности.

Аналогичным образом, для пространственной корреляционной функции поля плотности

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle\rho(\mathbf{r}_1, t)\rho(\mathbf{r}_2, t)\rangle$$

получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = & \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_{1i}\partial r_{1j}} + \frac{\partial^2}{\partial r_{2i}\partial r_{2j}} \right] [B_{ij}^{\text{eff}}(0) + \mu\delta_{ij}] \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial r_{1i}\partial r_{2j}} B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t), \end{aligned}$$

совпадающее с уравнением для двухчастичной плотности вероятностей в отсутствие молекулярного коэффициента диффузии ( $\mu = 0$ ).

В частном случае постоянства начального распределения поля плотности ( $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$ ) случайное поле  $\rho(\mathbf{r}, t)$  будет однородным и изотропным случайным полем. В этом случае  $\langle\rho(\mathbf{r}, t)\rangle = \rho_0$ , а уравнение для корреляционной функции упрощается и принимает вид ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ )

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(\mathbf{r}, t) = 2\mu\Delta\Gamma(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j} D_{ij}(\mathbf{r})\Gamma(\mathbf{r}, t),$$

где

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = 2 \left[ B_{ij}^{\text{eff}}(0) - B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}) \right]$$

— структурная матрица векторного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . При отсутствии молекулярной диффузии это уравнение совпадает с уравнением для плотности вероятностей относительной диффузии двух частиц.

Корреляционная функция  $\Gamma(\mathbf{r}, t)$  теперь будет зависеть от модуля вектора  $\mathbf{r}$ , т. е.  $\Gamma(\mathbf{r}, t) = \Gamma(r, t)$ , и, как функция переменных  $r, t$ , будет описываться уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(r, t) = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{d-1} \left[ \frac{\partial D_{ii}(r)}{\partial r} + \left( 2\mu + \frac{r_i r_j}{r^2} D_{ij}(\mathbf{r}) \right) \frac{\partial}{\partial r} \right] \Gamma(r, t),$$

где, как и ранее,  $d$  — размерность пространства. Это уравнение может иметь стационарное решение  $\Gamma(r) = \Gamma(r, \infty)$ , соответствующее краевому условию

$$\Gamma(\infty) = \rho_0^2,$$

вида [33, 34]

$$\Gamma(r) = \rho_0^2 \exp \left\{ \int_r^\infty dr' \frac{\partial D_{ii}(r')/\partial r'}{2\mu + r'_i r'_j D_{ij}(\mathbf{r}')/r'^2} \right\}.$$

Подобная задача для бездивергентного турбулентного потока жидкости в отсутствие эффекта молекулярной диффузии анализировалась в работе [25].

Для описания локального поведения реализаций примеси в случайном поле скоростей нужно знать вероятностное распределение ее плотности. В пренебрежении молекулярной диффузией уравнение для эйлеровой плотности вероятностей легко вывести, в силу формулы (1.37) на с. 20, домножив уравнение (2.11) на  $j$  и интегрируя его по всем возможным значениям  $j$  и  $\mathbf{r}_0$ . В итоге находим уравнение для плотности вероятностей поля плотности в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta \right) P(\mathbf{r}, t; \rho) = D_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(\mathbf{r}, t; \rho), \quad P(\mathbf{r}, 0; \rho) = \delta(\rho - \rho_0(\mathbf{r})), \quad (2.39)$$

где коэффициент диффузии в  $\rho$ -пространстве  $D_\rho = D^P$ .

Уравнение (2.39) можно получить и непосредственно, усредняя уравнение (1.36) на с. 20 по ансамблю реализаций случайного дельта-коррелированного во времени поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  в отсутствие среднего потока, используя формулу Фурутцу–Новикова (2.10) и выражение для вариационной производной:

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t; \rho)}{\delta u_\beta(\mathbf{r}', t=0)} = \left\{ -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_\beta} + \frac{\partial\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_\beta} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right\} \varphi(\mathbf{r}, t; \rho).$$

Из уравнения (2.39), в частности, следует, что моментные функции поля плотности описываются уравнением

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta \right) \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = D_\rho n(n-1) \langle \rho^{n-2}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad \langle \rho^n(\mathbf{r}, 0) \rangle = \rho_0^n(\mathbf{r}). \quad (2.40)$$

Его решение имеет структуру

$$\langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = e^{n(n-1)\tau} \int d\mathbf{r}' P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}') \rho_0^n(\mathbf{r}'), \quad (2.41)$$

где функция  $P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}')$  описывается равенством (2.13), а параметр  $\tau = D_\rho t$ .

Если начальная плотность примеси всюду одинакова:  $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$ , то вероятностное распределение плотности не зависит от  $\mathbf{r}$  и описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \rho) = D_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t; \rho), \quad P(0; \rho) = \delta(\rho - \rho_0), \quad (2.42)$$

которое совпадает с уравнением (2.14) на с. 26 для лагранжевой плотности вероятностей расходимости частицы и отличается от него только начальным условием. Следовательно, в этом случае эйлерово поле плотности логнормально с плотностью вероятностей и соответствующей интегральной функцией распределения:

$$P(t; \rho) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(\rho e^\tau/\rho_0)}{4\tau} \right\}, \quad F(t; \rho) = \Phi \left( \frac{\ln(\rho e^\tau/\rho_0)}{2\sqrt{\tau}} \right), \quad (2.43)$$

где  $\Phi(z)$  — интеграл вероятностей (функция ошибок),

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z dy \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}.$$

С точки зрения одноточечных характеристик поля плотности  $\rho(\mathbf{r}, t)$  в этом случае задача статистически эквивалентна случайному процессу и при этом все моментные функции начиная со второй экспоненциально растут со временем:

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0, \quad \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0^n e^{n(n-1)\tau}, \quad (2.44)$$

а в соответствии с формулами (В.15) и (В.16) на с. 114 Приложения кривая типичной реализации поля плотности в любой фиксированной точке пространства экспоненциально спадает во времени:

$$\rho^*(t) = \rho_0 e^{-\tau}, \quad (2.45)$$

что свидетельствует о наличии кластерного характера флуктуаций плотности среды в произвольных дивергентных потоках. Формирование же эйлеровой статистики плотности в любой фиксированной точке пространства идет за счет флуктуаций плотности вокруг этой кривой.

Выше мы обсудили одноточечное вероятностное распределение плотности примеси в эйлеровом представлении, что уже позволило нам сделать ряд заключений о поведении реализаций поля плотности во времени в фиксированных точках пространства. Покажем теперь, что это распределение дает также возможность выяснить некоторые характерные особенности пространственно-временной структуры реализаций поля плотности.

Для наглядности ограничимся здесь двумерным случаем. Как говорилось выше, важные сведения о пространственном поведении реализаций несет анализ линий уровня, определяемых равенством

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const.} \quad (2.46)$$

В частности, такие функционалы поля плотности, как общая величина площади в области, где  $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho - S(t, \rho)$ , общая масса примеси, заключенная в этой области —  $M(t, \rho)$ , средние значения которых определяются одноточечной плотностью вероятностей, описываются выражениями

$$\langle S(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; \tilde{\rho}), \quad \langle M(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} \tilde{\rho} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; \tilde{\rho}). \quad (2.47)$$

Подставив сюда решение уравнения (2.39), после несложных преобразований легко найти явные выражения для этих величин:

$$\begin{aligned} \langle S(t, \rho) \rangle &= \int d\mathbf{r} \Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{\rho_0(\mathbf{r})e^{-\tau}}{\rho}\right)\right), \\ \langle M(t, \rho) \rangle &= \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r}) \Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{\rho_0(\mathbf{r})e^{\tau}}{\rho}\right)\right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Отсюда видно, в частности, что при  $\tau \gg 1$  средняя площадь областей, где плотность выше уровня  $\rho$ , убывает со временем по закону

$$\langle S(t, \rho) \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\tau\rho}} e^{-\tau/4} \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})}, \quad (2.49)$$

в то время как заключенная в этих областях средняя масса примеси

$$\langle M(t, \rho) \rangle \approx M - \sqrt{\frac{\rho}{\pi\tau}} e^{-\tau/4} \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})} \quad (2.50)$$

монотонно стремится к полной ее массе  $M = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r})$ . Это еще раз подтверждает сделанный ранее вывод о том, что частицы примеси со временем стремятся собираться в кластеры — компактные области повышенной плотности, окруженные разреженными областями.

Динамику формирования кластеров можно проиллюстрировать на примере, когда первоначально примесь равномерно распределена на плоскости:  $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$ . При этом средняя удельная площадь области (приходящаяся на единицу площади), внутри которой  $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$ , равна

$$s(t, \rho) = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} P(t; \tilde{\rho}) = \Phi\left(\frac{\ln(\rho_0 e^{-\tau}/\rho)}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad (2.51)$$

где  $P(t; \rho)$  — не зависящее от  $\mathbf{r}$  решение уравнения (2.42) (т. е. функция (2.43)), а удельная средняя масса примеси (приходящаяся на единицу площади), сосредоточенная в этой области, описывается выражением

$$m(t, \rho) = \frac{1}{\rho_0} \int_{\rho}^{\infty} \tilde{\rho} d\tilde{\rho} P(t; \tilde{\rho}) = \Phi\left(\frac{\ln(\rho_0 e^{\tau}/\rho)}{2\sqrt{\tau}}\right). \quad (2.52)$$

Из (2.51), (2.52) следует, что на больших временах средняя удельная площадь убывает по закону

$$s(t, \rho) = \Phi(-\sqrt{\tau}/2) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\tau/4}, \quad (2.53)$$

независимо от отношения  $\rho/\rho_0$ , в то время как внутри этой площади собирается практически вся масса примеси:

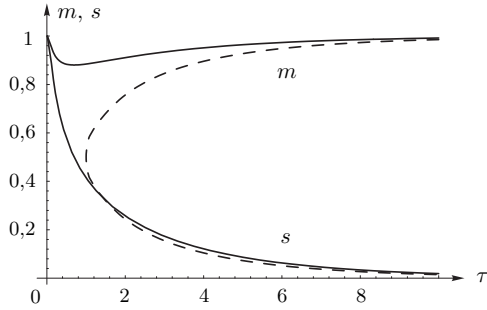
$$m(t, \rho) = \Phi(\sqrt{\tau}/2) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\tau/4}. \quad (2.54)$$

Характер же временной эволюции образования кластерной структуры существенно зависит от отношения  $\rho/\rho_0$ . Так, если  $\rho/\rho_0 < 1$ , то в начальный момент времени  $s(0, \rho) = 1$  и  $m(0, \rho) = 1$ . Далее, ввиду того что частицы примеси первое время стремятся разбежаться, образуются небольшие области, где  $\rho(\mathbf{r}, t) < \rho$ , и эти области содержат незначительную часть общей массы. С течением времени эти области быстро увеличиваются, а их масса перетекает в кластерные области, довольно быстро выходя на асимптотические зависимости (2.53), (2.54) (рис. 2.1).

Отметим, что в момент времени  $\tau^* = \ln(\rho/\rho_0)$  величина площади  $s(t^*, \rho) = 1/2$ .

В обратном, более интересном случае  $\rho/\rho_0 > 1$  в начальный момент времени  $s(0, \rho) = 0$  и  $m(0, \rho) = 0$ . Из-за начального разбегания частиц образуются небольшие кластерные области, где  $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$ ; эти области практически сохраняются во времени и интенсивно втягивают в себя значительную часть общей массы. В дальнейшем площадь этих областей с течением времени уменьшаются, а содержащаяся в них масса увеличивается согласно асимптотическим зависимостям (2.53), (2.54) (рис. 2.2, а, б).

Для более детального описания поля плотности в случайном поле скоростей необходимо, как указывалось ранее, рассматривать его пространственный градиент  $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla\rho(\mathbf{r}, t)$  и, вообще говоря, производные высшего порядка.

Рис. 2.1. Динамика образования кластеров для  $\rho/\rho_0 = 0,5$ 

Градиент плотности описывается динамическим уравнением (1.24) на с. 18, и, следовательно, расширенная индикаторная функция

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho)\delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p})$$

описывается уравнением (1.42) на с. 21. Усредняя теперь (1.42) по ансамблю реализаций поля скоростей в приближении дельта-коррелированного во времени поля скоростей, получаем уравнение для одноточечной совместной плотности вероятностей поля плотности и его градиента  $P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = \langle \varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) \rangle$ , зависящей от пространственно-временной точки  $(\mathbf{r}, t)$ , вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = & \left[ D_0 \Delta + \frac{2}{d} D^p \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p}} \rho + D^p \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 + \frac{1}{d(d+2)} D^s \widehat{L}^s(\mathbf{p}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{d(d+2)} D^p \widehat{L}^p(\mathbf{p}) + \frac{2(d+1)}{d} D^p \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_4^p \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \rho^2 \right] P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (2.55)$$

где введены операторы

$$\widehat{L}^s(\mathbf{p}) = (d+1) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} - 2 \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right)^2 = (d+1) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial p_k \partial p_l}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l,$$

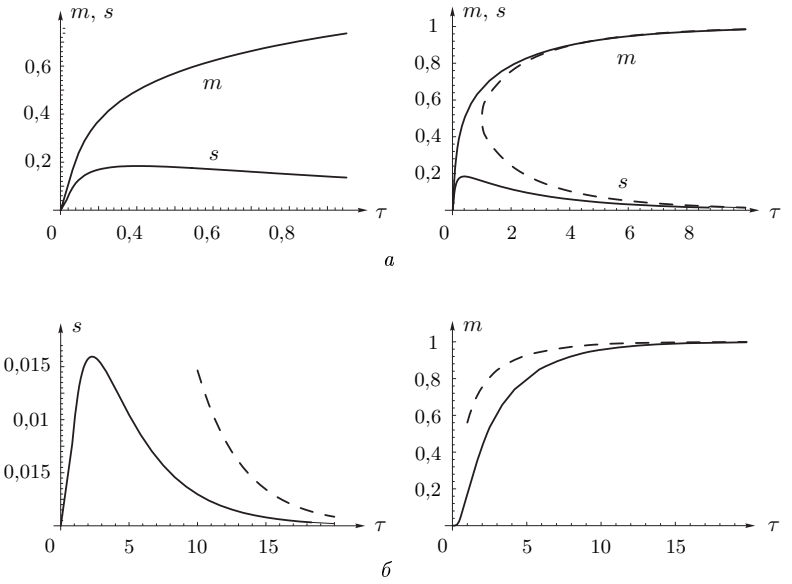
$$\widehat{L}^p(\mathbf{p}) = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 + (d^2 + 4d + 6) \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right)^2 + (d^2 + 2d + 2) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p}.$$

Уравнение (2.55) не удается исследовать в общем случае. Это можно сделать только для бездивергентного поля скоростей, когда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = & D_0 \Delta P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) + \\ & + \frac{1}{d(d+2)} D^s \left( (d+1) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial p_k \partial p_l}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Так как случайное поле скоростей является бездивергентным, то решение уравнения (2.56) имеет структуру

$$P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{r}_0 P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0) P(\mathbf{p}, t|\mathbf{r}_0), \quad (2.57)$$

Рис. 2.2. Динамика образования кластеров для  $\rho/\rho_0 = 1,5$  (а) и  $\rho/\rho_0 = 10$  (б)

где  $P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0)$  и  $P(\mathbf{p}, t|\mathbf{r}_0)$  — соответствующие лагранжевы плотности вероятностей положения частицы и ее градиента. Первая функция описывается выражением (2.13) на с. 26, а вторая — уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{p}, t|\mathbf{r}_0) = \frac{1}{d(d+2)} D^s \left( (d+1) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) P(\mathbf{p}, t|\mathbf{r}_0). \quad (2.58)$$

Следствием уравнения (2.58) является сохранение среднего значения градиента плотности частицы примеси:  $\langle \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0)$ . Что же касается моментных функций модуля градиента плотности, то они описываются уравнениями, вытекающими из (2.58):

$$\frac{d}{dt} \langle p^n(t|\mathbf{r}_0) \rangle = \frac{n(d+n)(d-1)}{d(d+2)} D^s \langle p^n(t|\mathbf{r}_0) \rangle, \quad \langle p^n(0|\mathbf{r}_0) \rangle = p_0^n(\mathbf{r}_0). \quad (2.59)$$

Следовательно, модуль градиента поля плотности в лагранжевом описании является логарифмически нормальной величиной, кривая типичной реализации которой, так же как и его моментные функции, экспоненциально растет во времени. В частности, первый и второй момент в двумерном случае описываются равенствами

$$\langle |\mathbf{p}(t|\mathbf{r}_0)| \rangle = |\mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0)| \exp\left(\frac{3}{8} D^s t\right), \quad \langle \mathbf{p}^2(t|\mathbf{r}_0) \rangle = \mathbf{p}_0^2(\mathbf{r}_0) \exp(D^s t). \quad (2.60)$$

Отметим, что логнормальное распределение для модуля градиента примеси, впервые предположенное в работе [51], согласуется с атмосферными экспериментальными данными [44, 55].

Кроме того, из формулы (1.40) на с. 21 следует, что общая средняя длина контура  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$  (в двумерном случае) также экспоненциально растет во времени

по закону

$$\langle l(t, \rho) \rangle = l_0 e^{D^s t},$$

где  $l_0$  — начальная длина контура [58, 59, 86]. Напомним, что в этом случае для бездивергентного поля скоростей сохраняется число контуров, которые не могут исчезать и порождаться в среде, а лишь эволюционируют во времени исходя из заданного в начальный момент времени распределения их в пространстве.

Таким образом, гладкое в начальный момент времени распределение примеси становится все более и более пространственно неоднородным; пространственные градиенты обостряются, и линии уровня приобретают фрактальный характер. Такую картину, соответствующую численному моделированию мы видели на рис. 1.1, а на с. 12.

### Замечание 2.2. Диффузия неконсервативной примеси

Выше было показано, что при наличии потенциальной составляющей у поля скорости может происходить кластеризация частиц в зависимости от соотношения между соленоидальной и потенциальной составляющими поля скоростей. В то же время в эйлеровом поле плотности всегда осуществляется кластеризация при наличии потенциальной составляющей поля скоростей.

Наряду с динамическим уравнением (1.7) на с. 10, представляет определенный интерес и уравнение, соответствующее переносу неконсервативной примеси (см., например, [22]):

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}).$$

В этом случае в лагранжевом описании уравнение для динамики частиц совпадает с уравнением (1.6) и, следовательно, для частиц может происходить кластеризация. Однако в эйлеровом описании, как легко видеть, кластеризация не осуществляется. В этом случае, аналогично бездивергентному полю скоростей, сохраняется среднее число контуров, средняя площадь, где  $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$ , и средняя «масса» примеси  $\int dS \rho(\mathbf{r}, t)$ , сосредоточенная в этих контурах. ♦

## 2.3. Учет дополнительных факторов

Выше мы рассмотрели простейшие статистические задачи о диффузии примеси в случайном поле скоростей в отсутствие регулярного потока и эффекта молекулярной диффузии. Также для статистического описания использовалось приближение дельта-коррелированного во времени случайного поля. Все неучтенные факторы начинают действовать с какого-то момента времени, так что полученные выше результаты справедливы лишь на начальном этапе диффузии. Кроме того, эти факторы могут приводить и к новым физическим эффектам. Кратко обсудим эти дополнительные задачи для бездивергентного (несжимаемого) поля скоростей.

### 2.3.1. Плоско-параллельный средний поток

Динамика частиц при наличии среднего плоско-параллельного потока жидкости рассматривалась в п. 2.2.1.

Более полную картину диффузии примеси можно получить, включив в рассмотрение поле градиента плотности примеси. В этом случае для двумерной задачи, соответствующей линейному сдвигу  $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = \alpha y \mathbf{l}$ ,  $\mathbf{l} = (1, 0)$ , вместо уравнения (2.56)

получаем уравнение [58, 59]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = & \left[ -\alpha y \frac{\partial}{\partial x} + D_0 \Delta \right] P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) + \\ & + \left\{ \alpha p_x \frac{\partial}{\partial p_y} + \frac{1}{8} D^s \left( 3 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} p^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) \right\} P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Решение уравнения (2.61) можно также записать в виде интеграла (2.57), где лагранжевы плотности вероятностей  $P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0)$  и  $P(\mathbf{p}, t | \mathbf{r}_0)$  описываются уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0) = \left[ -\alpha y \frac{\partial}{\partial x} + D_0 \Delta \right] P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0), \quad P(\mathbf{r}, 0 | \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0); \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{p}, t | \mathbf{r}_0) = \left\{ \alpha p_x \frac{\partial}{\partial p_y} + \frac{1}{8} D^s \left( 3 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} p^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) \right\} P(\mathbf{p}, t | \mathbf{r}_0), \quad (2.63)$$

$$P(\mathbf{p}, 0 | \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0)).$$

Диффузия частицы, описываемая уравнением (2.62), рассматривалась ранее. Следствием уравнения (2.63) является то, что среднее значение градиента поля плотности примеси уже не сохраняется и соответствует решению задачи при отсутствии флуктуаций поля скоростей:

$$\langle p_x(t) \rangle = p_x(0), \quad \langle p_y(t) \rangle = p_y(0) - \alpha p_x(0)t.$$

Что касается вторых моментов градиента, то они описываются системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p^2(t) \rangle &= D^s \langle p^2(t) \rangle - 2\alpha \langle p_x(t) p_y(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle p_x(t) p_y(t) \rangle &= -\frac{1}{2} D^s \langle p_x(t) p_y(t) \rangle - \alpha \langle p_x^2(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle p_x^2(t) \rangle &= \frac{3}{4} D^s \langle p^2(t) \rangle - \frac{1}{2} \langle p_x^2(t) \rangle, \end{aligned} \quad (2.64)$$

вытекающей из (2.63). Подставляя в систему (2.64) решение экспоненциального вида  $e^{\lambda t}$ , получаем характеристическое уравнение для  $\lambda$ :

$$\left( \lambda + \frac{1}{2} D^s \right)^2 (\lambda - D^s) = \frac{3}{2} \alpha^2 D^s, \quad (2.65)$$

корни которого существенно зависят от параметра  $\alpha/D^s$ .

Для малых значений  $\alpha/D^s \ll 1$  имеем для корней уравнения (2.65) приближенные решения

$$\lambda_1 = D^s + \frac{2\alpha^2}{3D^s}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} D^s + i|\alpha|, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} D^s - i|\alpha|.$$

Следовательно, в диапазоне времен  $D^s t \gg 2$  решение задачи полностью определяется случайным фактором. Это означает, что эффекты, связанные с флуктуациями поля скоростей, полностью доминируют над эффектами, связанными со слабым градиентом линейного сдвига.

В другом предельном случае  $\alpha/D^s \gg 1$  уравнение (2.65) имеет корни

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \alpha^2 D^s}, \quad \lambda_2 = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \alpha^2 D^s} e^{i(2/3)\pi}, \quad \lambda_3 = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \alpha^2 D^s} e^{-i(2/3)\pi}.$$

Так как действительные части величин  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  отрицательны, то при  $\sqrt[3]{\frac{3}{2}\alpha^2 D^s t} \gg 1$  асимптотическое решение системы (2.64) имеет вид

$$\langle p^2(t) \rangle \sim \exp \left\{ \sqrt[3]{\frac{3}{2}\alpha^2 D^s t} \right\},$$

и, следовательно, даже малые флуктуации поля скоростей являются определяющими в присутствии сильного градиента сдвигового потока.

### 2.3.2. Учет молекулярной диффузии

Как отмечалось ранее, гладкое вначале распределение примеси становится все более и более пространственно неоднородным, возникает динамика на все меньших и меньших масштабах и пространственные градиенты плотности обостряются при наличии флуктуаций поля скоростей. В реальных условиях, конечно, существование молекулярной диффузии сглаживает такие процессы и описанная выше динамика справедлива лишь на ограниченном интервале времени.

При наличии молекулярной диффузии примеси описывается стохастическим уравнением в частных производных второго порядка (1.25) на с. 18, для которого уже не удастся получить уравнения для одноточечной плотности вероятностей. В этом случае приходится прибегать к различным приближенным методам (см., например, [38, 48, 56, 91]) или численному моделированию. Первая попытка численного моделирования влияния молекулярной диффузии на кластерную структуру поля примеси в потенциальных полях скорости предпринята в работе [21].

### Оценка условия применимости пренебрежения молекулярной диффузией. Теория возмущений

Оценим время в простейшем случае бездивергентного двумерного потока, для которого эффекты молекулярной диффузии несущественны [58, 59].

Следствием уравнения (1.25) на с. 18 является то обстоятельство, что теперь величина  $\rho^n(\mathbf{r}, t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  будет описываться незамкнутым уравнением

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \rho^n(\mathbf{r}, t) = \mu \Delta \rho^n(\mathbf{r}, t) - \mu n(n-1) \rho^{n-2}(\mathbf{r}, t) \mathbf{p}^2(\mathbf{r}, t).$$

Усредняя это уравнение по ансамблю реализаций поля скоростей, получаем незамкнутое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = (D_0 + \mu) \Delta \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle - \mu n(n-1) \langle \rho^{n-2}(\mathbf{r}, t) \mathbf{p}^2(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (2.66)$$

При условии  $\mu \ll D_0$  уравнение (2.66) можно переписать в интегральном виде

$$\langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = e^{D_0 t \Delta} \rho_0^n(\mathbf{r}) - \mu n(n-1) \int_0^t d\tau e^{D_0(t-\tau)\Delta} \langle \rho^{n-2}(\mathbf{r}, \tau) \mathbf{p}^2(\mathbf{r}, \tau) \rangle. \quad (2.67)$$

Чтобы оценить последний член в (2.67), воспользуемся уравнением (2.58), соответствующим отсутствию молекулярной диффузии. В результате для величины  $\langle \rho^{n-2}(\mathbf{r}, \tau) \mathbf{p}^2(\mathbf{r}, \tau) \rangle$  можно получить замкнутое уравнение, решение которого имеет вид

$$\langle \rho^{n-2}(\mathbf{r}, t) \mathbf{p}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = e^{D^s t + D_0 t \Delta} \rho_0^{n-2}(\mathbf{r}) \mathbf{p}_0^2(\mathbf{r}). \quad (2.68)$$

Подставляя (2.68) в (2.67), можно получить условия, при которых последний член в правой части (2.67) не играет роли. Эти условия накладывают ограничения на характерный пространственный масштаб начального распределения плотности —  $\mathbf{r}_0^2$  и на временной интервал. Они имеют вид

$$D^s \mathbf{r}_0^2 \gg \mu n(n-1), \quad D^s t \ll \ln \frac{D^s \mathbf{r}_0^2}{\mu n^2}.$$

### Задача со средним градиентом плотности

Случай, когда имеется средний градиент плотности, допускает более полный анализ [57–59]. Этот случай соответствует решению уравнения (1.25) на с. 18 с начальными условиями (здесь мы также ограничиваемся двумерным случаем)

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \mathbf{G} \mathbf{r}, \quad \mathbf{p}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{G}.$$

Представляя поле плотности в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{G} \mathbf{r} + \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t),$$

получаем уравнение для флуктуирующей части  $\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)$  поля плотности:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{G} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mu \Delta \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t), \quad \tilde{\rho}(\mathbf{r}, 0) = 0. \quad (2.69)$$

Решение этой задачи, в отличие от рассмотренных выше, является статистически пространственно однородным случайным полем, т.е. все одноточечные статистические средние не зависят от  $\mathbf{r}$ . Это решение имеет стационарные (при  $t \rightarrow \infty$ ) плотности вероятностей как самого поля плотности, так и его градиента, и в последнее время привлекает значительное внимание не только с теоретической, но и с экспериментальной стороны (см. работы [49, 53–55, 84, 85, 90]). В этих работах на основе численного моделирования и использования феноменологических моделей было обнаружено существование у распределения «медленно затухающих хвостов» экспоненциального типа. Отметим, что в работе [90] было показано, что и стационарная плотность самого поля плотности также имеет «медленно затухающие хвосты».

В этом случае вместо уравнения (2.66) из уравнения (2.69) следует уравнение

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{\rho}^n(\mathbf{r}, t) \rangle = n(n-1) D_0 \mathbf{G}^2 \langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \rangle - \mu n(n-1) \langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (2.70)$$

где

$$\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{G}.$$

В стационарном режиме (при  $t \rightarrow \infty$ ) из (2.70) следует, что

$$\langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{D_0 \mathbf{G}^2}{\mu} \langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (2.71)$$

и, в частности, для  $n = 2$ , выражение для дисперсии флуктуаций градиента плотности [57]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{D_0 \mathbf{G}^2}{\mu}. \quad (2.72)$$

Следовательно, выражение (2.71) можно переписать в виде

$$\langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (2.73)$$

т. е. в стационарном режиме величины  $\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)$  и  $\tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t)$  — статистически независимы. Перепишем теперь уравнение (2.70) в виде

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{\rho}^n(\mathbf{r}, t) \rangle = n(n-1)D_0 \mathbf{G}^2 \langle f(\mathbf{r}, t) \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (2.74)$$

где

$$f(\mathbf{r}, t) = 1 - \frac{\mu}{D_0 \mathbf{G}^2} \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t).$$

Следовательно, дисперсия плотности описывается выражением ( $\langle \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$ )

$$\langle \tilde{\rho}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = 2D_0 \mathbf{G}^2 \int_0^t d\tau \langle f(\mathbf{r}, \tau) \rangle. \quad (2.75)$$

При отсутствии молекулярной диффузии имеем  $f(\mathbf{r}, t) \equiv 1$  и, следовательно,

$$\langle \tilde{\rho}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = 2D_0 \mathbf{G}^2 t. \quad (2.76)$$

В этом случае одноточечное распределение поля  $\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)$  гауссово и поле  $\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)$  некоррелировано с его пространственным градиентом. В общем случае выражение (2.76) справедливо для достаточно малых времен.

Отметим, что корреляционная функция поля  $\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\Gamma(\mathbf{r}, t) = \langle \tilde{\rho}(\mathbf{r}_1, t) \tilde{\rho}(\mathbf{r}_2, t) \rangle, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

для данной задачи описывается уравнением, вытекающим из (2.69):

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\mathbf{r}, t) = 2G_i G_j B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}) + 2 \left[ B_{ij}^{\text{eff}}(0) - B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}) + \mu \delta_{ij} \right] \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \Gamma(\mathbf{r}, t),$$

и, следовательно, стационарное значение

$$\Gamma(\mathbf{r}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(\mathbf{r}, t)$$

описывается уравнением

$$G_i G_j B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}) = - \left[ B_{ij}^{\text{eff}}(0) - B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{r}) + \mu \delta_{ij} \right] \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \Gamma(\mathbf{r}). \quad (2.77)$$

Полагая в этом уравнении  $\mathbf{r} = 0$ , мы приходим, с учетом соотношений (2.3), (2.4) на с. 24, к равенству (2.72). А дифференцируя уравнение (2.77) дважды по  $\mathbf{r}$  и полагая  $\mathbf{r} = 0$ , получаем равенство

$$\mu^2 \langle (\Delta \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t))^2 \rangle = \frac{1}{2} D^s (D_0 + \mu) \mathbf{G}^2. \quad (2.78)$$

Точные равенства (2.72) и (2.78) можно использовать для тестирования различных численных схем и проверки результатов численного моделирования. Однако для вычисления стационарного значения  $\langle \tilde{\rho}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$  при  $t \rightarrow \infty$  необходимо знать временную эволюцию второго момента  $\langle \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ . Такую информацию можно получить лишь при

отсутствии молекулярной диффузии. В этом случае плотность вероятностей для градиента плотности описывается уравнением (2.56), которое для рассматриваемой задачи упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t; \mathbf{p}) = \frac{1}{8} D^s \left( 3 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) P(\mathbf{r}, t; \mathbf{p}), \quad (2.79)$$

$$P(0, \mathbf{r}; \mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{G}).$$

Следовательно, согласно равенству (2.60)

$$\langle |\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle = \mathbf{G}^2 \{ e^{D^s t} - 1 \}. \quad (2.80)$$

Точная формула (2.72) и равенство (2.80) позволяют оценить время выхода на статистический стационарный режим для величины  $\langle \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$  при  $t \rightarrow \infty$ , а именно

$$D^s T_0 \sim \ln \left( \frac{D_0 + \mu}{\mu} \right).$$

Следовательно, для стационарной дисперсии флуктуаций поля плотности из равенства (2.75) получаем оценку

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \tilde{\rho}^2(\mathbf{r}, t) \rangle \sim 2 \frac{D_0}{D^s} \mathbf{G}^2 \ln \left( \frac{D_0 + \mu}{\mu} \right).$$

Принимая во внимание, что  $D_0 \sim \sigma_u^2 \tau_0$  и  $D_0/D^s \sim l_0^2$ , где  $\sigma_u^2$  — дисперсия флуктуаций поля скорости, а  $\tau_0$  и  $l_0$  — его временной и пространственный радиусы корреляции соответственно, видим, что время  $T_0$ , ввиду логарифмической зависимости от коэффициента молекулярной зависимости  $\mu$ , может быть не слишком большим:

$$T_0 \approx \frac{l_0^2}{\sigma_u^2 \tau_0} \ln \left( \frac{\sigma_u^2 \tau_0}{\mu} \right),$$

а величина

$$\langle \tilde{\rho}^2 \rangle \sim \mathbf{G}^2 l_0^2 \ln \left( \frac{\sigma_u^2 \tau_0}{\mu} \right) \quad \text{при} \quad \mu \ll \sigma_u^2 \tau_0.$$

### 2.3.3. Условия применимости дельта-коррелированного приближения

Условием применимости приближения дельта-коррелированности случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  (2.8) является условие малости временного радиуса корреляции  $\tau_0$  поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  по сравнению со всеми временными масштабами, имеющимися в рассматриваемой задаче, т. е.  $\tau_0 \ll \tau_1$ . При наличии среднего потока параметр  $\tau_1 \sim L/v$ , или  $L/\sqrt{\langle \mathbf{u}^2 \rangle}$ , где параметр  $L$  представляет собой типичный масштаб длины. Этот масштаб может зависеть от свойств среднего течения (например,  $L = v/|\nabla v|$  — типичный размер вихрей) или от плотности примеси ( $L = \rho/|\nabla \rho|$ ). В любом случае эти размеры уменьшаются со временем за счет появления мелкокомасштабных структур. В результате два временных масштаба становятся сравнимыми, и в такой ситуации приближение дельта-коррелированности становится неприменимым. Необходимо принимать во внимание конечность временного радиуса корреляции  $\tau_0$ . При отсутствии среднего потока параметр  $L = l_0$  совпадает с пространственным радиусом корреляции случайного поля

$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и условием применимости приближения дельта-коррелированности случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  являются условия

$$t \gg \tau_0, \quad \frac{\sigma_{\mathbf{u}}^2 \tau_0^2}{l_0^2} \ll 1. \quad (2.81)$$

### 2.3.4. Диффузионное приближение

Учет конечности временного радиуса корреляции случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  можно провести в рамках диффузионного приближения (см., Приложение С). Это приближение более наглядно и физично, чем формальное математическое приближение дельта-коррелированного случайного поля. В рамках этого приближения предполагается, что влияние случайных воздействий на временных масштабах порядка  $\tau_0$  несущественно, т. е. частицы и поле примеси на этих масштабах эволюционируют как свободные. Более подробно применение этого приближения будет рассмотрено в дальнейшем при анализе кластеризации малоинерционной примеси, а также диффузии и кластеризации оседающей примеси. Здесь же рассмотрим в качестве примера задачу диффузии при наличии плоско-параллельного среднего потока. Отметим, что, при отсутствии среднего потока уравнения для плотностей вероятностей как лагранжевых, так и эйлеровой переменных при условии  $t \gg \tau_0$  полностью совпадают с уравнениями, полученными в приближении дельта-коррелированности поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Условиями применимости диффузионного приближения при этом также являются условия (2.81).

#### Плоско-параллельный средний поток

Рассмотрим двумерную задачу о статистическом описании среднего поля плотности в бездивергентном случайном поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  с плоско-параллельным средним потоком в диффузионном приближении. В этом случае поле плотности с учетом молекулярной диффузии описывается уравнением

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + [v(y)\mathbf{l} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \rho(\mathbf{r}, t) = \mu \Delta \rho(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}). \quad (2.82)$$

Динамика лагранжевых частиц в отсутствие эффектов молекулярной диффузии описывается векторным уравнением (2.29) на с. 29:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = v(y)\mathbf{l} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{l} = (1, 0), \quad (2.83)$$

или системой уравнений в скалярном виде:

$$\frac{d}{dt} x(t) = v(y) + u_1(\mathbf{r}, t), \quad \frac{d}{dt} y(t) = u_2(\mathbf{r}, t).$$

Усредняя уравнение (2.82) по ансамблю реализаций случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и учитывая формулу Фурутцу–Новикова (2.7) на с. 24, получаем уравнение для среднего поля плотности  $\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle$  вида

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v(y)\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \mu \Delta \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle - \\ - \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \frac{\partial}{\partial r_i} \left\langle \frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle_{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

В диффузионном приближении вариационная производная поля плотности при  $t' < t$  описывается уравнением

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v(y)\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} = \mu \Delta \frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \quad (2.85)$$

с начальным условием

$$\left. \frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right|_{t=t'} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} \rho(\mathbf{r}, t'). \quad (2.86)$$

Обычно в геофизических задачах влияние величины  $\mu$  — коэффициента молекулярной диффузии — достаточно мало на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции  $\tau_0$ . И член, содержащий  $\mu$ , может быть опущен в уравнении (2.85) (во всяком случае нас интересует предел  $\mu \rightarrow 0$ ), т. е. для вариационной производной можно рассматривать более простое уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v(y)\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} = 0, \quad (2.87)$$

$$\left. \frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right|_{t=t'} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} \rho(\mathbf{r}, t').$$

При этом можно сохранить член, содержащий  $\mu$  в уравнении (2.84), так как он в некоторых случаях может быть регуляризирующим фактором. В этом случае решение уравнения (2.87) имеет структуру

$$\frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} = -\exp\left(- (t - t')v(y)\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} \rho(\mathbf{r}, t'). \quad (2.88)$$

Также в диффузионном приближении величина  $\rho(\mathbf{r}, t')$  в правой части (2.88) может быть определена из первоначальной динамической системы (2.82) в отсутствие флуктуационного члена и члена с параметром  $\mu$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v(y)\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, t)|_{t=t'} = \rho(\mathbf{r}, t'), \quad (2.89)$$

и, следовательно,

$$\rho(\mathbf{r}, t') = \exp\left((t - t')v(y)\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \rho(\mathbf{r}, t). \quad (2.90)$$

Подставляя теперь равенства (2.88) и (2.90) в уравнение (2.84), получаем искомое уравнение для среднего поля плотности:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v(y)\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \mu \Delta \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle + \int d\mathbf{r}' \int_0^t d\tau B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial r_i} \left\{ \exp\left(-\tau v(y)\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} \left[ \exp\left(\tau v(y)\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

В уравнении (2.91) можно выполнить интегрирование по  $\mathbf{r}'$  и в результате получаем уравнение

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v(y)\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \mu \Delta \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle + \\ + \frac{\partial}{\partial r_i} \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau v(y)\mathbf{l}, \tau) \exp\left(-\tau v(y)\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \frac{\partial}{\partial r_j} \left[ \exp\left(\tau v(y)\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.92)$$



Отметим, что оператор в правой части уравнения (2.92) можно переписать в виде

$$\exp\left(-\tau v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\frac{\partial}{\partial r_j}\exp\left(\tau v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)=\frac{\partial}{\partial r_j}+\tau\frac{dv(y)}{dy}\delta_{j,2}\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}},$$

и, следовательно, уравнение (2.92) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t}+v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle &= \\ &= \mu\Delta\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle+\frac{\partial}{\partial r_i}\left(D_{ij}^{(1)}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial r_j}+D_{i2}^{(2)}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle, \end{aligned} \quad (2.93)$$

где введены коэффициенты диффузии

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(1)}(\mathbf{r},t) &= \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau v(y)\mathbf{l},\tau), \\ D_{i2}^{(2)}(\mathbf{r},t) &= \int_0^t d\tau \tau B_{i2}(\tau v(y)\mathbf{l},\tau)\frac{dv(y)}{dy}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Если упростить задачу, рассматривая поведение системы на временных масштабах  $t \gg \tau_0$ , то можно заменить верхние пределы в интегралах (2.94) на бесконечность и переписать уравнение (2.93) в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t}+v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle &= \\ &= \mu\Delta\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle+\frac{\partial}{\partial r_i}\left(D_{ij}^{(1)}(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial r_j}+D_{i2}^{(2)}(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle, \end{aligned} \quad (2.95)$$

где теперь коэффициенты диффузии равны

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}) &= \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\tau v(y)\mathbf{l},\tau), \\ D_{i2}^{(2)}(\mathbf{r}) &= \int_0^\infty d\tau \tau B_{i2}(\tau v(y)\mathbf{l},\tau)\frac{dv(y)}{dy}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Уравнение (2.95) можно рассматривать и как уравнение для одноточечной плотности вероятностей положения лагранжевой частицы в диффузионном приближении с учетом эффектов молекулярной диффузии, если дополнить уравнение (2.83) гауссовыми случайными возмущениями  $\mathbf{f}(t)$  (см. замечание 1.1. на с. 18):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= v(y)\mathbf{l}+\mathbf{u}(\mathbf{r}(t),t)+\mathbf{f}(t), \\ \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_0, \end{aligned}$$

со статистическими параметрами

$$\langle\mathbf{f}(t)\rangle=0, \quad \langle f_i(t)f_j(t')\rangle=2\mu\delta_{ij}\delta(t-t').$$

Отметим, что предельный случай стационарного случайного поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , соответствующий предельному случаю  $\tau_0 \rightarrow \infty$ , не описывается диффузионным приближением. Этот случай, удобный для численного моделирования, очень труден для аналитических исследований, хотя некоторые результаты были получены в рамках такого приближения (см., например, работы [32, 66, 67]).

## 2.4. Особенности диффузии примеси в быстропеременных случайных волновых полях

Движение частиц в быстропеременных случайных полях скорости или под действием быстропеременных случайных сил представляет собой важную проблему, имеющую многочисленные приложения в механике, гидродинамике, физике плазмы и т. п. При этом хорошо известно, что стохастический перенос в быстропеременных колебательных и волновых полях приводит к ряду важных физических явлений, таких, например, как ускорение Ферми, стохастический нагрев плазмы и т. п. [7, 23, 87].

В ряде случаев коэффициенты диффузии как в приближении дельта-коррелированного случайного поля, так и в диффузионном приближении могут обратиться в нуль. Такой случай, например, имеет место при движении частиц в быстропеременных случайных волновых полях скоростей [20] (см. также работы [293–295]).

Так, диффузия безынерционных частиц в этом случае описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)=\mathbf{u}(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_0, \quad (2.97)$$

где  $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$  — статистически однородное в пространстве и стационарное во времени случайное волновое векторное поле такое, что  $\langle\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle=0$ .

Введем теперь новое поле  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t)$  с единичной дисперсией, такое что

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\sigma_{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t),$$

где дисперсия поля скоростей

$$\sigma_{\mathbf{u}}^2=B_{ii}(0,0).$$

Будем считать, что это случайное поле имеет волновое происхождение и, следовательно, его корреляционный тензор имеет структуру

$$B_{ij}(\mathbf{r},t)=\int d\mathbf{k}F_{ij}(\mathbf{k})\cos\{\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega(\mathbf{k})t\}, \quad (2.98)$$

где спектральная функция  $F_{ij}(\mathbf{k})$  такова, что  $\int d\mathbf{k}F_{ii}(\mathbf{k})=1$  и  $\omega=\omega(\mathbf{k})>0$  представляет собой *дисперсионную кривую* для волновых движений. Так, например, для *акустических волн*  $\omega(\mathbf{k})=ck$ , где  $c$  — скорость распространения звука, для *гравитационных волн* на поверхности глубокой жидкости  $\omega(\mathbf{k})=\sqrt{gk}$ , для *внутренних гравитационных волн* в стратифицированной среде  $\omega(\mathbf{k})=N\sqrt{k^2-k_z^2}/k$ , где  $N$  — частота Брента-Вайсяля, для *волн Россби* в атмосфере и океане  $\omega(\mathbf{k})=-\beta k_x/k^2$ , где  $\beta$  — градиент силы Кориолиса в направлении  $y$ , и т. п.

Для традиционных волновых движений спектральная функция поля скорости удовлетворяет условию  $\Phi_{ij}(0)=0$ , где  $\Phi_{ij}(\omega)=\int d\mathbf{k}F_{ij}(\mathbf{k})\delta[\omega-\omega(\mathbf{k})]$ , и тензорный коэффициент диффузии в соответствующем уравнении Фоккера–Планка обращается в нуль, т. е.

$$D_{ij}=\int_0^\infty B_{ij}(0,t)dt=0.$$

Этот же коэффициент диффузии возникает и в диффузионном приближении при условии  $t \gg \tau_0$ , где  $\tau_0$  — временной радиус корреляции поля скорости. И, следовательно, как приближение дельта-коррелированности поля скоростей, так и диффузионное приближение не приводят к конечному результату, для получения которого необходимо учитывать члены высшего порядка малости [20].

Пусть максимум спектральной функции  $F_{ij}(\mathbf{k})$  соответствует некоторому волновому числу  $k_m$ , а максимум спектральной функции  $\Phi_{ij}(\omega)$  — частоте  $\omega_m$ . Определим пространственный и временной масштабы:  $l = 2\pi/k_m$ ,  $\tau_0 = 2\pi/\omega_m$ . При этом величина  $\varepsilon = \sigma_u \tau_0 / l$  для реальных волновых полей, как правило, мала и может рассматриваться как основной малый параметр задачи, т.е.  $\varepsilon \ll 1$ . Будем также считать, что во всей области, где определен спектр поля скорости, справедливо неравенство  $\sigma_u k \ll \omega(k)$ , которое обуславливает отсутствие резонансов между разными компонентами поля скорости.

Существование максимумов спектральных функций  $F_{ij}(\mathbf{k})$  и  $\Phi_{ij}(\omega)$  отнюдь не означает присутствия квазирегулярной составляющей в поле случайных скоростей. И их существование обусловлено тем, что само поле скоростей является результатом дифференцирования (по пространству и времени) других вспомогательных волновых полей (например, поля потенциала для потенциального поля скоростей или поля смещения границы раздела и т.п.). Конечно, если спектральные функции являются очень «узкими», т.е. имеют дельтаобразный вид относительно центральной частоты (волнового числа), то возможно предварительно упростить задачу путем динамического усреднения по быстрым осцилляциям с центральной частотой (волновым числом) исходных стохастических уравнений. Однако для большинства геофизических волновых задач такая ситуация не имеет места.

Отметим, что гипотеза статистической пространственной однородности имеет, вообще говоря, ограниченную применимость и несправедлива, например, для волн в атмосферном или океаническом волноводах, при рассмотрении переноса ограниченными волновыми пакетами и т.п. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением гауссова статистически однородного волнового поля скорости, сосредоточив внимание на принципиальной стороне вопроса. Для получения конкретных количественных результатов необходимо рассматривать статистические модели самого волнового поля с точностью до квадратичных членов. При этом, вообще говоря, возникает средний перенос (*стоксов дрейф*) и диффузия частиц, которые для разных частных случаев рассматривались, например в работах [52, 88, 96], на основе подхода, предложенного в свое время Тейлором [94]. Нашей же целью является применение к указанному классу задач более общего и последовательного подхода, справедливого для волн различной природы, предложенного в работе [20], и основанного на построении метода последовательных приближений для решения уравнений для вариационных производных. Такой подход позволяет получить некоторые обобщения теории переноса, основанной на уравнении Фоккера-Планка, вычислять различные статистические характеристики ансамблей частиц, переносимых волновыми течениями, и анализировать на основе методов статистической топографии эффекты, связанные с кластеризацией и образованием когерентных структур в полях плотности примеси.

Диффузия пассивной примеси в случайном поле скоростей  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$  описывается линейным уравнением в частных производных первого порядка, являющимся уравнением непрерывности для плотности консервативной примеси:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_u \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (2.99)$$

где  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$  — статистически однородное в пространстве и стационарное во времени случайное волновое векторное поле со средним значением  $\langle \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$  и корреляционным тензором

$$\langle \tilde{u}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{u}_j(\mathbf{r}', t') \rangle = B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \quad (B_{ii}(0, 0) = 1).$$

Линейное уравнение в частных производных первого порядка (2.99) может быть решено методом характеристик. Вводя характеристические кривые (траектории частицы), динамика которых описывается уравнением

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \sigma_u \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (2.100)$$

его можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -\sigma_u \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(t), \quad \rho(0) = \rho_0(\mathbf{r}_0). \quad (2.101)$$

Такая формулировка задачи соответствует лагранжеву описанию, в то время как исходное динамическое уравнение (2.99) соответствует эйлерову описанию.

Решение системы уравнений (2.100), (2.101) зависит от характеристического параметра — начального значения  $\mathbf{r}_0$ , т.е.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0), \quad \rho(t) = \rho(t|\mathbf{r}_0), \quad (2.102)$$

что будем отмечать вертикальной чертой.

Тогда решение исходного уравнения (2.99) можно записать в виде равенства

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \quad (2.103)$$

устанавливающего связь между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками.

### 2.4.1. Лагранжево описание

Введем обозначения для индикаторной функции координаты лагранжевой частицы,

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}), \quad (2.104)$$

а также первой и второй вариационных производных, необходимых в дальнейшем для вычисления статистических средних:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta \tilde{u}_i(\mathbf{r}', t')} &= \sigma_u S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'), \\ \frac{\delta^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta \tilde{u}_i(\mathbf{r}', t') \delta \tilde{u}_j(\mathbf{r}'', t'')} &= \sigma_u^2 S_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Для индикаторной функции имеем стохастические уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t) = -\sigma_u \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} \{ \tilde{u}_k(\mathbf{r}, t) \varphi(\mathbf{r}, t) \}, \quad \varphi(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (2.106)$$

которое можно переписать в виде интегрального уравнения:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \sigma_u \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} \int_0^t d\tau \tilde{u}_k(\mathbf{r}, \tau) \varphi(\mathbf{r}, \tau). \quad (2.107)$$

Для первой вариационной производной (2.105), учитывая, что она отлична от нуля только при  $t \geq t'$ , получаем стохастическое интегральное уравнение

$$S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \hat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}, t') \theta(t - t') - \sigma_u \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} \int_{t'}^t d\tau \tilde{u}_k(\mathbf{r}, \tau) S_i(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', t'), \quad (2.108)$$

где действие оператора  $\widehat{L}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  на функцию  $f(\mathbf{r})$  описывается формулой

$$\widehat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')f(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial r_i} \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')f(\mathbf{r}) \}. \quad (2.109)$$

Аналогичным образом для второй вариационной производной получаем стохастическое интегральное уравнение

$$\begin{aligned} S_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t'') &= \widehat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')S_j(\mathbf{r}, t'; \mathbf{r}'', t'')\theta(t-t')\theta(t'-t'') + \\ &+ \widehat{L}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')S_i(\mathbf{r}, t''; \mathbf{r}', t')\theta(t-t'')\theta(t''-t') - \\ &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{\partial}{\partial r_l} \int_{\max\{t', t''\}}^t d\tau \widetilde{u}_l(\mathbf{r}, \tau) S_{ij}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''). \end{aligned} \quad (2.110)$$

Усредним теперь уравнение (2.106) по ансамблю реализаций поля  $\{\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)\}$ . Тогда для лагранжевой плотности вероятности положения частицы  $P(\mathbf{r}, t) = \langle \varphi(\mathbf{r}, t) \rangle$  с учетом формулы Фурутцу–Новикова (2.7) на с. 24 получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) &= -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{\partial}{\partial r_k} \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' B_{ki}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t-t') \langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \rangle, \\ P(\mathbf{r}, 0) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (2.111)$$

Интегрируя уравнение (2.111) по времени в интервале  $(t_1, t)$ , где  $t_1 < t$ , получаем равенство

$$P(\mathbf{r}, t) - P(\mathbf{r}, t_1) = -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{\partial}{\partial r_l} \int_{t_1}^t d\tau \int d\mathbf{r}'' \int_0^\tau dt'' B_{lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau-t'') \langle S_j(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}'', t'') \rangle. \quad (2.112)$$

Усредним теперь уравнение (2.108) по ансамблю реализаций поля  $\{\widetilde{u}_k(\mathbf{r}, t)\}$ . Тогда для величины  $\langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \rangle$  получаем уравнение

$$\begin{aligned} \langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \rangle &= \widehat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')P(\mathbf{r}, t')\theta(t-t') - \\ &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{\partial}{\partial r_l} \int_{t'}^t d\tau \int d\mathbf{r}'' \int_0^\tau dt'' B_{lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau-t'') \langle S_{ij}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t'') \rangle. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Для функции  $\langle S_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t''; \mathbf{r}'', t) \rangle$  используем приближенное выражение

$$\begin{aligned} \langle S_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t''; \mathbf{r}'', t) \rangle &= \widehat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \langle S_j(\mathbf{r}, t'; \mathbf{r}'', t'') \rangle \theta(t-t')\theta(t'-t'') + \\ &+ \widehat{L}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \langle S_i(\mathbf{r}, t''; \mathbf{r}', t') \rangle \theta(t-t'')\theta(t''-t'), \end{aligned} \quad (2.114)$$

соответствующее пренебрежению вариационными производными третьего порядка в (2.110). С учетом этого приближения и равенства (2.112) уравнение (2.113) можно

записать в виде замкнутого интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} \langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \rangle &= \widehat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')P(\mathbf{r}, t)\theta(t-t') + \\ &+ \sigma_{\mathbf{u}}^2 \widehat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_l} \int_{t'}^t d\tau \int d\mathbf{r}'' \int_0^\tau dt'' B_{lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau-t'') \langle S_j(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}'', t'') \rangle - \\ &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{\partial}{\partial r_l} \int_{t'}^t d\tau \int d\mathbf{r}'' \int_0^\tau dt'' B_{lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau-t'') \widehat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \langle S_j(\mathbf{r}, t'; \mathbf{r}'', t'') \rangle - \\ &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{\partial}{\partial r_l} \int_{t'}^t d\tau \int d\mathbf{r}'' \int_0^\tau dt'' B_{lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau-t'') \widehat{L}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \langle S_i(\mathbf{r}, t''; \mathbf{r}', t') \rangle. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Решая уравнение (2.115) для  $\langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \rangle$  методом последовательных приближений по параметру  $\sigma_{\mathbf{u}}^2$  с точностью до малых членов (при этом временные аргументы  $t_i$  у функций  $P(\mathbf{r}, t_i)$  можно заменить на  $t$ ), имеем

$$\begin{aligned} \langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \rangle &= \left\{ \widehat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \sigma_{\mathbf{u}}^2 \widehat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_l} \int_{t'}^t d\tau \int d\mathbf{r}'' \int_0^\tau dt'' B_{lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', t'') \widehat{L}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') - \right. \\ &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{\partial}{\partial r_l} \int_{t'}^t d\tau \int d\mathbf{r}'' \int_0^\tau dt'' B_{lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau-t'') \widehat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \widehat{L}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') - \\ &\left. - \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{\partial}{\partial r_l} \int_{t'}^t d\tau \int d\mathbf{r}'' \int_0^\tau dt'' B_{lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau-t'') \widehat{L}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \widehat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} P(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.116)$$

Подставляя (2.116) в уравнение (2.111), можно выполнить интегрирование по всем пространственным переменным и получить уравнение третьего порядка по  $\mathbf{r}$  (в котором можно опустить члены с производной первого порядка, пропорциональные  $\sigma_{\mathbf{u}}^4$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) &= -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt' \frac{\partial B_{ki}(0, t')}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_k} P(\mathbf{r}, t) + \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt' B_{ki}(0, t') \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_i} P(\mathbf{r}, t) + \\ &+ \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_l} \int_0^t dt' B_{ki}(0, t-t') \int_{t'}^t d\tau \int_0^\tau dt'' \frac{\partial^2 B_{lj}(0, \tau-t'')}{\partial r_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, t) + \\ &+ \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_l} \int_0^t dt' \frac{\partial^2 B_{ki}(0, t-t')}{\partial r_i \partial r_j} \int_{t'}^t d\tau \int_0^\tau dt'' B_{lj}(0, \tau-t'') P(\mathbf{r}, t) + \\ &+ \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_j} \int_0^t dt' \frac{\partial B_{ki}(0, t-t')}{\partial r_l} \int_{t'}^t d\tau \int_0^\tau dt'' \frac{\partial B_{lj}(0, \tau-t'')}{\partial r_i} P(\mathbf{r}, t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_i} \int_0^t dt' \frac{\partial B_{ki}(0, t-t')}{\partial r_l} \int_{t'}^t d\tau \int_0^\tau dt'' \frac{\partial B_{lj}(0, t'')}{\partial r_j} P(\mathbf{r}, t) + \\
& + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_j} \int_0^t dt' \frac{\partial^2 B_{ki}(0, t-t')}{\partial r_i \partial r_l} \int_{t'}^t d\tau \int_0^\tau dt'' B_{lj}(0, t'') P(\mathbf{r}, t) + \\
& + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_i} \int_0^t dt' \frac{\partial^2 B_{ki}(0, t-t')}{\partial r_l \partial r_j} \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^\tau dt'' B_{lj}(0, \tau-t'') P(\mathbf{r}, t) - \\
& - \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^3}{\partial r_k \partial r_l \partial r_j} \int_0^t dt' B_{ki}(0, t-t') \int_{t'}^t d\tau \int_0^{\tau'} dt'' \frac{\partial B_{lj}(0, \tau-t'')}{\partial r_i} P(\mathbf{r}, t) - \\
& - \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^3}{\partial r_k \partial r_l \partial r_j} \int_0^t dt' \frac{\partial B_{ki}(0, t-t')}{\partial r_j} \int_{t'}^t d\tau \int_{t'}^\tau dt'' B_{lj}(0, \tau-t'') P(\mathbf{r}, t) - \\
& - \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\partial^3}{\partial r_k \partial r_i \partial r_j} \int_0^t dt' \frac{\partial B_{ki}(0, t-t')}{\partial r_l} \int_{t'}^t d\tau \int_0^\tau dt'' B_{lj}(0, t'') P(\mathbf{r}, t). \quad (2.117)
\end{aligned}$$

Уравнение (2.117) не является, вообще говоря, уравнением для плотности вероятности, так как может приводить к отрицательным величинам в области ее малых значений. Вместе с тем его решение правильно описывает статистические моменты и в этом смысле является обобщением уравнения Фоккера–Планка. Используя теперь спектральное представление поля скоростей (2.98) и его свойства, можно выполнить интегрирование по времени в коэффициентах уравнения, и для больших значений времен ( $t \gg \tau_0$ ) уравнение (2.117) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) & = -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})} k_i F_{ki}(\mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial r_k} P(\mathbf{r}, t) + \\
& + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} k_{1l} k_{1j} F_{ki}(\mathbf{k}_1) F_{lj}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_i} P(\mathbf{r}, t) + \\
& + \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} k_{1l} k_{2i} F_{ki}(\mathbf{k}_1) F_{lj}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_j} P(\mathbf{r}, t), \quad (2.118)
\end{aligned}$$

где  $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ ,  $\omega_2 = \omega(\mathbf{k}_2)$ .

Уравнение (2.118) уже представляет собой уравнение Фоккера–Планка, описывающее плотность вероятности положения частицы, переносимой статистически однородным гауссовым волновым полем скоростей.

Для изотропных флуктуаций поля  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$  уравнение (2.118) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) = D \frac{\partial^2}{\partial r^2} P(\mathbf{r}, t), \quad (2.119)$$

соответствующий гауссову случайному векторному процессу  $\mathbf{r}(t)$  со средним значением  $\langle \mathbf{r}(t) \rangle = \mathbf{r}_0$  и дисперсией

$$\sigma_{\mathbf{r}}^2(t) = \langle (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)^2 \rangle = 2dDt, \quad (2.120)$$

где  $d$  — размерность пространства, а коэффициент диффузии

$$D = \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2d} \int d\mathbf{k}_1 \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} k_{1l} k_{1j} F_{ii}(\mathbf{k}_1) F_{lj}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2). \quad (2.121)$$

В этом случае спектральный тензор волнового поля скоростей имеет структуру

$$F_{ki}(\mathbf{k}) = F^s(k) \left( \delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2} \right) + F^p(k) \frac{k_i k_k}{k^2}, \quad (2.122)$$

где  $F^s(k)$  и  $F^p(k)$  — соленоидальная и потенциальная составляющие спектрального тензора соответственно,  $\omega(\mathbf{k}) \equiv \omega(k)$ , и, следовательно, для коэффициента диффузии получаем выражение

$$\begin{aligned}
D & = \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2d} \int \frac{d\mathbf{k}_1}{\omega_1^2} k_1^2 F_{ii}(\mathbf{k}_1) \int d\mathbf{k}_2 F_{ll}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) = \\
& = \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2d} \int \frac{d\mathbf{k}_1}{\omega_1^2} k_1^2 [F^s(k_1)(N-1) + F^p(k_1)]^2 \int d\mathbf{k}_2 \delta(\omega_1 - \omega_2). \quad (2.123)
\end{aligned}$$

Для анизотропной среды появляется пространственная асимметрия векторного процесса  $\mathbf{r}(t)$ . Его среднее значение и дисперсия описываются выражениями

$$\langle r_m(t) \rangle = r_{0m} + t \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})} k_i F_{mi}(\mathbf{k}),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathbf{r}}^2(t) & = \langle \mathbf{r}^2(t) - \langle \mathbf{r}(t) \rangle^2 \rangle = t \sigma_{\mathbf{u}}^4 \pi \int d\mathbf{k}_1 \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} k_{1l} k_{1j} F_{ii}(\mathbf{k}_1) F_{lj}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) + \\
& + t \sigma_{\mathbf{u}}^4 \pi \int d\mathbf{k}_1 \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} k_{1l} k_{2i} F_{ki}(\mathbf{k}_1) F_{lk}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2). \quad (2.124)
\end{aligned}$$

Как мы видим, коэффициент диффузии оказывается пропорциональным не дисперсии поля скорости, а ее квадрату. Это связано с тем, что в данной задаче отсутствуют резонансы типа «волна–частица», что ведет к уменьшению порядка дисперсии скорости случайного дрейфа частиц. Задача оказывается подобной задачам о колебаниях маятника Капицы или о вихревом дрейфе заряженных частиц в быстропеременном электрическом поле [7], где основной эффект также имеет квадратичную величину.

#### 2.4.2. Эйлерово описание

Перейдем теперь к статистическому описанию эйлерова представления. Для простоты будем считать, что начальное распределение поля плотности постоянно, т. е.  $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$ , и, следовательно, случайная функция  $\rho(\mathbf{r}, t)$  будет статистически однородной в пространстве, т. е. все ее одноточечные статистические характеристики не будут зависеть от пространственной точки  $\mathbf{r}$ .

Введем индикаторную функцию, аналогичную функции (2.104) в лагранжевом описании,

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho), \quad (2.125)$$

а также первую и вторую вариационные производные

$$\frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t; \rho)}{\delta \tilde{u}_i(\mathbf{r}', t')} = \sigma_{\mathbf{u}} S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \rho), \quad (2.126)$$

$$\frac{\delta^2 \varphi(\mathbf{r}, t; \rho)}{\delta \tilde{u}_i(\mathbf{r}', t') \delta \tilde{u}_j(\mathbf{r}'', t'')} = \sigma_{\mathbf{u}}^2 S_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''); \rho).$$

Для индикаторной функции  $\varphi(\mathbf{r}, t; \rho)$  с помощью уравнения (2.99) получаем стохастическое уравнение Лиувилля, которое запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \sigma_{\mathbf{u}}\widehat{N}(\mathbf{r}, t; \rho)\varphi(\mathbf{r}, t; \rho), \quad \varphi(\mathbf{r}, 0; \rho) = \delta(\rho(\mathbf{r}, 0) - \rho_0), \quad (2.127)$$

где оператор

$$\widehat{N}(\mathbf{r}, t; \rho) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}\rho\right). \quad (2.128)$$

Уравнение (2.127) можно переписать в виде интегрального уравнения:

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \delta(\rho(\mathbf{r}, 0) - \rho_0) + \sigma_{\mathbf{u}} \int_0^t d\tau \widehat{N}(\mathbf{r}, \tau; \rho)\varphi(\mathbf{r}, \tau; \rho). \quad (2.129)$$

Соответственно для первой вариационной производной (2.126) получаем стохастическое интегральное уравнение

$$S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \rho) = \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \rho)\varphi(\mathbf{r}, t'; \rho)\theta(t-t') + \sigma_{\mathbf{u}} \int_{t'}^t d\tau \widehat{N}(\mathbf{r}, \tau; \rho)S_i(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', t'; \rho), \quad (2.130)$$

где оператор

$$\widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \rho) = \left\{ \widehat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \widehat{M}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \rho) \right\},$$

оператор  $\widehat{L}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  описывается формулой (2.109), а действие оператора  $\widehat{M}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \rho)$  на функцию  $f(\mathbf{r}; \rho)$  описывается формулой

$$\widehat{M}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \rho)f(\mathbf{r}; \rho) = \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_i} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}\rho\right) f(\mathbf{r}; \rho). \quad (2.131)$$

Аналогичным образом для второй вариационной производной получаем стохастическое интегральное уравнение

$$\begin{aligned} S_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''; \rho) &= \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \rho)S_j(\mathbf{r}, t'; \mathbf{r}'', t''; \rho)\theta(t-t')\theta(t'-t'') + \\ &+ \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \rho)S_i(\mathbf{r}, t''; \mathbf{r}', t'; \rho)\theta(t-t'')\theta(t''-t') + \\ &+ \sigma_{\mathbf{u}} \int_{\max\{t', t''\}}^t d\tau \widehat{N}(\mathbf{r}, \tau; \rho)S_{ij}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''; \rho). \end{aligned} \quad (2.132)$$

Далее будем действовать, как и в случае лагранжевого описания. Усредним уравнение (2.127) по ансамблю реализаций поля  $\{\tilde{u}_k(\mathbf{r}, t)\}$ . Тогда для эйлеровой плотности вероятности  $P(t; \rho) = \langle \varphi(\mathbf{r}, t; \rho) \rangle$  с учетом формулы Фурутцу–Новикова (2.7) на с. 24 получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}P(t; \rho) &= \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' \frac{\partial B_{ki}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')}{\partial r_k} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}\rho\right) \langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \rangle, \\ P(0; \rho) &= \delta(\rho - \rho_0). \end{aligned} \quad (2.133)$$

Усредним теперь уравнение (2.130) по ансамблю реализаций поля  $\{\tilde{u}_k(\mathbf{r}, t)\}$ . Тогда для величины  $\langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \rho) \rangle$  получаем уравнение

$$\begin{aligned} \langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \rho) \rangle &= \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \rho)P(t'; \rho)\theta(t-t') - \\ &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int d\mathbf{r}'' \int_0^{\tau} dt'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_k} \langle S_{ij}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''; \rho) \rangle + \\ &+ \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int d\mathbf{r}'' \int_0^{\tau} dt'' \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_k} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}\rho\right) \langle S_{ij}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''; \rho) \rangle. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Для функции  $\langle S_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t'') \rangle$  используем приближенное выражение

$$\begin{aligned} \langle S_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t'') \rangle &= \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \rho) \langle S_j(\mathbf{r}, t'; \mathbf{r}'', t'') \rangle \theta(t-t')\theta(t'-t'') + \\ &+ \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; \rho) \langle S_i(\mathbf{r}, t''; \mathbf{r}', t') \rangle \theta(t-t'')\theta(t''-t'), \end{aligned} \quad (2.135)$$

соответствующее случаю, когда мы пренебрегаем вариационными производными третьего порядка в (2.132). С учетом этого приближения уравнение (2.134) можно записать в виде замкнутого интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} \langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \rho) \rangle &= \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \rho)P(t; \rho)\theta(t-t') - \\ &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \rho) \int_{t'}^t d\tau \int d\mathbf{r}'' \int_0^{\tau} dt'' \frac{\partial B_{lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}\rho\right) \langle S_j(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}'', t'') \rangle - \\ &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int d\mathbf{r}'' \int_0^{\tau} dt'' \frac{\partial B_{lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \rho) \langle S_j(\mathbf{r}, t'; \mathbf{r}'', t'') \rangle - \\ &- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int d\mathbf{r}'' \int_{t'}^{\tau} dt'' \frac{\partial B_{lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', \rho) \langle S_i(\mathbf{r}, t''; \mathbf{r}', t') \rangle + \\ &+ \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int d\mathbf{r}'' \int_0^{\tau} dt'' \frac{\partial B_{lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}\rho\right) \widehat{N}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \rho) \langle S_j(\mathbf{r}, t'; \mathbf{r}'', t'') \rangle + \\ &+ \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_{t'}^t d\tau \int d\mathbf{r}'' \int_{t'}^{\tau} dt'' \frac{\partial B_{lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', \tau - t'')}{\partial r_l} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho}\rho\right) \widehat{N}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', \rho) \langle S_i(\mathbf{r}, t''; \mathbf{r}', t') \rangle. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Решая уравнение (2.136) для  $\langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \rho) \rangle$  методом последовательных приближений по параметру  $\sigma_{\mathbf{u}}^2$  с точностью до малых членов (при этом временные аргументы  $t_i$  у функций  $P(t_i; \rho)$  можно заменить на  $t$ ) и интегрируя по  $\mathbf{r}''$ , получаем при  $t > t'$

$$\langle S_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \rho) \rangle = \widehat{T}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t'; \rho)P(t; \rho)\theta(t-t'), \quad (2.137)$$

где оператор  $\widehat{T}_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \rho)$  определяется равенством

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_i(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; \rho) &= \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + \\
&+ \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \int_0^t d\tau \int_0^\tau dt'' \frac{\partial B_{lj}(0, \tau - t'')}{\partial r_l \partial r_j} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho\right) \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + \\
&+ \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{\partial^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_i \partial r_l} \int_0^t d\tau \int_0^\tau dt'' \frac{\partial B_{lj}(0, \tau - t'')}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + \\
&+ \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{\partial^3 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_i \partial r_j \partial r_l} \int_0^t d\tau \int_0^\tau dt'' B_{lj}(0, \tau - t'') \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + \\
&+ \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{\partial^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_i \partial r_l} \int_0^t d\tau \int_0^\tau dt'' \frac{\partial B_{lj}(0, \tau - t'')}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \\
&- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau dt'' \frac{\partial B_{lj}(0, \tau - t'')}{\partial r_l \partial r_j} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho\right) \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \\
&- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{\partial^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_i \partial r_j} \int_0^t d\tau \int_0^\tau dt'' \frac{\partial B_{lj}(0, \tau - t'')}{\partial r_l} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho\right) \frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \\
&- \sigma_{\mathbf{u}}^2 \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_i} \int_0^t d\tau \int_0^\tau dt'' \frac{\partial^2 B_{lj}(0, \tau - t'')}{\partial r_l \partial r_j} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho\right) \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \rho. \quad (2.138)
\end{aligned}$$

Подставляя (2.138) в уравнение (2.133) и выполняя интегрирование по  $\mathbf{r}'$ , получаем уравнение

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P(t; \rho) &= -\sigma_{\mathbf{u}}^2 \int_0^t dt' \frac{\partial^2 B_{ki}(0, t')}{\partial r_k \partial r_i} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t; \rho) - \\
&- \sigma_{\mathbf{u}}^4 \int_0^t dt' \frac{\partial^2 B_{ki}(0, t')}{\partial r_k \partial r_i} \int_0^{t'} d\tau \int_0^\tau dt'' \frac{\partial^2 B_{lj}(0, t'' - \tau)}{\partial r_l \partial r_j} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 P(t; \rho) + \\
&+ \sigma_{\mathbf{u}}^4 \int_0^t dt' \frac{\partial^3 B_{ki}(0, t')}{\partial r_k \partial r_i \partial r_l} \int_0^{t'} d\tau \int_0^\tau dt'' \frac{\partial B_{lj}(0, t'' - \tau)}{\partial r_j} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \rho P(t; \rho) - \\
&- \sigma_{\mathbf{u}}^4 \int_0^t dt' \frac{\partial^4 B_{ki}(0, t')}{\partial r_k \partial r_i \partial r_j \partial r_l} \int_0^{t'} d\tau \int_0^\tau dt'' B_{lj}(0, t'' - \tau) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t; \rho) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \sigma_{\mathbf{u}}^4 \int_0^t dt' \frac{\partial^3 B_{ki}(0, t')}{\partial r_k \partial r_i \partial r_l} \int_0^{t'} d\tau \int_0^\tau dt'' \frac{\partial B_{lj}(0, t'' - \tau)}{\partial r_j} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t; \rho) + \\
&+ \sigma_{\mathbf{u}}^4 \int_0^t dt' \frac{\partial^2 B_{ki}(0, t')}{\partial r_k \partial r_i} \int_0^{t'} d\tau \int_0^\tau dt'' \frac{\partial^2 B_{lj}(0, t'' - \tau)}{\partial r_l \partial r_j} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho\right) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \rho P(t; \rho). \quad (2.139)
\end{aligned}$$

Используя теперь спектральное представление (2.98) и выполняя интегрирование по времени в коэффициентах уравнения для больших времен получаем окончательное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \rho) = D_\rho^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t; \rho) + D_\rho^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \rho P(t; \rho), \quad (2.140)$$

где

$$D_\rho^{(2)} = \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2} \int d\mathbf{k}_1 k_{1k} k_{1i} k_{1l} (k_{1j} - k_{2j}) F_{ki}(\mathbf{k}_1) \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} F_{lj}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2), \quad (2.141)$$

$$D_\rho^{(3)} = -\sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2} \int d\mathbf{k}_1 k_{1k} k_{1i} k_{1l} k_{2j} F_{ki}(\mathbf{k}_1) \int \frac{d\mathbf{k}_2}{\omega_2^2} F_{lj}(\mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 - \omega_2).$$

Уравнение (2.140) справедливо как для изотропных, так и для неизотропных флуктуаций поля скоростей. Следовательно, в случайных изотропных сжимаемых волновых полях распределение вероятностей  $P(t; \rho)$  в рассматриваемом приближении является логнормальным, и должна осуществляться кластеризация поля примеси. При этом для коэффициента  $D_\rho^{(2)}$  с учетом формулы (2.122) получаем выражение

$$D_\rho^{(2)} = \sigma_{\mathbf{u}}^4 \frac{\pi}{2d} \int \frac{d\mathbf{k}_1}{\omega^2(k_1)} k_1^4 F^p(k_1) [F^s(k_1)(d-1) + F^p(k_1)] \int d\mathbf{k}_2 \delta(\omega_1 - \omega_2).$$

В случае анизотропных полей скорости решение уравнения (2.140) выражается через функцию Эйри логарифма плотности. При этом в области малых значений  $\rho$  решение уравнения принимает отрицательные значения. Однако область больших плотностей, а следовательно и моментные функции поля  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , описываются правильно. Некоторое изменение функции распределения в области больших плотностей не препятствует кластеризации поля примеси.

Таким образом, учет первых исчезающих поправок к уравнению для плотности вероятностей как диффундирующих частиц, так и самого поля пассивной консервативной примеси в случайных волновых полях приводит к отличным от нуля коэффициентам переноса. Для сжимаемых анизотропных волновых полей скорости возникают средний перенос частиц (*стоксов дрейф*) и анизотропия распределения вероятностей положения лагранжевых частиц. В этом случае также осуществляется кластеризация поля пассивной консервативной примеси. Следует отметить, однако, что эти процессы протекают на разных пространственных масштабах, что выражается различными степенями волновых векторов  $\mathbf{k}_i$  в коэффициентах диффузии в уравнениях (2.118) и (2.140). Так, мелкомасштабные флуктуации поля скоростей оказывают на кластеризацию примеси в эйлеровом описании существенно большее влияние, чем на диффузию лагранжевых частиц. Если волновое поле имеет достаточно широкий спектр, например затухающий степенным образом при достаточно больших значениях волновых чисел, как это характерно для турбулентности, возможно появление расходимости в выражениях для коэффициентов диффузии (2.141). При этом может быть рассчитан и вклад резонансных эффектов в коэффициент диффузии (2.121).

## Г л а в а 3

## ДИФФУЗИЯ И КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ПРИМЕСИ В СЛУЧАЙНЫХ БЕЗДИВЕРГЕНТНЫХ ПОТОКАХ

Мы видели, что для существования кластеризации поля безынерционной примеси необходимо, чтобы поле скоростей гидродинамического потока было дивергентным. Обычно во многих задачах физики атмосферы Земли и океана среда считается в общем случае *несжимаемой*, т. е. описывается бездивергентным полем скоростей. В этом случае кластеризация все же может осуществляться в ряде случаев, которые и рассмотрим ниже.

## 3.1. Диффузия и кластеризация плавучей безынерционной примеси

Прежде всего рассмотрим диффузию плавучей безынерционной примеси, следуя [14, 17] (экспериментальные исследования и численное моделирование см. в работах [39, 40]).

Если пассивная примесь движется на поверхности  $z = 0$  в несжимаемой среде ( $\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ ) в отсутствие среднего потока с горизонтальной и вертикальной скоростями  $\mathbf{u} = (\mathbf{U}, w)$ , то на этой поверхности создается эффективный двумерный сжимаемый поток с двумерной дивергенцией  $\nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) = -\partial w(\mathbf{r}, t)/\partial z|_{z=0}$ . Считаем, что пространственный спектральный тензор поля скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  имеет вид

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E(k, t) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right).$$

Представим теперь поле плавучей примеси в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{R}, t) \delta(z), \quad \mathbf{r} = (\mathbf{R}, z), \quad \mathbf{R} = (x, y).$$

Подставляя теперь это выражение в уравнение (1.2) на с. 8 и интегрируя по  $z$ , получаем уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) \right) \rho(\mathbf{R}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{R}, 0) = \rho_0(\mathbf{R}). \quad (3.1)$$

Поле  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$  гауссово, однородное и изотропное со спектральным тензором

$$E_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_{\perp}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z E(\mathbf{k}_{\perp}^2 + k_z^2, t) \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\perp\alpha} k_{\perp\beta}}{k_{\perp}^2} \right), \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (3.2)$$

Сопоставляя теперь (3.2) с (2.1) и (2.2) на с. 23, получаем выражения для соленоидальной и потенциальной составляющих поля горизонтальной скорости  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$  на плос-

кости  $z = 0$  [17]:

$$E^s(\mathbf{k}_{\perp}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z E(\mathbf{k}_{\perp}^2 + k_z^2, t), \quad (3.3)$$

$$E^p(\mathbf{k}_{\perp}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z E(\mathbf{k}_{\perp}^2 + k_z^2, t) \frac{k_z^2}{\mathbf{k}_{\perp}^2 + k_z^2}.$$

Следовательно, уравнение для плотности вероятностей поля плотности  $\rho(\mathbf{R}, t)$  будет описываться двумерным уравнением (2.39) на с. 35, т. е. уравнением

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta \right) P(\mathbf{r}, t; \rho) = D^p \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(\mathbf{r}, t; \rho), \quad P(\mathbf{r}, 0; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho) \quad (3.4)$$

с коэффициентами диффузии, определяемыми, согласно формулам (2.4), (2.5) на с. 24 и (3.3), равенствами

$$D_0 = 2\pi \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} k^2 dk E(k, \tau), \quad (3.5)$$

$$D^s = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} k^4 dk E(k, \tau), \quad D^p = \frac{4\pi}{5} \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} k^4 dk E(k, \tau).$$

Таким образом, мы видим, что для диффузии плотности безынерционной плавучей примеси должна осуществляться кластеризация поля плотности в эйлеровом описании. В то же время для диффузии безынерционных плавучих частиц кластеризация осуществляться не будет, так как в этом случае, согласно (3.5), имеет место неравенство  $D^s > D^p$ , что противоречит равенству (2.37) на с. 33.

3.1.1. Плавучая примесь на случайной поверхности  $z(\mathbf{R}, t)$ 

Рассмотрим теперь задачу о диффузии плавучей примеси, сосредоточенной на случайной поверхности  $z(\mathbf{R}, t)$ , статистически не зависящей от поля скоростей.

В этом случае вместо уравнения (3.1) имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{R}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \{ \mathbf{u}(\mathbf{R}, z(\mathbf{R}, t); t) \rho(\mathbf{R}, t) \} = 0, \quad \mathbf{R} = \{x, y\}. \quad (3.6)$$

Считаем, что общая масса примеси

$$\int d\mathbf{R} \rho(\mathbf{R}, t) = 1.$$

Статистический анализ уравнения (3.6) состоит теперь из двух шагов. На первом шаге усредним это уравнение по ансамблю реализаций поля  $\{ \mathbf{u}(\mathbf{R}, z; t) \}$  и в диффузионном приближении получим уравнение для средней плотности  $\mathfrak{R}(\mathbf{R}, t) = \langle \rho(\mathbf{R}, t) \rangle_{\mathbf{u}}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t) = \frac{\partial^2}{\partial R_{\alpha} \partial R_{\beta}} \int_0^t dt' \int d\mathbf{k}_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z E_{\alpha\beta}(k_{\perp}^2 + k_z^2, t - t') e^{ik_z Z(\mathbf{R}, t, t')} \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t) -$$

$$- i \frac{\partial}{\partial R_{\alpha}} \int_0^t dt' \int d\mathbf{k}_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} k_z dk_z E_{\alpha\beta}(k_{\perp}^2 + k_z^2, t - t') e^{ik_z Z(\mathbf{R}, t, t')} \frac{\partial z(\mathbf{R}, t)}{\partial R_{\beta}} \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t),$$

где спектральный тензор поля скоростей

$$E_{\alpha\beta}(k_{\perp}^2 + k_z^2, t) = E(k_{\perp}^2 + k_z^2, t) \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\perp\alpha} k_{\perp\beta}}{k_{\perp}^2 + k_z^2} \right)$$

и введены обозначения

$$Z(\mathbf{R}, t, t') = z(\mathbf{R}, t) - z(\mathbf{R}, t').$$

Это уравнение — стохастическое уравнение по случайному полю  $Z(\mathbf{R}, t, t')$ . Будем считать поле  $z(\mathbf{R}, t)$  гауссовым полем с корреляционной функцией

$$\langle z(\mathbf{R}, t) \rangle = 0, \quad \langle z(\mathbf{R}, t) z(\mathbf{R}', t') \rangle = B_z(\mathbf{R} - \mathbf{R}', t - t').$$

Введем теперь новую функцию

$$F(\mathbf{R}; t, t'; k_z) = \exp\{k_z^2 D_z(t - t') + ik_z Z(\mathbf{R}, t, t')\} \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t),$$

$$\mathfrak{R}(\mathbf{R}, t) = \exp\{-k_z^2 D_z(t - t') - ik_z Z(\mathbf{R}, t, t')\} F(\mathbf{R}; t, t'; k_z),$$

где  $D_z(t) = B_z(0, 0) - B_z(0, t)$ . Тогда уравнение для  $\mathfrak{R}(\mathbf{R}, t)$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t) &= \\ &= \frac{\partial^2}{\partial R_{\alpha} \partial R_{\beta}} \int_0^t dt' \int d\mathbf{k}_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z E_{\alpha\beta}(k_{\perp}^2 + k_z^2, t - t') \exp(-k_z^2 D_z(t - t')) F(\mathbf{R}; t, t'; k_z) - \\ &- i \frac{\partial}{\partial R_{\alpha}} \int_0^t dt' \int d\mathbf{k}_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} k_z dk_z E_{\alpha\beta}(k_{\perp}^2 + k_z^2, t - t') \exp(ik_z Z(\mathbf{R}, t, t')) \frac{\partial z(\mathbf{R}, t)}{\partial R_{\beta}} \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Перейдем теперь ко второму шагу процедуры усреднения по случайному полю  $\mathfrak{R}(\mathbf{R}, t)$ . Это случайное поле является функционалом положения взволнованной поверхности, т. е.

$$\mathfrak{R}(\mathbf{R}, t) = \mathfrak{R}[\mathbf{R}, t; z(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\tau})],$$

и при этом среднее значение функционала  $F(\mathbf{R}; t, t'; k_z)$  по полю  $z(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\tau})$  описывается формулой (см., например, [8, 9])

$$\begin{aligned} \langle F(\mathbf{R}; t, t'; k_z) \rangle_z &= \left\langle \exp\left(k_z^2 D_z(t - t') + ik_z Z(\mathbf{R}, t, t')\right) \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t) \right\rangle_z = \\ &= \left\langle \mathfrak{R}[\mathbf{R}, t; z(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\tau}) + ik_z \{B_z(\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{R}, \tilde{\tau} - t) - B_z(\tilde{\mathbf{R}} - \mathbf{R}, \tilde{\tau} - t')\}] \right\rangle_z, \end{aligned}$$

т. е. определяется средней величиной плотности с функциональным сдвигом.

Нас интересует тензорная величина

$$\Sigma_{\alpha\beta}(t) = \left\langle \int R_{\alpha} R_{\beta} \mathfrak{R}(\mathbf{R}, t) d\mathbf{R} \right\rangle_z,$$

равная  $\frac{1}{2} \sigma^2(t) \delta_{\alpha\beta}$  в силу пространственной изотропии. Она связана со средним значением  $\mathfrak{R}(\mathbf{R}, t)$ . Для ее вычисления надо усреднить уравнение (3.7). Можно показать,

что с точностью до членов порядка  $\sigma_z^4$  коэффициент диффузии описывается выражением

$$\begin{aligned} D(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \sigma^2(t) = \\ &= 2 \int_0^t d\tau \int d\mathbf{k}_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z E_{\alpha\alpha}(k_{\perp}^2 + k_z^2, \tau) \exp(-k_z^2 D_z(\tau)) \int d\mathbf{R} \langle F(\mathbf{R}; t, t - \tau; k_z) \rangle_z. \end{aligned}$$

Таким образом, влияние взволнованности поверхности проявляется двояким образом. Во-первых, меняется эффективный спектр поля скоростей, и, во-вторых, изменяется сама структура поля плотности. Эти эффекты связаны, естественно, с конечностью временного радиуса корреляции, и в приближении дельта-коррелированности поля скоростей статистические свойства плотности не зависят от взволнованности поверхности и совпадают со статистическими свойствами плотности примеси на ровной поверхности.

### 3.2. Диффузия и кластеризация малоинерционной примеси

Рассмотрим теперь диффузию малоинерционных частиц и поля примеси в случайных бездивергентных гидродинамических полях, следуя работам [18, 19].

Диффузия плотности примеси  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , движущейся в случайном гидродинамическом потоке, описывается уравнением непрерывности (1.1) на с. 8:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (3.8)$$

где эйлерово поле скорости примеси  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  в отсутствие средней скорости потока удовлетворяет уравнению (1.3) на с. 8:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -\lambda [\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)]. \quad (3.9)$$

Будем считать, что поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — бездивергентное (т. е.  $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ ) однородное и изотропное в пространстве и стационарное во времени гауссово случайное поле с нулевым средним значением и корреляционным тензором

$$B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle.$$

Для такой модели пространственная спектральная и пространственно-временная спектральная функции поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  имеют вид

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad B_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \varphi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t}, \quad (3.10)$$

где

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E(k, t) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad \varphi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \varphi(k, \omega) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \quad (3.11)$$

В этом случае величина

$$B_{ij}(0, t) = \frac{d-1}{d} \int d\mathbf{k} E(k, t) \delta_{ij}, \quad (3.12)$$



где  $d$  — размерность пространства, а тензор четвертого порядка  $\frac{\partial^2 B_{ij}(0, \tau)}{\partial r_k \partial r_l}$  имеет представление

$$-\frac{\partial^2 B_{ij}(0, \tau)}{\partial r_k \partial r_l} = \frac{D(\tau)}{d(d+2)} [(d+1)\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}]. \quad (3.13)$$

Коэффициент  $D(\tau)$  в (3.13)

$$D(\tau) = \int d\mathbf{k} \mathbf{k}^2 E(k, \tau) = -\frac{1}{d-1} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

и величина

$$D(0) = -\frac{1}{d-1} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle$$

связана с вихревой структурой случайного бездивергентного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

Характеристические кривые  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{V}(t)$  для уравнения (3.9), согласно (1.4) на с. 9, удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{V}(t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{V}(t) &= -\lambda [\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t)], \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_0(\mathbf{r}_0), \end{aligned} \quad (3.14)$$

и описывают динамику частицы.

Для безынерционных частиц параметр  $\lambda \rightarrow \infty$  и, как следует из уравнения (3.14),

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t). \quad (3.15)$$

Следовательно, в этом предельном случае дисперсия случайного поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  и его временной радиус корреляции  $\tau_v$  связаны с дисперсией случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и временем корреляции  $\tau_0$  очевидными равенствами

$$\sigma_{\mathbf{V}}^2 = \sigma_{\mathbf{u}}^2, \quad \tau_v = \tau_0. \quad (3.16)$$

### 3.2.1. Особенность диффузии малоинерционных частиц (лагранжево описание)

Прежде всего отметим, что для описания диффузии малоинерционных частиц неприменимо приближение дельта-коррелированного случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , и, следовательно, уравнение Фоккера–Планка также неприменимо для совместной плотности вероятности положения частицы и ее скорости [19].

В самом деле, введем индикаторную функцию для решения уравнения (3.14):

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{V}(t) - \mathbf{V}),$$

описываемую уравнением Лиувилля

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} \mathbf{V} \right) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) = -\lambda \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t), \quad (3.17)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{V}, 0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{V} - \mathbf{V}_0(\mathbf{r}_0)).$$

Среднее значение индикаторной функции  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{V}; t)$  по ансамблю реализаций случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  описывает совместную одновременную плотность вероятностей положения частицы и ее скорости:

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) = \langle \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{V}(t) - \mathbf{V}) \rangle_{\mathbf{u}}.$$

В предположении дельта-коррелированности случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  (2.8) на с. 25, усреднив уравнение (3.17) по ансамблю реализаций случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  с учетом формулы Фурутцу–Новикова (2.10) на с. 25, а также выражения для вариационной производной

$$\frac{\delta}{\delta u_l(\mathbf{r}', t - 0)} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) = -\lambda \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial V_l} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)$$

и равенства (2.9) на с. 25, получаем уравнение Фоккера–Планка

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} \mathbf{V} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) = \lambda^2 D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{V}^2} P(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t), \quad (3.18)$$

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{V}, 0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{V} - \mathbf{V}_0(\mathbf{r}_0)),$$

где  $B_{kl}^{\text{eff}}(0) = D_0 \delta_{kl}$  и коэффициент диффузии

$$D_0 = \frac{1}{d} \int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{d} \tau_0 \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle.$$

Здесь, как и ранее,  $d$  — размерность пространства,  $\tau_0$  — временной радиус корреляции случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , а  $\sigma_{\mathbf{u}}^2 = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$  — его дисперсия.

Одним из условий применимости приближения дельта-коррелированности случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  во времени является условие

$$\lambda \tau_0 \ll 1. \quad (3.19)$$

Как следует из уравнения (3.18), функции  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{V}(t)$  являются гауссовыми случайными процессами, и для их моментных функций обычным путем получаем систему уравнений:

$$\frac{d}{dt} \langle r_i(t) r_j(t) \rangle = 2 \langle r_i(t) V_j(t) \rangle,$$

$$\left( \frac{d}{dt} + \lambda \right) \langle r_i(t) V_j(t) \rangle = \langle V_i(t) V_j(t) \rangle, \quad (3.20)$$

$$\left( \frac{d}{dt} + 2\lambda \right) \langle V_i(t) V_j(t) \rangle = 2\lambda^2 D_0 \delta_{ij}.$$

Из системы (3.20) следует, что стационарные значения всех одновременных корреляций при  $\lambda t \gg 1$  и  $t/\tau_0 \gg 1$  описываются выражениями

$$\langle V_i(t) V_j(t) \rangle = \lambda D_0 \delta_{ij}, \quad \langle r_i(t) V_j(t) \rangle = D_0 \delta_{ij}, \quad \langle r_i(t) r_j(t) \rangle = 2t D_0 \delta_{ij},$$

и, в частности, дисперсия процесса  $\mathbf{V}(t)$  и пространственный коэффициент диффузии  $D = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{r}^2(t) \rangle$  описываются равенствами

$$\sigma_v^2 = \langle \mathbf{V}^2(t) \rangle = \lambda \int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = \lambda \tau_0 \sigma_{\mathbf{u}}^2, \quad (3.21)$$

$$D = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{r}^2(t) \rangle = d D_0 = \int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = \tau_0 \sigma_{\mathbf{u}}^2.$$

Аналогичным образом легко для дельта-коррелированного во времени поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  получить и выражение для временного радиуса корреляции  $\tau_v$  случайного процесса  $\mathbf{V}(t)$ , рассматривая временную корреляцию  $\langle V_i(\mathbf{r}, t + \tau)V_j(\mathbf{r}, t) \rangle$ . А именно, получаем [19]

$$\tau_v = 1/\lambda. \quad (3.22)$$

Сопоставляя равенства (3.16) с равенствами (3.21) и (3.22), видим, что они несовместимы, т. е. для выполнения равенства (3.15) требуется не только выполнение условий  $\lambda t \gg 1$  и  $t/\tau_0 \gg 1$ , но также и выполнение условия

$$\lambda\tau_0 \gg 1, \quad (3.23)$$

что противоречит условию применимости приближения дельта-коррелированности во времени случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  (3.19). Что же касается коэффициента пространственной диффузии  $D$  в (3.21), то эта величина, как видно из уравнения (3.14), равна

$$D = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle r^2(t) \rangle = \int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{V}(\mathbf{r}, t + \tau)\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rangle = \tau_v \sigma_v^2 = \tau_0 \sigma_u^2 = \int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau)\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle$$

как в дельта-коррелированном приближении, так и в приближении безынерционности поля примеси и вообще не зависит от параметра  $\lambda$  (при условии, конечно,  $\lambda t \gg 1$ ).

Таким образом, приближение дельта-коррелированности во времени случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  для динамической системы (3.14) неправильно описывает статистику скорости частицы и ее корреляцию с положением частицы при переходе к приближению безынерционности частиц. И в то же время это приближение не противоречит пространственной диффузии частиц. Отметим, что выделение пространственного описания диффузии частицы из его пространственно-временного описания составляет так называемую *проблему Крамерса* (см., например, [30]).

### 3.2.2. Диффузия малоинерционной примеси в эйлеровом описании

Если считать, что случайное поле  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  гауссово, статистически однородно и изотропно в пространстве, стационарно во времени с нулевым средним значением и корреляционным тензором

$$\langle V_i(\mathbf{r}, t)V_j(\mathbf{r}', t') \rangle = B_{ij}^{(V)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'),$$

то одноточечная плотность вероятностей для решения динамического уравнения (3.8),  $P(\mathbf{r}, t; \rho)$ , как в приближении дельта-коррелированного во времени поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , так и в диффузионном приближении описывается уравнением (2.39) на с. 35:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) P(\mathbf{r}, t; \rho) = D_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(\mathbf{r}, t; \rho), \quad (3.24)$$

$$P(\mathbf{r}, 0; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho),$$

где коэффициенты диффузии

$$D_0 = \frac{1}{d} \int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{V}(\mathbf{r}, t + \tau)\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{d} \tau_v \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (3.25)$$

$$D_\rho = \int_0^\infty d\tau \left\langle \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t + \tau)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle = \tau_{\text{div } \mathbf{V}} \left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle$$

характеризуют пространственное распыление поля плотности  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и характерное время образования кластерных структур, а  $\tau_v$  и  $\tau_{\text{div } \mathbf{V}}$  — временные радиусы корреляции для случайных полей  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  и  $\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)/\partial \mathbf{r}$ .

Таким образом, задача сводится к оценке коэффициентов диффузии (3.25) исходя из стохастического уравнения (3.9), т. е. к вычислению временных радиусов корреляций  $\tau_v$  и  $\tau_{\text{div } \mathbf{V}}$  случайных полей  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  и  $\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)/\partial \mathbf{r}$ , а также их пространственных масштабов корреляций и дисперсий [18].

Считаем, что дисперсия случайного поля скоростей гидродинамического потока  $\sigma_u^2 = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$  достаточно мала и определяет основной малый параметр задачи. Для большого значения параметра  $\lambda$  (малая инерционность частиц) мы можем линеаризовать уравнение (3.9) относительно функции  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и перейти к более простому векторному уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = - \left( \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \lambda [\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)],$$

которое запишем в координатном представлении:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right) V_i(\mathbf{r}, t) = -u_k(\mathbf{r}, t) \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} - \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} V_k(\mathbf{r}, t) + \lambda u_i(\mathbf{r}, t). \quad (3.26)$$

В дальнейшем мы будем вычислять статистические характеристики поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  в первом исчезающем порядке малости по параметру  $\sigma_u^2$ . Отметим, что статистика поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , описываемого стохастическими уравнениями (3.9), (3.26), в общем случае не является гауссовой. Однако легко видеть, что высшие кумулянты поля  $\text{div } \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  будут иметь более высокий порядок малости, чем второй кумулянт, и, следовательно, при выводе уравнения (3.24) действительно можно воспользоваться приближением гауссова поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ .

Для малоинерционной примеси, как мы видели на примере диффузии частиц, несправедливо приближение дельта-коррелированности во времени случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Поэтому необходимо производить вычисления при произвольном значении параметра  $\lambda\tau_0$ . Это можно сделать в диффузионном приближении.

Случайное поле  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  коррелирует с функцией  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , которая является функционалом поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Расщепление корреляций для гауссова поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  основано на формуле Фурутцу–Новикова (2.7) на с. 24, содержащей вариационные производные. Уравнения для соответствующих средних значений в диффузионном приближении выписываются точно. Соответствующее упрощение задачи осуществляется на уровне функциональной зависимости решения задачи от флуктуирующих параметров (см., например, [8, 9]), и предполагается, что на временных масштабах порядка  $\tau_0$  влияние поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  несущественно.

Для вариационных производных в диффузионном приближении имеем уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right) \frac{\delta V_i(\mathbf{r}, t)}{\delta u_i(\mathbf{r}', t')} = 0$$

с начальным условием при  $t = t'$ :

$$\left. \frac{\delta V_i(\mathbf{r}, t)}{\delta u_i(\mathbf{r}', t')} \right|_{t=t'+0} = - \left[ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t')}{\partial r_i} + \delta_{il} \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_k} V_k(\mathbf{r}, t') \right] + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \lambda \delta_{il},$$

которое следует из уравнения (3.26). Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{\delta V_i(\mathbf{r}, t)}{\delta u_i(\mathbf{r}', t')} = e^{-\lambda(t-t')} \left\{ - \left[ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t')}{\partial r_i} + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_k} \delta_{il} V_k(\mathbf{r}, t') \right] + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \lambda \delta_{il} \right\}.$$

Само поле  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  в диффузионном приближении имеет структуру

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = e^{-\lambda(t-t')} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t'),$$

и, следовательно,  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = e^{\lambda(t-t')} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ . Таким образом, в диффузионном приближении для вариационной производной получаем окончательное выражение

$$\frac{\delta V_i(\mathbf{r}, t)}{\delta u_l(\mathbf{r}', t')} = - \left[ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} + \delta_{il} \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_\mu} V_\mu(\mathbf{r}, t) \right] + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \lambda e^{-\lambda(t-t')} \delta_{il}. \quad (3.27)$$

### 3.2.3. Пространственные корреляции поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$

Из уравнения (3.26) следует уравнение для одновременного пространственного корреляционного тензора поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + 2\lambda \right) \langle V_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle = \\ = - \frac{\partial}{\partial r_k} \langle u_k(\mathbf{r}, t) V_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle - \frac{\partial}{\partial r_{1k}} \langle u_k(\mathbf{r}_1, t) V_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle - \\ - \left\langle \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} V_k(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u_j(\mathbf{r}_1, t)}{\partial r_{1k}} V_k(\mathbf{r}_1, t) V_i(\mathbf{r}, t) \right\rangle + \\ + \lambda [\langle u_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle + \langle u_j(\mathbf{r}_1, t) V_i(\mathbf{r}, t) \rangle]. \end{aligned}$$

Используя формулу Фурутцу–Новикова (2.7) на с. 24 и выражение (3.27) для вариационной производной, получаем уравнение для стационарного тензора  $F_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = \langle V_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle$ , не зависящего от времени ( $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}$ ):

$$\begin{aligned} 2\lambda F_{ij}(\mathbf{r}) = 2 \int_0^\infty d\tau [B_{\beta\gamma}(0, \tau) - B_{\beta\gamma}(\mathbf{r}, \tau)] \frac{\partial^2}{\partial r_\beta \partial r_\gamma} F_{ij}(\mathbf{r}) - \\ - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial B_{\beta j}(\mathbf{r}, \tau)}{\partial r_\gamma} \frac{\partial}{\partial r_\beta} F_{i\gamma}(\mathbf{r}) - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial B_{\beta i}(\mathbf{r}, \tau)}{\partial r_\gamma} \frac{\partial}{\partial r_\beta} F_{\gamma j}(\mathbf{r}) - \\ - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial B_{i\gamma}(\mathbf{r}, \tau)}{\partial r_\beta} \frac{\partial}{\partial r_\gamma} F_{\beta j}(\mathbf{r}) - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial B_{j\gamma}(\mathbf{r}, \tau)}{\partial r_\beta} \frac{\partial}{\partial r_\gamma} F_{i\beta}(\mathbf{r}) - \\ - 2 \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{r}, \tau)}{\partial r_\beta \partial r_\gamma} F_{\beta\gamma}(\mathbf{r}) + 2\lambda^2 \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} B_{ij}(\mathbf{r}, \tau). \quad (3.28) \end{aligned}$$

Для стационарного значения корреляции  $\langle V_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}, t) \rangle$  в диффузионном приближении, полагая  $\mathbf{r} = 0$  в уравнении (3.28), получаем уравнение

$$\lambda \langle V_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}, t) \rangle = - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{ij}(0, \tau)}{\partial r_\beta \partial r_\gamma} \langle V_\beta(\mathbf{r}, t) V_\gamma(\mathbf{r}, t) \rangle + \lambda^2 \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} B_{ij}(0, \tau), \quad (3.29)$$

которое с помощью формулы (3.13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \lambda \langle V_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}, t) \rangle = \lambda^2 \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} B_{ij}(0, \tau) + \\ + \frac{D_1}{d(d+2)} \left[ (d+1) \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle \delta_{ij} - 2 \langle V_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}, t) \rangle \right], \end{aligned}$$

где коэффициент

$$D_1 = \int_0^\infty d\tau D(\tau) = \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} \mathbf{k}^2 E(k, \tau) = - \frac{1}{d-1} \int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (3.30)$$

Следовательно,

$$\left( \lambda - \frac{d-1}{d} D_1 \right) \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \lambda^2 \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} B_{ii}(0, \tau), \quad (3.31)$$

если параметр  $\lambda > D_1(d-1)/d$ .

Таким образом, мы видим, что существует критическое значение параметра  $\lambda = \lambda_{\text{cr}} = (d-1)D_1/d$ , и стационарное значение дисперсии поля скорости существует, только если  $\lambda > \lambda_{\text{cr}}$ .

Если выполняется неравенство

$$\lambda \gg D_1 \sim \sigma_u^2 \tau_0 / l_0^2, \quad (3.32)$$

где  $l_0$  — пространственный масштаб поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , то получаем выражение

$$\langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \lambda \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} B_{ii}(0, \tau) = \lambda(d-1) \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \int d\mathbf{k} E(k, \tau). \quad (3.33)$$

В дальнейшем будем считать, что неравенство (3.32) выполняется всегда.

Из равенства (3.33) мы можем оценить дисперсию поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ . В результате получаем при  $\lambda t \gg 1$  равенства:

$$\sigma_{\mathbf{V}}^2 = \begin{cases} \sigma_{\mathbf{u}}^2, & \text{если } \lambda\tau_0 \gg 1, \\ \lambda\tau_0 \sigma_{\mathbf{u}}^2, & \text{если } \lambda\tau_0 \ll 1, \end{cases} \quad (3.34)$$

где  $\tau_0$  — временной радиус корреляции поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Таким образом, мы видим, что последовательность предельных переходов  $\tau_0 \rightarrow 0$  и  $\lambda \rightarrow \infty$  неперестановочна.

### 3.2.4. Корреляции пространственных производных поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$

Рассмотрим теперь такие статистические характеристики пространственных производных поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , как

$$\left\langle \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \frac{\partial V_j(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} \right\rangle = - \left. \frac{\partial^2 F_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_k \partial r_l} \right|_{\mathbf{r}=0}.$$

Для этих величин из уравнения (3.28) следует уравнение

$$\begin{aligned}
2\lambda \frac{\partial^2 F_{ij}(0)}{\partial r_k \partial r_l} &= 2\lambda^2 \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \frac{\partial^2 B_{ij}(0, \tau)}{\partial r_k \partial r_l} - 2 \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{\beta\gamma}(0, \tau)}{\partial r_k \partial r_l} \frac{\partial^2 F_{ij}(0)}{\partial r_\beta \partial r_\gamma} - \\
&- \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{\beta j}(0, \tau)}{\partial r_\gamma \partial r_k} \frac{\partial^2 F_{i\gamma}(0)}{\partial r_\beta \partial r_l} - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{\beta j}(0, \tau)}{\partial r_\gamma \partial r_l} \frac{\partial^2 F_{i\gamma}(0)}{\partial r_\beta \partial r_k} - \\
&- \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{\beta i}(0, \tau)}{\partial r_\gamma \partial r_k} \frac{\partial^2 F_{\gamma j}(0)}{\partial r_\beta \partial r_l} - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{\beta i}(0, \tau)}{\partial r_\gamma \partial r_l} \frac{\partial^2 F_{\gamma j}(0)}{\partial r_\beta \partial r_k} - \\
&- \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{i\gamma}(0, \tau)}{\partial r_\beta \partial r_k} \frac{\partial^2 F_{\beta j}(0)}{\partial r_\gamma \partial r_l} - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{i\gamma}(0, \tau)}{\partial r_\beta \partial r_l} \frac{\partial^2 F_{\beta j}(0)}{\partial r_\gamma \partial r_k} - \\
&- \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{j\gamma}(0, \tau)}{\partial r_\beta \partial r_k} \frac{\partial^2 F_{i\beta}(0)}{\partial r_\gamma \partial r_l} - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{j\gamma}(0, \tau)}{\partial r_\beta \partial r_l} \frac{\partial^2 F_{i\beta}(0)}{\partial r_\gamma \partial r_k} - \\
&- 2 \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{ij}(0, \tau)}{\partial r_\beta \partial r_\gamma} \frac{\partial^2 F_{\beta\gamma}(0)}{\partial r_k \partial r_l} - 2 \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^4 B_{ij}(0, \tau)}{\partial r_\beta \partial r_\gamma \partial r_k \partial r_l} F_{\beta\gamma}(0). \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Отметим, что последний член в правой части уравнения (3.35) является источником порядка  $\sim \sigma_{\mathbf{u}}^4$  и может быть опущен.

Положим в уравнении (3.35)  $i = k$ ,  $j = l$ . В этом случае с помощью равенства (3.13) при  $\lambda \gg D_1$  получаем стационарное уравнение

$$\lambda \left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle = \frac{4(d+1)D_1}{d(d+2)} \left\langle \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \right\rangle. \quad (3.36)$$

Величина

$$\left\langle \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \right\rangle = - \frac{\partial^2 F_{ii}(0)}{\partial \mathbf{r}^2} = - \langle \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rangle$$

связана с вихревой структурой поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , и мы можем переписать уравнение (3.36) в виде

$$\left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle = - \frac{4(d+1)D_1}{\lambda d(d+2)} \langle \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (3.37)$$

Пусть теперь в уравнении (3.35)  $i = j$ ,  $k = l$ . С помощью формулы (3.13) при условии  $\lambda \gg D_1$  получаем

$$\frac{\partial^2 F_{ii}(0)}{\partial \mathbf{r}^2} = \lambda \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \frac{\partial^2 B_{ii}(0, \tau)}{\partial \mathbf{r}^2},$$

т. е.

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \lambda \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \frac{\partial^2 B_{ii}(0, \tau)}{\partial \mathbf{r}^2} = \\
&= -(N-1)D_2(\lambda) = \lambda \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (3.38)
\end{aligned}$$

где коэффициент

$$D_2(\lambda) = \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} D(\tau) = \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \int d\mathbf{k} \mathbf{k}^2 E(\mathbf{k}, \tau). \quad (3.39)$$

Следовательно, для дивергенции поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  при условии  $\lambda/D_1 \gg 1$  получаем выражение

$$\left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle = \frac{4(d^2-1)}{d(d+2)} D_1 D_2(\lambda). \quad (3.40)$$

Отметим, что коэффициент

$$D_1 = - \frac{\tau_0}{(d-1)} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle$$

не зависит от параметра  $\lambda$ . Коэффициент же  $D_2(\lambda)$  при  $\lambda\tau_0 \gg 1$  определяется выражением

$$D_2(\lambda) = - \frac{1}{\lambda(d-1)} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle.$$

Таким образом, для трехмерного и двумерного случаев получаем равенства

$$\left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle = \frac{32}{15} D_1 D_2(\lambda), \quad \left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle = \frac{3}{2} D_1 D_2(\lambda), \quad (3.41)$$

которые в предельном случае малой инерционности частиц  $\lambda\tau_0 \gg 1$  переходят в равенства

$$\left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle = \begin{cases} \frac{8}{15} \frac{\tau_0}{\lambda} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle^2 & \text{в 3-мерном случае,} \\ \frac{3}{2} \frac{\tau_0}{\lambda} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle^2 & \text{в 2-мерном случае.} \end{cases} \quad (3.42)$$

На основе выражения (3.38) можно оценить пространственный корреляционный масштаб  $l_{\text{cor}}$  поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ . А именно, с помощью равенства (3.34) получаем, что

$$l_{\text{cor}} \sim l_0$$

независимо от условий  $\lambda\tau_0 \ll 1$  или  $\lambda\tau_0 \gg 1$ .

### 3.2.5. Временной корреляционный тензор поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$

Для временной корреляционной функции при  $t > t_1$  имеем уравнение

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right) \langle V_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle &= \lambda \langle u_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle - \\
&- \frac{\partial}{\partial r_k} \langle u_k(\mathbf{r}, t) V_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle - \left\langle \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} V_k(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t_1) \right\rangle.
\end{aligned}$$

С помощью формулы Фурутцу–Новикова (2.7) и выражения для вариационной производной (3.27) получаем в стационарном режиме уравнение с начальным условием для функции  $\langle V_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \lambda \right) \langle V_i(\mathbf{r}, t + \tau) V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle = \lambda e^{\lambda\tau} \int_\tau^\infty d\tau_1 B_{ii}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \tau_1) e^{-\lambda\tau_1}, \quad (3.43)$$

$$\langle V_i(\mathbf{r}, t + \tau) V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle_{\tau=0} = \langle V_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle,$$

где стационарное значение  $\langle V_i(\mathbf{r}, t)V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle$ , естественно, не зависит от времени  $t$ . В уравнении (3.43) опущены члены порядка  $\sim \sigma_{\mathbf{u}}^4$ . Это можно сделать для достаточно большого значения параметра  $\lambda$  (3.32).

Теперь мы можем вычислить временные радиусы корреляции в выражениях (3.25). С этой целью, интегрируя уравнение (3.43) по параметру  $\tau$  в интервале  $(0, \infty)$ , получаем выражение

$$\lambda \int_0^{\infty} d\tau \langle V_i(\mathbf{r}, t + \tau)V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle = \langle V_i(\mathbf{r}, t)V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle + \lambda \int_0^{\infty} d\tau B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \tau) [1 - e^{-\lambda\tau}]. \quad (3.44)$$

Полагая в равенстве (3.44)  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$  и  $i = j$ , получаем выражение для временного радиуса корреляции поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\lambda\tau_{\mathbf{V}} \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle + \lambda \int_0^{\infty} d\tau B_{ii}(0, \tau) [1 - e^{-\lambda\tau}],$$

которое, с использованием равенства (3.33), может быть записано в виде

$$\tau_{\mathbf{V}} \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \tau_0 B_{ii}(0, 0), \quad (3.45)$$

независящем от параметра  $\lambda$ .

Дифференцируя теперь выражение (3.44) по  $r_i$  и  $r_{1j}$  и полагая  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ , получаем выражение для временного радиуса корреляции поля  $\partial\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)/\partial\mathbf{r}$ :

$$\tau_{\text{div } \mathbf{V}} = \frac{1}{\lambda}, \quad (3.46)$$

справедливое для всех достаточно больших значений параметра  $\lambda$  и, в частности, для случая  $\lambda\tau_0 \gg 1$ , когда  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и, следовательно,  $\tau_{\mathbf{V}} = \tau_0$ .

Теперь мы уже в состоянии вычислить коэффициенты (3.25) в уравнении для плотности вероятностей (3.24) с помощью равенств (3.45), (3.46) и (3.40):

$$D_0 = \frac{1}{d} \tau_{\mathbf{V}} \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{d} \tau_0 B_{ii}(0, 0) = \frac{d-1}{d} \tau_0 \int d\mathbf{k} E(k, 0), \quad (3.47)$$

$$D_{\rho} = \tau_{\text{div } \mathbf{V}} \left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle = \frac{4}{\lambda} \frac{d^2 - 1}{d(d+2)} D_1 D_2(\lambda).$$

В частности, в 3-мерном случае при  $\lambda\tau_0 \gg 1$  получаем

$$D_0 = \frac{1}{3} \tau_{\mathbf{V}} \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{3} \tau_0 B_{ii}(0, 0) = \frac{2}{3} \tau_0 \int d\mathbf{k} E(k, 0), \quad (3.48)$$

$$D_{\rho} = \tau_{\text{div } \mathbf{V}} \left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle = \frac{8}{15} \frac{\tau_0}{\lambda^2} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle^2.$$

В 2-мерном же случае при  $\lambda\tau_0 \gg 1$  имеем

$$D_0 = \frac{1}{2} \tau_{\mathbf{V}} \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \tau_0 B_{ii}(0, 0) = \tau_0 \int d\mathbf{k} E(k, 0), \quad (3.49)$$

$$D_{\rho} = \tau_{\text{div } \mathbf{V}} \left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle = \frac{3}{2} \frac{\tau_0}{\lambda^2} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle^2.$$

Таким образом, мы видим, что коэффициент  $D_{\rho} \sim \sigma_{\mathbf{u}}^4$ . И сначала вихревая компонента поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  генерирует вихревую компоненту поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  прямым линейным механизмом без участия адвекции, а уже затем вихревая компонента поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  генерирует дивергентную компоненту поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  через механизм адвекции.

### 3.2.6. Об условиях применимости полученных результатов

Условия применимости полученных результатов складываются из нескольких ограничений.

1. Условия применимости диффузионного приближения для уравнения (3.26) имеют вид

$$\lambda > D_1 \frac{d-1}{d} \quad \text{и} \quad D_1 \tau_0 \ll 1, \quad D_2(\lambda) \tau_0 \ll 1,$$

а величины

$$D_1 \sim \frac{\sigma_{\mathbf{u}}^2 \tau_0}{l_0^2}, \quad D_2(\lambda) \sim \begin{cases} \sigma_{\mathbf{u}}^2 \tau_0 / l_0^2, & \text{если } \lambda\tau_0 \ll 1, \\ \sigma_{\mathbf{u}}^2 / \lambda l_0^2, & \text{если } \lambda\tau_0 \gg 1, \end{cases}$$

где  $l_0$  — пространственный корреляционный масштаб и  $\tau_0$  — временной радиус корреляции поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . Таким образом, получаем условие

$$\frac{\sigma_{\mathbf{u}}^2 \tau_0^2}{l_0^2} \ll 1. \quad (3.50)$$

2. Условие применимости приближения дельта-коррелированности поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  для уравнения (3.24) имеет вид  $D_{\rho}/\lambda \ll 1$ , т. е.

$$\frac{D_1 D_2(\lambda)}{\lambda^2} \ll 1.$$

Таким образом, получаем условия в виде

$$\frac{\sigma_{\mathbf{u}}^2 \tau_0^2}{l_0^2} \ll \lambda\tau_0, \quad \text{если } \lambda\tau_0 \ll 1; \quad \frac{\sigma_{\mathbf{u}}^2 \tau_0^2}{l_0^2} \ll (\lambda\tau_0)^{3/2}, \quad \text{если } \lambda\tau_0 \gg 1. \quad (3.51)$$

3. Во всех вычислениях использовалось условие (3.32), которое справедливо при выполнении условия

$$\frac{\sigma_{\mathbf{u}}^2 \tau_0^2}{l_0^2} \ll \lambda\tau_0. \quad (3.52)$$

Следовательно, для малоинерционных частиц ( $\lambda\tau_0 \gg 1$ ) условия применимости приближений, использованных выше, сводятся к условию (3.50).

## 3.3. Диффузия и кластеризация малоинерционной примеси с учетом быстрого вращения

Обсудим теперь двумерное уравнение динамики примеси с учетом вращения, которое можно описать уравнением

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) V_i(\mathbf{r}, t) = -\lambda [V_i(\mathbf{r}, t) - u_i(\mathbf{r}, t)] + 2\Omega \Gamma_{i\mu} V_{\mu}(\mathbf{r}, t),$$

где матрица

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma^2 = -E,$$

а  $E$  — единичная матрица. Это уравнение можно записать в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -\Lambda [\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)], \quad (3.53)$$

где матрица  $\Lambda = (\lambda E - 2\Omega\Gamma)$ , а случайное поле скоростей имеет структуру

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \lambda \Lambda^{-1} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad \Lambda^{-1} = \frac{\lambda E + 2\Omega\Gamma}{\lambda^2 + 4\Omega^2}. \quad (3.54)$$

В случае, когда  $\{\lambda$  или  $\Omega\} \rightarrow \infty$ , приближенно получаем выражение

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{U}(\mathbf{r}, t). \quad (3.55)$$

Отметим, что можно ввести новый вектор  $\mathbf{W}(\mathbf{r}, t) = \Gamma \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , и тогда величина

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial W_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} = \frac{\partial \mathbf{W}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial V_2(\mathbf{r}, t)}{\partial r_1} - \frac{\partial V_1(\mathbf{r}, t)}{\partial r_2}$$

будет описывать вихревую компоненту поля скоростей  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ . Уравнение (3.53) отличается от уравнения (3.9) на с. 63 тензорным характером параметра  $\Lambda$ . Кроме того, в уравнении (3.53) поле  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  является дивергентным полем и для бездивергентного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  величина

$$\operatorname{div} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} = \lambda \frac{\partial}{\partial r_k} \Lambda_{k\mu}^{-1} u_\mu(\mathbf{r}, t) = \frac{2\lambda\Omega}{\lambda^2 + 4\Omega^2} \Gamma_{k\mu} \frac{\partial u_\mu(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k}$$

связана с вихревой компонентой поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

Будем предполагать, как и ранее, что дисперсия  $\sigma_{\mathbf{u}}^2 = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$  имеет малое значение и для больших значений параметров  $\{\lambda, \Omega\}$  можно линеаризовать уравнение (3.53) относительно потока (3.55). В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) + \left( \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) + \left( \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = -\Lambda [\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)],$$

которое в координатной форме имеет вид

$$\frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \Lambda_{i\mu} V_\mu(\mathbf{r}, t) = -U_k(\mathbf{r}, t) \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} - \frac{\partial U_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} V_k(\mathbf{r}, t) + \Lambda_{i\mu} U_\mu(\mathbf{r}, t).$$

Если параметры  $\{\lambda, \Omega\} \gg \sigma_{\mathbf{u}}^2 \tau_0 / l_{\text{cor}}^2$ , где, как и ранее,  $l_{\text{cor}}$  — пространственный корреляционный масштаб поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , то можно опустить адвективные члены и перейти к простейшему линейному уравнению

$$\frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \Lambda_{i\mu} V_\mu(\mathbf{r}, t) = \lambda u_i(\mathbf{r}, t). \quad (3.56)$$

Для вариационной производной при  $t > t'$  имеем матричное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta V_i(\mathbf{r}, t)}{\delta u_l(\mathbf{r}', t')} + \Lambda_{i\mu} \frac{\delta V_\mu(\mathbf{r}, t)}{\delta u_l(\mathbf{r}', t')} = 0,$$

которое в координатной форме имеет вид системы уравнений:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right) \frac{\delta V_i(\mathbf{r}, t)}{\delta u_l(\mathbf{r}', t')} = 2\Omega \frac{\delta W_i(\mathbf{r}, t)}{\delta u_l(\mathbf{r}', t')},$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right) \frac{\delta W_i(\mathbf{r}, t)}{\delta u_l(\mathbf{r}', t')} = -2\Omega \frac{\delta V_i(\mathbf{r}, t)}{\delta u_l(\mathbf{r}', t')}$$

с начальными условиями при  $t = t'$

$$\frac{\delta V_i(\mathbf{r}, t')}{\delta u_l(\mathbf{r}', t')} = \lambda \delta_{il} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \frac{\delta W_i(\mathbf{r}, t')}{\delta u_l(\mathbf{r}', t')} = \lambda \Gamma_{il} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Решение этой системы имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta u_l(\mathbf{r}', t')} \begin{pmatrix} V_i(\mathbf{r}, t) \\ W_i(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \lambda e^{-\lambda(t-t')} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') A(t-t') \begin{pmatrix} \delta_{il} \\ \Gamma_{il} \end{pmatrix},$$

где матрица

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\Omega t & \sin 2\Omega t \\ -\sin 2\Omega t & \cos 2\Omega t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для вариационной производной получаем окончательное выражение

$$\frac{\delta V_i(\mathbf{r}, t)}{\delta u_l(\mathbf{r}', t')} = \lambda \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-\lambda(t-t')} [\delta_{il} \cos 2\Omega(t-t') + \Gamma_{il} \sin 2\Omega(t-t')]. \quad (3.57)$$

### 3.3.1. Пространственные корреляции поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$

Из уравнения (3.56) для одновременного пространственного корреляционного тензора следует уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle V_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle + \Lambda_{i\mu} \langle V_\mu(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle + \Lambda_{j\mu} \langle V_i(\mathbf{r}, t) V_\mu(\mathbf{r}_1, t) \rangle = \\ = \lambda \langle u_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle + \lambda \langle u_j(\mathbf{r}_1, t) V_i(\mathbf{r}, t) \rangle. \end{aligned} \quad (3.58)$$

С помощью формулы Фурутцу-Новикова (2.7) на с. 24 и выражения (3.57) получаем, что стационарный корреляционный тензор описывается уравнением

$$\begin{aligned} 2\lambda \langle V_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle - 2\Omega [\langle W_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle + \langle V_i(\mathbf{r}, t) W_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle] = \\ = 2\lambda^2 \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \cos 2\Omega\tau B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \tau) + \\ + \lambda^2 \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \sin 2\Omega\tau [\Gamma_{j\mu} B_{i\mu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \tau) + \Gamma_{i\mu} B_{j\mu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \tau)]. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Следовательно, полагая в уравнении (3.59)  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$  и  $i = j$ , можно получить стационарное значение для дисперсии  $\langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ :

$$\langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \lambda \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \cos 2\Omega\tau B_{ii}(0, \tau), \quad (3.60)$$

в силу того что  $B_{il}(0, \tau)\Gamma_{il} \equiv 0$ ,  $\Gamma_{i\mu} \langle V_i(\mathbf{r}, t)V_\mu(\mathbf{r}, t) \rangle \equiv 0$ .

Обсудим теперь статистические характеристики пространственных производных поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  типа  $\left\langle \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \frac{\partial V_j(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} \right\rangle$ . Для двумерного поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  с помощью равенства (3.13) на с. 64 получаем выражение

$$-\frac{\partial^2 B_{ij}(0, \tau)}{\partial r_k \partial r_l} = \frac{1}{8} D(\tau) [3\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}],$$

где  $D(\tau) = \int d\mathbf{k} k^2 E(k, \tau)$ , и, следовательно, используя уравнение (3.59), получаем уравнение

$$\begin{aligned} 2\lambda \left\langle \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \frac{\partial V_j(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} \right\rangle - 2\Omega \left[ \left\langle \frac{\partial W_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \frac{\partial V_j(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \frac{\partial W_j(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} \right\rangle \right] = \\ = \frac{\lambda^2}{4} D_2(\lambda, \Omega) [3\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}] - \\ - \frac{\lambda^2}{8} D_3(\lambda, \Omega) [\delta_{ki}\Gamma_{jl} + \delta_{li}\Gamma_{jk} + \delta_{lj}\Gamma_{ik} + \delta_{kj}\Gamma_{il}], \end{aligned} \quad (3.61)$$

где коэффициенты

$$D_2(\lambda, \Omega) = \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \cos 2\Omega\tau D(\tau), \quad D_3(\lambda, \Omega) = \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \sin 2\Omega\tau D(\tau).$$

Положим теперь  $i = k$ ,  $j = l$  в уравнении (3.61). В этом случае получаем стационарное уравнение

$$\lambda \langle d^2(\mathbf{r}, t) \rangle = 2\Omega \langle \xi(\mathbf{r}, t)d(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (3.62)$$

где величины  $d(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}$ ,  $\xi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{W}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}$ .

Положим теперь  $i = j$ ,  $k = l$  в уравнении (3.61). Получаем стационарное выражение для вихревой части поля скорости  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ :

$$-\langle \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)\Delta \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rangle = \lambda D_2(\lambda, \Omega). \quad (3.63)$$

Теперь выпишем уравнение для матрицы  $\left\langle \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} d(\mathbf{r}, t) \right\rangle$ :

$$\lambda \left\langle \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} d(\mathbf{r}, t) \right\rangle - \Omega \Gamma_{i\mu} \left\langle \frac{\partial V_\mu(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} d(\mathbf{r}, t) \right\rangle - \Omega \left\langle \xi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \right\rangle = 0,$$

и, следовательно, умножая его на  $\Gamma_{ki}$ , получаем уравнение

$$\lambda \langle \xi(\mathbf{r}, t)d(\mathbf{r}, t) \rangle = \Omega \left[ \langle \xi^2(\mathbf{r}, t) \rangle - \langle d^2(\mathbf{r}, t) \rangle \right]. \quad (3.64)$$

Умножая теперь уравнение (3.61) на  $\Gamma_{ki}\Gamma_{lj}$ , получаем третье стационарное уравнение

$$\lambda \langle \xi^2(\mathbf{r}, t) \rangle + 2\Omega \langle d(\mathbf{r}, t)\xi(\mathbf{r}, t) \rangle = \lambda^2 D_2(\lambda, \Omega). \quad (3.65)$$

Таким образом, мы получили систему уравнений (3.62)–(3.65), решение которой имеет вид

$$\langle \xi^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \lambda \frac{\lambda^2 + 2\Omega^2}{\lambda^2 + 4\Omega^2} D_2(\lambda, \Omega), \quad \langle d^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{2\lambda\Omega^2}{\lambda^2 + 4\Omega^2} D_2(\lambda, \Omega), \quad (3.66)$$

$$\langle \xi(\mathbf{r}, t)d(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\lambda^2\Omega}{\lambda^2 + 4\Omega^2} D_2(\lambda, \Omega).$$

Если параметр  $\lambda/\Omega \ll 1$  и  $\Omega\tau_0 \gg 1$ , то  $D_2(\lambda, \Omega) \approx \frac{\lambda}{4\Omega^2} D(0)$ , и мы получаем

$$\langle \xi^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle d^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\lambda^2}{8\Omega^2} D(0), \quad \langle \xi(\mathbf{r}, t)d(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\lambda^3}{16\Omega^3} D(0). \quad (3.67)$$

Если же параметр  $\lambda/\Omega \gg 1$ , но  $\Omega\tau_0 \gg 1$ , то  $D_2(\lambda, \Omega) \approx \frac{1}{\lambda} D(0)$  и, следовательно,

$$\langle \xi^2(\mathbf{r}, t) \rangle = D(0), \quad \langle d^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{2\Omega^2}{\lambda^2} D(0), \quad \langle \xi(\mathbf{r}, t)d(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\Omega}{\lambda} D(0). \quad (3.68)$$

Таким образом, решение задачи имеет порядок  $\sigma_{\mathbf{u}}^2$ . Если же параметр  $\Omega \rightarrow 0$ , то, как мы видели ранее, решение задачи имеет порядок  $\sigma_{\mathbf{u}}^4$  и необходимо учитывать адвективные эффекты.

### 3.3.2. Временной корреляционный тензор поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$

При  $t > t_1$  мы имеем уравнение для пространственно-временного корреляционного тензора:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle V_i(\mathbf{r}, t)V_j(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle + \Lambda_{i\mu} \langle V_\mu(\mathbf{r}, t)V_j(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle = \lambda \langle u_i(\mathbf{r}, t)V_j(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle,$$

которое, после использования формулы Фурутцу–Новикова (2.7) на с. 24 и равенства (3.57), может быть записано в стационарном режиме в виде уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \langle V_i(\mathbf{r}, t + \tau)V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle + \lambda \langle V_i(\mathbf{r}, t + \tau)V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle - 2\Omega \Gamma_{i\mu} \langle V_\mu(\mathbf{r}, t + \tau)V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle = \\ = \lambda^2 e^{\lambda\tau} \int_\tau^\infty d\tau_1 B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \tau_1) e^{-\lambda\tau_1} \cos 2\Omega\tau + \\ + \lambda^2 e^{\lambda\tau} \Gamma_{j\mu} \int_\tau^\infty d\tau_1 B_{i\mu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \tau_1) e^{-\lambda\tau_1} \sin 2\Omega\tau \end{aligned} \quad (3.69)$$

с начальным условием при  $\tau = 0$ :

$$\langle V_i(\mathbf{r}, t + \tau)V_j(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \Big|_{\tau=0} = \langle V_i(\mathbf{r}, t)V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle.$$

Нас интересует величина

$$K_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = \int_0^\infty d\tau \langle V_i(\mathbf{r}, t + \tau)V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle \quad (3.70)$$

и величины (3.25) на с. 66:

$$D_0 = \frac{1}{2} K_{ii}(0) = \frac{1}{2} \tau_{\mathbf{V}} \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad D_\rho = \frac{\partial^2 K_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{\partial r_i \partial r_{1j}} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1} = \tau_{\text{div} \mathbf{V}} \left\langle \left( \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle,$$

определяющие коэффициенты диффузии в уравнении (3.24).

Для величины (3.70) мы получаем из уравнения (3.69) выражение

$$\begin{aligned} \lambda K_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - 2\Omega \Gamma_{i\mu} K_{\mu j}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) &= \langle V_i(\mathbf{r}, t) V_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle + \\ &+ \lambda \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \tau) [1 - e^{-\lambda\tau}] \cos 2\Omega\tau + \\ &+ \lambda \Gamma_{j\mu} \int_0^\infty d\tau B_{i\mu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \tau) [1 - e^{-\lambda\tau}] \sin 2\Omega\tau. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Положим  $i = j$  и  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$  в выражении (3.71). В результате получаем равенство

$$\lambda \tau_{\mathbf{V}} \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle + \lambda \int_0^\infty d\tau B_{ii}(0, \tau) [1 - e^{-\lambda\tau}] \cos 2\Omega\tau,$$

где  $\tau_{\mathbf{V}}$  — временной радиус корреляции поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ . Принимая во внимание выражение (3.60), можно переписать последнее равенство в виде

$$D_0 = \frac{1}{2} \tau_{\mathbf{V}} \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\tau B_{ii}(0, \tau) \cos 2\Omega\tau = \frac{\pi}{2} \int d\mathbf{k} \Phi(k, 2\Omega), \quad (3.72)$$

где  $\Phi(k, \omega)$  — пространственно-временная спектральная функция (3.10), (3.11) поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

Подействуем теперь оператором  $\frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_{1l}}$  на уравнение (3.71) и положим  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$  и  $j = l$ . В результате для матрицы

$$\left\langle \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} d(\mathbf{r}, t) \right\rangle$$

с помощью выражения (2.122) получаем уравнение вида

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^\infty d\tau \left\langle \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t + \tau)}{\partial r_k} d(\mathbf{r}, t) \right\rangle - 2\Omega \Gamma_{i\mu} \int_0^\infty d\tau \left\langle \frac{\partial V_\mu(\mathbf{r}, t + \tau)}{\partial r_k} d(\mathbf{r}, t) \right\rangle = \\ = \left\langle \frac{\partial V_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} d(\mathbf{r}, t) \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Положим теперь  $i = k$  в уравнении (3.73). В этом случае приходим к стационарному уравнению

$$\lambda \int_0^\infty d\tau \langle d(\mathbf{r}, t + \tau) d(\mathbf{r}, t) \rangle - 2\Omega \int_0^\infty d\tau \langle \xi(\mathbf{r}, t + \tau) d(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle d^2(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (3.74)$$

Умножая теперь уравнение (3.73) на  $\Gamma_{ki}$ , получаем уравнение

$$\lambda \int_0^\infty d\tau \langle \xi(\mathbf{r}, t + \tau) d(\mathbf{r}, t) \rangle + 2\Omega \int_0^\infty d\tau \langle d(\mathbf{r}, t + \tau) d(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \xi(\mathbf{r}, t) d(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (3.75)$$

Таким образом, мы получили систему уравнений (3.74) и (3.75), решение которой с помощью выражений (3.66) можно записать в виде

$$\begin{aligned} D_\rho &= \int_0^\infty d\tau \langle d(\mathbf{r}, t + \tau) d(\mathbf{r}, t) \rangle = \\ &= \frac{\lambda \langle d^2(\mathbf{r}, t) \rangle + 2\Omega \langle \xi(\mathbf{r}, t) d(\mathbf{r}, t) \rangle}{\lambda^2 + 4\Omega^2} = \frac{4\lambda^2 \Omega^2}{(\lambda^2 + 4\Omega^2)^2} \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \cos 2\Omega\tau D(\tau). \end{aligned}$$

Если параметры  $\lambda\tau_0 \gg 1$ ,  $\Omega\tau_0 \gg 1$ , то

$$D_\rho = \frac{4\lambda^3 \Omega^2 D(0)}{(\lambda^2 + 4\Omega^2)^3} = \begin{cases} \frac{4\Omega^2 D(0)}{\lambda^3}, & \text{если } \lambda \gg \Omega, \\ \frac{\lambda^3 D(0)}{16\Omega^4}, & \text{если } \lambda \ll \Omega, \end{cases} \quad (3.76)$$

где, как и ранее,

$$D(0) = \int d\mathbf{k} k^2 E(k, 0) = - \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle.$$

Таким образом, видим, что при выполнении условий  $\lambda\tau_0 \gg 1$ ,  $\Omega\tau_0 \gg 1$  в рассматриваемой задаче процесс генерации дивергентной части поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  описывается линейным уравнением без учета адвективных членов. Если, к тому же, параметр  $\lambda \gg \Omega$ , необходимо принять во внимание следующие поправочные члены порядка  $\sigma_{\mathbf{u}}^4$  (3.49), которые могут быть в некоторых случаях сравнимы с (3.76), т. е.

$$\begin{aligned} D_\rho &= \frac{3}{2} \frac{\tau_0}{\lambda^2} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle^2 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^3} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = \\ &= - \frac{4\Omega^2}{\lambda^3} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle \left\{ 1 - \frac{3\lambda\tau_0}{2\Omega^2} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Пространственный коэффициент диффузии  $D_0$  не зависит от параметра  $\lambda$  и описывается выражением (3.72).

Выше были получены выражения для коэффициентов диффузии, характеризующих кластеризацию поля плотности примеси в гидродинамических потоках в различных асимптотических режимах. Мы не ставили своей целью изучение этих коэффициентов (и, следовательно, самого явления кластеризации) для конкретных геофизических или астрофизических приложений. Это совершенно самостоятельные задачи, которые можно решать на основе полученных выражений.



## Г л а в а 4

ДИФФУЗИЯ И КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ОСЕДАЮЩЕЙ ПРИМЕСИ  
В СЛУЧАЙНЫХ ПОТОКАХ

## 4.1. Текущее состояние проблемы и основные уравнения

Исследование динамики инородных частиц и включений, которые вследствие сил плавучести и тяжести в гидродинамических потоках имеют заметную скорость относительно среды, покоящейся в среднем, привлекает внимание многочисленных исследователей начиная с классической работы Стокса 1851 г. [92]. Важность этих исследований обусловлена актуальностью проблемы для различных экологических и климатологических задач в атмосфере и океанах Земли. К такого рода включениям относится мелкодисперсная пыль от промышленных объектов и очагов экологических катастроф, искусственные центры конденсации или рассеяния.

Диффузия поля плотности числа этих инерционных частиц, приходящихся на единицу объема  $n(\mathbf{r}, t)$ , и плотности пассивной примеси  $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 n(\mathbf{r}, t)$ , движущейся в случайных гидродинамических потоках, описываемых *эйлеровым* полем скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , удовлетворяет по-прежнему уравнениям неразрывности (1.1), (1.2) на с. 8, 8 а поле скоростей частиц  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  в гидродинамическом потоке для малоинерционных частиц описывается квазилинейным уравнением в частных производных (1.3) на с. 8.

Мы не учитываем эффект молекулярной диффузии, что справедливо на начальных этапах развития диффузии. На более позднем этапе временной эволюции необходимо учитывать этот эффект, который описывается уравнением (1.25) на с. 18.

Поле скоростей частиц  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$  в случайном гидродинамическом потоке  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  для малоинерционных частиц в присутствии сил плавучести и тяжести, в отличие от уравнения (1.3), можно описывать квазилинейным уравнением в частных производных:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -\lambda [\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)] + \mathbf{g} \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho_p} \right), \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{g}$  — ускорение силы тяжести, а  $\rho_p$  и  $\rho_0$  плотности частицы и среды соответственно. Это уравнение мы по-прежнему будем рассматривать как феноменологическое.

Скорость оседания или всплывания примеси  $\mathbf{v}$ , направленная, как правило, по вертикали, определяется балансом сил плавучести и сил вязкого трения движущейся примеси и описывается формулой

$$\frac{\mathbf{g}}{\lambda} \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho_p} \right) = \mathbf{v}.$$

Полагая теперь

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t),$$

где  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  — флуктуации поля скоростей примеси относительно  $\mathbf{v}$ , систему уравне-

ний (1.1) на с. 8 и (4.1) можно переписать в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + [\mathbf{v} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \rho(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (4.2)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + [\mathbf{v} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = -\lambda [\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)]. \quad (4.3)$$

Поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  предполагается в общем случае дивергентным, статистически однородным и изотропным в пространстве, а также стационарным во времени случайным гауссовым полем с нулевым средним значением и с корреляционным и спектральным тензорами (2.1), (2.2) на с. 23 .

Будем по-прежнему считать, что дисперсия  $\sigma_{\mathbf{u}}^2 = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$  достаточно мала и определяет основной малый статистический параметр задачи.

## 4.1.1. Диффузия частиц (лагранжево описание)

Уравнение для поля скоростей примеси  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  (4.3) — уравнение в частных производных первого порядка (эйлерово описание), и оно эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных характеристических уравнений (лагранжево описание) для динамики частиц:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v} + \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (4.4)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = -\lambda [\mathbf{v}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t)], \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}_0).$$

Отметим, что эти уравнения являются обычными классическими уравнениями Ньютона для динамики частицы с линейной силой трения, описываемой силой Стокса  $\mathbf{F}(t) = -\lambda \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t)$ , под действием случайной силы  $\mathbf{f}(t) = \lambda \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t)$ , порожденной гидродинамическим потоком.

Решение системы уравнений (4.4) зависит от начального параметра  $\mathbf{r}_0$ , что будем, как и ранее, обозначать вертикальной чертой:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t|\mathbf{r}_0),$$

и тогда эйлерово поле плотности числа частиц  $\rho(\mathbf{r}, t)$  будет описываться равенством (1.21) на с. 15.

Для большого значения параметра  $\lambda \rightarrow \infty$  (безынерционная примесь)

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{r}, t),$$

и уравнения (4.2) и (4.4) упрощаются и принимают вид

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v} + \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (4.5)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}),$$

т. е. для безынерционных частиц задача определения их траекторий в гидродинамическом потоке является чисто кинематической задачей.

Пространственная диффузия, без учета кластеризации безынерционных оседающих частиц в бездивергентном поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  ( $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ ), изучалась

в работах [6, 16], где было показано, что имеется анизотропия пространственного коэффициента диффузии по отношению к направлению вектора оседания примеси  $\mathbf{v}$  и плоскости, перпендикулярной этому направлению. И эта анизотропия обусловлена конечностью временного радиуса корреляции  $\tau_0$ . В приближении дельта-коррелированности по времени  $t$  поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  пространственная диффузия будет изотропной. Учет конечности временного радиуса корреляции  $\tau_0$  в этих работах осуществлялся в рамках диффузионного приближения.

Диффузия и кластеризация малоинерционных частиц в бездивергентном поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  ( $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ ), в отсутствие оседания частиц ( $\mathbf{v} = 0$ ) в рамках системы уравнений (4.4), рассматривалась в предыдущей главе, где было показано, что для описания статистических характеристик скорости частиц при предельном переходе к безынерционным частицам также невозможно использование приближения дельта-коррелированности по времени  $t$  поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , т. е. предельные переходы  $\lambda \rightarrow \infty$  и  $\tau_0 \rightarrow 0$  неперестановочны. В то же время для описания статистических характеристик только пространственной диффузии частиц эти предельные переходы перестановочны. В работе [5] было показано, что это утверждение справедливо также и для оседающих частиц ( $\mathbf{v} \neq 0$ ) в бездивергентном поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  ( $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ ) и анизотропия пространственного коэффициента диффузии связана также только с конечностью временного радиуса корреляции  $\tau_0$ . При этом очевидно, что переход к безынерционной примеси соответствует для параметра  $\lambda$  выполнению условий

$$\lambda\tau_0 \gg 1, \quad \lambda \gg v/l_0, \quad \lambda \gg \sigma_u^2\tau_0/l_0^2, \quad (4.6)$$

где  $l_0$  — пространственный радиус корреляции случайного гидродинамического поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

#### 4.1.2. Эйлерово описание поля плотности примеси

Для описания статистики поля плотности примеси в эйлеровом представлении введем индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho). \quad (4.7)$$

Динамика этой функции в общем случае описывается уравнением Лиувилля

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + [\mathbf{v} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \varphi(\mathbf{r}, t; \rho), \quad (4.8)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, 0; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho),$$

которое можно также переписать в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \right) \varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \left[ 1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right] \varphi(\mathbf{r}, t; \rho), \quad (4.9)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, 0; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho),$$

если поле скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  дивергентно, т. е. если  $\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)/\partial \mathbf{r} \neq 0$ .

Одноточечная плотность вероятностей для решения динамического уравнения (4.2) совпадает с индикаторной функцией, усредненной по ансамблю реализаций случайного поля  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ :

$$P(\mathbf{r}, t; \rho) = \langle \varphi(\mathbf{r}, t; \rho) \rangle.$$

Таким образом, при учете оседания примеси мы имеем динамическую задачу, описываемую уравнением (4.8) или уравнением (4.9) для индикаторной функции  $\varphi(\mathbf{r}, t; \rho)$ , где поле скоростей частиц примеси  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  в случайном гидродинамическом потоке  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  описывается квазилинейным уравнением (4.2). В силу вышесказанного ясно, что все вычисления необходимо проводить в диффузионном приближении, учитывающем конечность временного радиуса корреляции  $\tau_0$  случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

## 4.2. Диффузия и кластеризация поля плотности оседающей безынерционной примеси

Рассмотрим статистическое описание поля плотности оседающей безынерционной примеси в диффузионном приближении. В этом случае уравнения (4.8) и (4.9) упрощаются и принимают следующий вид:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + [\mathbf{v} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \varphi(\mathbf{r}, t; \rho), \quad (4.10)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \left[ 1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right] \varphi(\mathbf{r}, t; \rho) \quad (4.11)$$

с начальным условием

$$\varphi(\mathbf{r}, 0; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho).$$

Уравнение (4.10) удобно для определения функциональной зависимости функции  $\varphi(\mathbf{r}, t; \rho)$  от поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , а уравнение (4.11) более удобно для непосредственного усреднения по ансамблю реализаций случайного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

Так как уравнения (4.10) и (4.11) являются уравнениями первого порядка по времени с начальным условием, то для них выполняется условие динамической причинности

$$\frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t; \rho)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} = 0 \quad \text{при } t' < 0 \text{ и } t' > t. \quad (4.12)$$

Таким образом их решение  $\varphi(\mathbf{r}, t; \rho)$  функционально зависит лишь от предшествующих по  $t$  значений  $u_j(\mathbf{r}', t')$  из интервала  $t_0 \leq t' \leq t$ . При этом для вариационной производной при  $t' \rightarrow t$  имеем очевидное равенство

$$\frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t; \rho)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t - 0)} = \left[ -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \varphi(\mathbf{r}, t; \rho). \quad (4.13)$$

Уравнение для плотности вероятностей  $P(\mathbf{r}, t; \rho)$  получим, усредняя уравнение (4.11) по ансамблю реализаций поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) P(\mathbf{r}, t; \rho) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \varphi(\mathbf{r}, t; \rho) \rangle + \left[ 1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right] \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}, t; \rho) \right\rangle. \quad (4.14)$$

Уравнение (4.14) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) P(\mathbf{r}, t; \rho) = & -\frac{\partial}{\partial r_i} \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' B_{ij}^{(u)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \left\langle \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t; \rho)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle + \\ & + \left[ 1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right] \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' \frac{\partial B_{ij}^{(u)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')}{\partial r_j} \left\langle \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t; \rho)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь мы воспользовались формулой Фурутцу–Новикова (2.7) на с. 24.

Диффузионное приближение для уравнения (4.15) соответствует пренебрежению случайными флуктуациями на временных масштабах порядка  $\tau_0$ . Вариационная производная в уравнении (4.15) в этом приближении описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t; \rho)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} = 0 \quad (4.16)$$

с начальным условием (4.13), т. е.

$$\left. \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t; \rho)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right|_{t=t'} = \left[ -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \varphi(t', \mathbf{r}; \rho). \quad (4.17)$$

Решение задачи (4.16), (4.17) имеет вид

$$\frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t; \rho)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} = \exp\left(-\mathbf{v}(t - t') \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \left[ -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \varphi(t', \mathbf{r}; \rho). \quad (4.18)$$

Сама же функция  $\varphi(\mathbf{r}, t; \rho)$  на временном интервале порядка  $\tau_0$  описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = 0, \quad \varphi(\mathbf{r}, t; \rho)|_{t=t'} = \varphi(t', \mathbf{r}; \rho),$$

и, следовательно,

$$\varphi(t', \mathbf{r}; \rho) = \exp\left\{\mathbf{v}(t - t') \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right\} \varphi(\mathbf{r}, t; \rho). \quad (4.19)$$

Подставляя (4.19) в (4.18), получаем окончательное выражение для вариационной производной в диффузионном приближении ( $\tau = t - t'$ ):

$$\frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t; \rho)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} = \left[ -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}\tau) \frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}\tau)}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \varphi(\mathbf{r}, t; \rho). \quad (4.20)$$

Подставляя теперь (4.20) в (4.15) и выполняя интегрирование по  $\mathbf{r}'$ , получаем замкнутое уравнение для плотности вероятностей поля плотности примеси в диффузионном приближении:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) P(\mathbf{r}, t; \rho) &= \int_0^t d\tau B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau) \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, t; \rho) - \\ &- \int_0^t d\tau \frac{\partial B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_j} P(\mathbf{r}, t; \rho) - \int_0^t d\tau \frac{\partial B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_i \partial r_j} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(\mathbf{r}, t; \rho). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Для достаточно больших значений времени ( $t \gg \tau_0$ ,  $t \gg l_0/v$ , где  $l_0$  — пространственный масштаб поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ) можно заменить пределы интегрирования в правой части (4.21) на бесконечность и переписать уравнение для плотности вероятностей в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) P(\mathbf{r}, t; \rho) &= D_{ij}(\mathbf{v}) \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, t; \rho) + \\ &+ G_j(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial r_j} P(\mathbf{r}, t; \rho) + D_\rho(\mathbf{v}) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(\mathbf{r}, t; \rho), \end{aligned} \quad (4.22)$$

где коэффициенты диффузии определяются равенствами

$$\begin{aligned} D_{ij}(\mathbf{v}) &= \int_0^\infty d\tau B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau) = \int_0^\infty d\tau \langle u_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau, t + \tau) u_j(\mathbf{r}, t) \rangle, \\ G_j(\mathbf{v}) &= - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_i} = - \int_0^\infty d\tau \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau, t + \tau)}{\partial \mathbf{r}} u_j(\mathbf{r}, t) \right\rangle, \\ D_\rho(\mathbf{v}) &= - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_i \partial r_j} = \int_0^\infty d\tau \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau, t + \tau)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Величины  $D_{ij}(\mathbf{v})$  и  $G_j(\mathbf{v})$  описывают пространственное распыление поля плотности безынерционной примеси и не оказывают прямого влияния на кластеризацию плотности примеси, за которую ответствен коэффициент диффузии  $D_\rho(\mathbf{v})$ . При этом такие функционалы плотности примеси, как (2.48) на с. 36, сохраняют свой асимптотический закон эволюции во времени с заменой  $D_\rho$  на  $D_\rho(\mathbf{v})$ .

Если поле скорости гидродинамического потока  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  бездивергентно, т. е.  $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ , то коэффициенты  $G_j(\mathbf{v})$ ,  $D_\rho(\mathbf{v})$  в уравнении (4.22) обращаются в нуль и кластеризация поля безынерционной примеси не происходит. Кластеризация в этом случае может осуществляться только за счет малой инерционности примеси.

Из уравнения (4.22), умножая его на  $\rho$  и затем интегрируя по  $\rho$ , можно получить уравнение для средней плотности примеси:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = D_{ij}(\mathbf{v}) \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle + G_j(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial r_j} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (4.24)$$

которое совпадает с уравнением для плотности вероятностей положения частицы.

Легко получить в диффузионном приближении и уравнение для средней плотности примеси с учетом эффектов молекулярной диффузии. В самом деле, усредняя уравнение (1.25) на с. 18 в безынерционном приближении по ансамблю реализаций поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  с учетом формулы Фурутцу–Новикова (2.7) на с. 24, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle &= \mu \Delta \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle - \\ &- \frac{\partial}{\partial r_i} \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \left\langle \frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle, \quad \langle \rho(\mathbf{r}, 0) \rangle = \rho_0(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Вариационная производная в уравнении (4.25) в диффузионном приближении описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} = \mu \Delta \frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \quad (4.26)$$

с начальным условием, вытекающим из уравнения (1.25) на с. 18, т. е.

$$\left. \frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right|_{t=t'} = - \frac{\partial}{\partial r_j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}, t). \quad (4.27)$$

Решение задачи (4.26), (4.27) имеет вид ( $\tau = t - t'$ )

$$\frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} = - \exp\left\{\tau \left(\mu \Delta - \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\right\} \frac{\partial}{\partial r_j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}, t'). \quad (4.28)$$

Сама же функция  $\rho(\mathbf{r}, t)$  на временном интервале порядка  $\tau_{\mathbf{v}}$  описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \rho(\mathbf{r}, t) = \mu \Delta \rho(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, t)|_{t=t'} = \rho(\mathbf{r}, t'),$$

и, следовательно,

$$\rho(\mathbf{r}, t') = \exp \left\{ -\tau \left( \mu \Delta - \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \right\} \rho(\mathbf{r}, t). \quad (4.29)$$

Подставляя (4.29) в правую часть равенства (4.28), получаем окончательное выражение для вариационной производной в диффузионном приближении  $\tau = t - t'$ :

$$\frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} = -e^{\mu \Delta \tau} \frac{\partial}{\partial r_j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v} \tau) e^{-\mu \Delta \tau} \rho(\mathbf{r}, t). \quad (4.30)$$

Подставляя теперь (4.30) в (4.25) и выполняя интегрирование по  $\mathbf{r}'$ , получаем замкнутое уравнение для средней плотности примеси в диффузионном приближении:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle &= \mu \Delta \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle + \\ &+ \frac{\partial}{\partial r_i} \int d\mathbf{r}' \int_0^t d\tau B_{ij}^{(u)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) e^{\mu \tau \Delta} \frac{\partial}{\partial r_j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v} \tau) e^{-\mu \tau \Delta} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle, \end{aligned} \quad (4.31)$$

с начальным условием

$$\langle \rho(\mathbf{r}, 0) \rangle = \rho_0(\mathbf{r}).$$

Для достаточно больших значений времени ( $t \gg \tau_0$ ,  $t \gg l_0/v$ ) можно заменить предел в интеграле в правой части (4.31) на бесконечность и переписать уравнение для средней плотности примеси в виде уравнения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle &= \mu \Delta \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \int d\mathbf{r}' \int_0^\infty d\tau B_{ij}^{(u)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) e^{\mu \tau \Delta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v} \tau) e^{-\mu \tau \Delta} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle - \\ &- \frac{\partial}{\partial r_i} \int d\mathbf{r}' \int_0^\infty d\tau \frac{\partial B_{ij}^{(u)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau)}{\partial r_j} e^{\mu \tau \Delta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v} \tau) e^{-\mu \tau \Delta} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle, \end{aligned}$$

которое может быть решено в явном виде.

В самом деле, вводя фурье-преобразование поля плотности

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{q} \rho_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad \rho_{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$$

и спектральную функцию поля скоростей (3.10), получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{v}\mathbf{q}\right) \langle \rho_{\mathbf{q}}(t) \rangle = -\left\{ \mu \mathbf{q}^2 + q_i q_j D_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) - q_i G_i(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \right\} \langle \rho_{\mathbf{q}}(t) \rangle, \quad (4.32)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} D_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) &= \int d\mathbf{k} \int_0^\infty d\tau E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) e^{-\mu(\mathbf{k}^2 - 2\mathbf{k}\mathbf{q})\tau + i\mathbf{k}\mathbf{v}\tau}, \\ G_i(\mathbf{q}, \mathbf{v}) &= \int d\mathbf{k} \int_0^\infty d\tau k_j E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) e^{-\mu(\mathbf{k}^2 - 2\mathbf{k}\mathbf{q})\tau + i\mathbf{k}\mathbf{v}\tau}. \end{aligned}$$

Решение уравнения (4.32) можно записать в виде

$$\langle \rho_{\mathbf{q}}(t) \rangle = \rho_{\mathbf{q}}(0) \exp \left\{ -i\mathbf{v}\mathbf{q}t - \mu \mathbf{q}^2 t - q_i q_j D_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v})t + q_i G_i(\mathbf{q}, \mathbf{v})t \right\}.$$

И, следовательно,

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d\mathbf{r}' \rho_0(\mathbf{r}') P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}'),$$

где величину

$$P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{q} \exp \left\{ i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}t) - \mu \mathbf{q}^2 t - q_i q_j D_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{v})t + q_i G_i(\mathbf{q}, \mathbf{v})t \right\} \quad (4.33)$$

можно рассматривать как плотность вероятностей положения частицы с учетом молекулярной диффузии, если дополнить уравнение (4.4) гауссовыми случайными возмущениями  $\mathbf{f}(t)$ ,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v} + \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}',$$

с параметрами

$$\langle \mathbf{f}(t) \rangle = 0, \quad \langle f_i(t) f_j(t') \rangle = 2\mu \delta_{ij} \delta(t - t').$$

В общем случае распределение вероятностей (4.33) не является гауссовым. Однако при достаточно больших временах ( $t \gg \tau_0$ ,  $t \gg l_0/v$ ) выражение (4.33) упрощается и принимает вид гауссова распределения:

$$P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{q} \exp \left\{ i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}t) - \mu \mathbf{q}^2 t - q_i q_j D_{ij}(\mathbf{v})t + q_i G_i(\mathbf{v})t \right\}, \quad (4.34)$$

где теперь коэффициенты

$$\begin{aligned} D_{ij}(\mathbf{v}) &= D_{ij}(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = \int d\mathbf{k} \int_0^\infty d\tau E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) e^{-\mu \mathbf{k}^2 \tau + i\mathbf{k}\mathbf{v}\tau}, \\ G_i(\mathbf{v}) &= G_i(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = \int d\mathbf{k} \int_0^\infty d\tau k_j E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) e^{-\mu \mathbf{k}^2 \tau + i\mathbf{k}\mathbf{v}\tau}. \end{aligned}$$

Пространственный тензор диффузии  $D_{ij}(\mathbf{v})$  можно представить в виде

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = A(v) \frac{v_i v_j}{v^2} + B(v) \Delta_{ij}(\mathbf{v}),$$

где

$$A(v) = D_{ij}(\mathbf{v}) \frac{v_i v_j}{v^2}, \quad B(v) = \frac{1}{d-1} D_{ij}(\mathbf{v}) \Delta_{ij}(\mathbf{v})$$

и  $\Delta_{ij}(\mathbf{v}) = \delta_{ij} - v_i v_j / v^2$ . Из такого представления следует, что если направить одну из осей системы координат ( $z$ ) по вектору  $\mathbf{v}$ , то пространственная диффузия поля плотности будет статистически независима по разным осям и коэффициент диффузии в направлении выбранной оси будет определяться величиной  $D_{zz}(v) = A(v)$ , а в поперечной плоскости ( $\mathbf{R}$ ) — величиной  $D_{\perp}(v) = B(v)$ , при этом имеется дополнительный перенос частиц в среднем по оси  $z$ , обусловленный дивергентностью поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , и при этом

$$G_j(\mathbf{v}) = G(v) \frac{v_j}{v^2} = \frac{v_j}{v^2} \int d\mathbf{k} \int_0^\infty d\tau E^{\mathbf{P}}(k, \tau) (i\mathbf{k}\mathbf{v}) e^{-\mu \mathbf{k}^2 \tau + i\mathbf{k}\mathbf{v}\tau}. \quad (4.35)$$

Для оценки анизотропии коэффициентов диффузии можно воспользоваться моделью, для которой

$$E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = E_{ij}(\mathbf{k}) \exp\{-|\tau|/\tau_0\},$$

где  $\tau_0$  — временной радиус корреляции случайного поля скоростей. В этом случае

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{v} \int \frac{d\mathbf{k}}{k} E_{ij}(\mathbf{k}) \frac{p(k, v)}{1 + p^2(k, v) \cos^2 \theta},$$

где  $\cos^2 \theta = (\mathbf{k}\mathbf{v})^2 / k^2 v^2$  и введен параметр

$$p(k, v) = \frac{kv\tau_0}{1 + \mu\tau_0 k^2}.$$

Для вектора  $G_i(\mathbf{v})$  получаем в трехмерном случае

$$\begin{aligned} G_j(\mathbf{v}) &= -\frac{v_j}{v^2} \int d\mathbf{k} E^p(k) \frac{p^2(k, v) \cos^2 \theta}{1 + p^2(k, v) \cos^2 \theta} = \\ &= -\frac{4\pi v_j}{v^2} \int_0^\infty dk k^2 E^p(k) \left\{ 1 - \frac{1}{p(k, v)} \arctg p(k, v) \right\}. \end{aligned}$$

Для бездивергентного поля скоростей, например в трехмерном случае, когда  $E_{ij}(\mathbf{k}) = E^s(k) \Delta_{ij}(\mathbf{k})$ , получаем

$$D_{zz}(v) = \frac{4\pi}{v} \int_0^\infty dk k E^s(k) f_{\parallel}(k, v), \quad D_{\perp}(v) = \frac{4\pi}{v} \int_0^\infty dk k E^s(k) f_{\perp}(k, v),$$

где

$$\begin{aligned} f_{\parallel}(k, v) &= \left[ \arctg p(k, v) + \frac{1}{p(k, v)} \left( \frac{1}{p(k, v)} \arctg p(k, v) - 1 \right) \right], \\ f_{\perp}(k, v) &= \left[ \arctg p(k, v) - \frac{1}{p(k, v)} \left( \frac{1}{p(k, v)} \arctg p(k, v) - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

При малых значениях параметра  $p$  ( $v\tau_0 \ll l_0$ ), где  $l_0$  — пространственный радиус корреляции поля скоростей) функции  $f_{\parallel}(k, v)$  и  $f_{\perp}(k, v)$  близки к  $2p/3$ , что соответствует изотропной, не зависящей от скорости оседания  $v$  диффузии, а при больших значениях параметра  $p$  ( $v\tau_0 \gg l_0$ ) имеем:  $f_{\parallel}(k, v) = 2f_{\perp}(k, v) \cong \pi/2$ . Такая анизотропия диффузии объясняется тем обстоятельством, что диффузия примеси относительно турбулентных движений уменьшает время пребывания частицы примеси в пределах области коррелирующих скоростей. Вместе с тем в изотропном поле случайных скоростей поперечный радиус корреляции поля скоростей вдвое меньше продольного радиуса корреляции [3, 27], что и объясняет указанную анизотропию коэффициента диффузии. Для значений параметров  $\mu\tau_0 \ll l_0^2$  тензор пространственной диффузии  $D_{ij}(\mathbf{v})$  не зависит от  $\mu$ . Полученные оценки справедливы, разумеется, при условии сходимости всех фигурирующих интегралов. В работе [5] рассматривался случай развитого турбулентного потока, когда спектральная функция  $E(k)$  имеет степенную форму, соответствующую закону Колмогорова–Обухова.

Отметим, что в общем случае в системе координат, ориентированной по направлению оседания примеси, уравнение (4.22) принимает вид ( $\mathbf{r} = \{z, \mathbf{R}\}$ )

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) P(\mathbf{r}, t; \rho) &= A(v) \frac{\partial^2}{\partial z^2} P(\mathbf{r}, t; \rho) + B(v) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2} P(\mathbf{r}, t; \rho) + \\ &+ G(v) \frac{\partial}{\partial z} P(\mathbf{r}, t; \rho) + D_{\rho}(v) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(\mathbf{r}, t; \rho), \end{aligned} \quad (4.36)$$

где коэффициент сноса

$$G(v) = - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial B_{iz}^{(u)}(v\tau, \mathbf{0}, \tau)}{\partial r_i}.$$

### 4.3. Учет малой инерционности оседающей примеси

#### 4.3.1. Общие замечания

Как указывалось выше, если гидродинамическое поле скоростей является бездивергентным, то для описания явления кластеризации падающей примеси необходимо принять во внимание его инерционность, т. е. исходить из уравнений (4.2). Считая теперь, что случайное поле  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  гауссово, статистически однородно в пространстве, стационарно во времени с нулевым средним значением и с корреляционным тензором

$$\langle v_i(\mathbf{r}, t) v_j(\mathbf{r}', t') \rangle = B_{ij}^{(v)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'),$$

видим, что для решения динамического уравнения (4.2) одноточечная плотность вероятностей  $P(\mathbf{r}, t; \rho)$  будет описываться уравнением, аналогичным уравнению (4.22):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) P(\mathbf{r}, t; \rho) &= D_{ij}(\mathbf{v}, t) \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, t; \rho) + \\ &+ G_j(\mathbf{v}, t) \frac{\partial}{\partial r_j} P(\mathbf{r}, t; \rho) + D_{\rho}(\mathbf{v}, t) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(\mathbf{r}, t; \rho), \end{aligned} \quad (4.37)$$

где коэффициенты диффузии определяются равенствами

$$\begin{aligned} D_{ij}(\mathbf{v}, t) &= \int_0^t d\tau B_{ij}^{(v)}(\mathbf{v}\tau, \tau) = \int_0^t dt' \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t) v_j(\mathbf{r} + \mathbf{v}t', t') \rangle, \\ G_j(\mathbf{v}, t) &= - \int_0^t d\tau \frac{\partial B_{ij}^{(v)}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_i} = - \int_0^t dt' \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t)}{\partial \mathbf{r}} v_j(\mathbf{r} + \mathbf{v}t', t') \right\rangle, \\ D_{\rho}(\mathbf{v}, t) &= - \int_0^t d\tau \frac{\partial B_{ij}^{(v)}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_i \partial r_j} = \int_0^t dt' \left\langle \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{v}t', t')}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Величина  $D_{ij}(\mathbf{v}, t)$ , как и ранее, описывает пространственное расплывание поля плотности малоинерционной примеси и не оказывает прямого влияния на кластеризацию плотности примеси, за которую ответствен коэффициент диффузии  $D_{\rho}(\mathbf{v}, t)$ .

Таким образом, задача сводится к оценке коэффициентов диффузии (4.38) исходя из стохастического уравнения (4.3), т. е. к вычислению пространственно-временных корреляционных функций случайных полей  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  и  $\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{r}$  [10].

Уравнение (4.3) можно представить в виде

$$\exp\left(-\mathbf{v}t \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left[ \exp\left(\mathbf{v}t \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \right] = - \left( \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \lambda [\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)],$$

и, следовательно, вводя функции

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t), \quad \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, t),$$

можно переписать его в виде, не содержащем параметра  $\mathbf{v}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = - \left( \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) - \lambda [\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)], \quad (4.39)$$

соответствующем полям скоростей в системе координат, связанной с оседающей примесью. В этом случае для коэффициентов диффузии (4.38) получаем выражения

$$\begin{aligned} D_{ij}(\mathbf{v}, t) &= \int_0^t dt' \langle \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}, t') \rangle = \int_0^t d\tau B_{ij}^{(\mathbf{v})}(\mathbf{v}\tau, \tau) = \int_0^t d\tau B_{ij}^{(\tilde{\mathbf{v}})}(\mathbf{0}, \tau), \\ G_j(\mathbf{v}, t) &= - \int_0^t dt' \left\langle \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \tilde{v}_j(\mathbf{r}, t') \right\rangle = - \int_0^t d\tau \frac{\partial B_{ij}^{(\mathbf{v})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_i} = - \int_0^t d\tau \frac{\partial B_{ij}^{(\tilde{\mathbf{v}})}(\mathbf{0}, \tau)}{\partial r_i}, \\ D_\rho(\mathbf{v}, t) &= \int_0^t dt' \left\langle \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t')}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle = - \int_0^t d\tau \frac{\partial B_{ij}^{(\mathbf{v})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_i \partial r_j} = - \int_0^t d\tau \frac{\partial B_{ij}^{(\tilde{\mathbf{v}})}(\mathbf{0}, \tau)}{\partial r_i \partial r_j}. \end{aligned}$$

Для достаточно больших значений времени ( $t \gg \tau_0$ ,  $t \gg l_0/v$ ) можно заменить пределы в интегралах на бесконечность и переписать коэффициенты диффузии в виде

$$\begin{aligned} D_{ij}(\mathbf{v}) &= \int_0^\infty d\tau B_{ij}^{(\tilde{\mathbf{v}})}(\mathbf{0}, \tau), & G_j(\mathbf{v}) &= - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial B_{ij}^{(\tilde{\mathbf{v}})}(\mathbf{0}, \tau)}{\partial r_i}, \\ D_\rho(\mathbf{v}) &= - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial B_{ij}^{(\tilde{\mathbf{v}})}(\mathbf{0}, \tau)}{\partial r_i \partial r_j}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Таким образом, стационарные, не зависящие от времени коэффициенты диффузии определяются пространственно-временными статистическими характеристиками решения нелинейного уравнения (4.39).

Будем считать, что гидродинамическое поле скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  — бездивергентное гауссово случайное поле ( $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ ), однородное и изотропное в пространстве и стационарное во времени с нулевым средним значением и корреляционным тензором

$$B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle.$$

При этом в системе координат, связанной с оседающей примесью,

$$B_{ij}^{(\tilde{\mathbf{u}})}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \langle \tilde{u}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{u}_j(\mathbf{r}', t') \rangle = B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r} - \mathbf{r}' + \mathbf{v}(t - t'), t - t'). \quad (4.41)$$

Для такой модели можно ввести пространственную спектральную функцию поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ :

$$B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E(k, t) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \quad (4.42)$$

Отметим, что для важного в дальнейшем тензора четвертого порядка имеет место представление

$$-\frac{\partial^2 B_{ij}^{(\mathbf{u})}(0, 0)}{\partial r_k \partial r_l} = \frac{D}{d(d+2)} [(d+1)\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}], \quad (4.43)$$

где коэффициент

$$D = \int d\mathbf{k} k^2 E(k) = -\frac{1}{d-1} \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (4.44)$$

связан с вихревой структурой случайного бездивергентного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

Изучим статистические характеристики уравнения (4.39) в эйлеровом описании в диффузионном приближении, т. е. вычислим параметры (4.40), характеризующие временную эволюцию образования кластерной структуры плотности поля примеси  $\rho(\mathbf{r}, t)$ .

Учитывая, что параметр  $\sigma_{\mathbf{u}}^2$  мал, мы можем линеаризовать уравнение (4.39) относительно функции  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$  и перейти к более простому векторному уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = - \left( \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) - \lambda [\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)],$$

которое запишем в координатном представлении:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right) \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) = -\tilde{u}_k(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} - \frac{\partial \tilde{u}_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \tilde{v}_k(\mathbf{r}, t) + \lambda \tilde{u}_i(\mathbf{r}, t). \quad (4.45)$$

Как всегда, по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

### 4.3.2. Диффузионное приближение

Случайное поле  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$  коррелирует с функцией  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$ , которая является функционалом поля  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ . Расщепление корреляций для гауссова поля  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$  также основано на формуле Фурутцу–Новикова (2.7) на с. 24, которая в данном случае, согласно (4.41), имеет вид

$$\langle \tilde{u}_k(\mathbf{r}, t) R[t; \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \tau)] \rangle = \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' B_{kl}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r} - \mathbf{r}' + \mathbf{v}(t - t'), t - t') \left\langle \frac{\delta R[t; \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \tau)]}{\delta \tilde{u}_l(\mathbf{r}', t')} \right\rangle. \quad (4.46)$$

Для вариационных производных в диффузионном приближении имеем уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right) \frac{\delta \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t)}{\delta \tilde{u}_l(\mathbf{r}', t')} = 0$$

с начальным условием при  $t = t'$ :

$$\left. \frac{\delta \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t)}{\delta \tilde{u}_l(\mathbf{r}', t')} \right|_{t=t'+0} = - \left[ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t')}{\partial r_l} + \delta_{il} \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_k} \tilde{v}_k(\mathbf{r}, t') \right] + \lambda \delta_{il} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

которое следует из уравнения (3.26). Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{\delta \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t)}{\delta \tilde{u}_l(\mathbf{r}', t')} = e^{-\lambda(t-t')} \left\{ - \left[ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t')}{\partial r_l} + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_k} \delta_{il} \tilde{v}_k(\mathbf{r}, t') \right] + \lambda \delta_{il} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right\}.$$

Само поле  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$  в диффузионном приближении имеет структуру

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = e^{-\lambda(t-t')} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t'),$$

и, следовательно,

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t') = e^{\lambda(t-t')} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t).$$

Таким образом, для вариационной производной получаем выражение

$$\frac{\delta \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t)}{\delta \tilde{u}_i(\mathbf{r}', t')} = - \left[ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} + \delta_{ii} \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_\mu} \tilde{v}_\mu(\mathbf{r}, t) \right] + \lambda e^{-\lambda(t-t')} \delta_{ii} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (4.47)$$

### 4.3.3. Пространственно-временной корреляционный тензор поля $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$

Для пространственно-временной корреляционной функции поля скоростей  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$  при  $t > t_1$  имеем уравнение

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right) \langle \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle = \lambda \langle \tilde{u}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle - \frac{\partial}{\partial r_k} \langle \tilde{u}_k(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle - \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \tilde{v}_k(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}_1, t_1) \right\rangle.$$

С помощью формулы Фурутцу–Новикова (4.46) и выражения для вариационной производной (4.47) получаем в стационарном режиме уравнение с начальным условием для функции  $\langle \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle$  ( $\tau = t - t_1$ ):

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \lambda \right) \langle \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t + \tau) \tilde{v}_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle = \lambda^2 e^{\lambda \tau} \int_{\tau}^{\infty} d\tau_1 B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}\tau_1, \tau_1) e^{-\lambda \tau_1}, \quad (4.48)$$

$$\langle \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t + \tau) \tilde{v}_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle_{\tau=0} = \langle \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle,$$

где стационарное значение  $\langle \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle$ , естественно, не зависит от времени  $t$ . В уравнении (4.48) опущены члены порядка  $\sim \sigma_{\mathbf{u}}^4$ . Это можно сделать для достаточно большого значения параметра  $\lambda$ , удовлетворяющего условиям (3.32), что предполагается выполненным.

Теперь мы можем вычислить тензор пространственной диффузии  $D_{ij}(\mathbf{v})$  в выражениях (4.40). С этой целью, интегрируя уравнение (4.48) по параметру  $\tau$  в интервале  $(0, \infty)$ , получаем равенство

$$\lambda \int_0^{\infty} d\tau \langle \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t + \tau) \tilde{v}_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle = \langle \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle + \lambda \int_0^{\infty} d\tau B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}\tau, \tau) [1 - e^{-\lambda \tau}]. \quad (4.49)$$

Полагая теперь  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ , для коэффициента диффузии  $D_{ij}(\mathbf{v})$  получаем выражение

$$\lambda D_{ij}(\mathbf{v}) = \langle \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}, t) \rangle + \lambda \int_0^{\infty} d\tau B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau) [1 - e^{-\lambda \tau}]. \quad (4.50)$$

Далее из уравнения (4.45) следует уравнение для одновременного пространственного корреляционного тензора поля  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + 2\lambda \right) \langle \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle = - \frac{\partial}{\partial r_k} \langle \tilde{u}_k(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle - \frac{\partial}{\partial r_{1k}} \langle \tilde{u}_k(\mathbf{r}_1, t) \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle - \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \tilde{v}_k(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}_1, t) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_j(\mathbf{r}_1, t)}{\partial r_{1k}} \tilde{v}_k(\mathbf{r}_1, t) \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) \right\rangle + \lambda [\langle \tilde{u}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle + \langle \tilde{u}_j(\mathbf{r}_1, t) \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) \rangle].$$

Используя формулу Фурутцу–Новикова (4.46) и выражение (4.47) для вариационной производной, получаем уравнение для стационарного корреляционного тензора  $F_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = \langle \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle$ , не зависящего от времени ( $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}$ ):

$$\lambda F_{ij}(\mathbf{r}) = 2 \int_0^{\infty} d\tau [B_{\beta\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau) - B_{\beta\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau, \tau)] \frac{\partial^2}{\partial r_\beta \partial r_\gamma} F_{ij}(\mathbf{r}) - \int_0^{\infty} d\tau \frac{\partial B_{\beta j}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_\gamma} \frac{\partial}{\partial r_\beta} F_{i\gamma}(\mathbf{r}) - \int_0^{\infty} d\tau \frac{\partial B_{\beta i}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_\gamma} \frac{\partial}{\partial r_\beta} F_{\gamma j}(\mathbf{r}) - \int_0^{\infty} d\tau \frac{\partial B_{i\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_\beta} \frac{\partial}{\partial r_\gamma} F_{\beta j}(\mathbf{r}) - \int_0^{\infty} d\tau \frac{\partial B_{j\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_\beta} \frac{\partial}{\partial r_\gamma} F_{i\beta}(\mathbf{r}) - 2 \int_0^{\infty} d\tau \frac{\partial^2 B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_\beta \partial r_\gamma} F_{\beta\gamma}(\mathbf{r}) + 2\lambda^2 \int_0^{\infty} d\tau e^{-\lambda \tau} B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau, \tau). \quad (4.51)$$

Для стационарного значения корреляции  $\langle \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}, t) \rangle$ , полагая  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  в уравнении (4.51) и пренебрегая членами порядка  $\sigma_{\mathbf{u}}^4$ , получаем уравнение

$$\langle \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t) \tilde{v}_j(\mathbf{r}, t) \rangle = \lambda \int_0^{\infty} d\tau e^{-\lambda \tau} B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau), \quad (4.52)$$

и, следовательно, подставляя (4.52) в выражение (4.50), получаем для тензора пространственной диффузии  $D_{ij}(\mathbf{v})$  равенство

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = \int_0^{\infty} d\tau B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau), \quad (4.53)$$

не зависящее от параметра  $\lambda$  и совпадающее, естественно, с выражением, соответствующим безынерционной примеси.

Аналогичным образом можно вычислить и коэффициент сноса, описываемый вторым членом в равенствах (4.40). При этом очевидно, что он будет порядка  $\sigma_{\mathbf{u}}^4$  и, следовательно, мал по сравнению с основной скоростью оседания примеси  $\mathbf{v}$ .

#### 4.3.4. Пространственно-временной корреляционный тензор поля

$\text{div } \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$

Прежде всего отметим, что дифференцируя выражение (4.49) по  $r_i$  и  $r_{1j}$  и полагая  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ , получаем для коэффициента диффузии в  $\rho$ -пространстве  $D_\rho(\mathbf{v})$  выражение

$$D_\rho(\mathbf{v}) = \int_0^\infty d\tau \left\langle \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t + \tau)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle = \frac{1}{\lambda} \left\langle \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle, \quad (4.54)$$

откуда следует выражение для временного радиуса корреляции поля  $\partial \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{r}$ :

$$\tau_{\text{div } \tilde{\mathbf{v}}} = \frac{1}{\lambda},$$

справедливое для всех достаточно больших значений параметра  $\lambda$  и, в частности, для случая (3.32), когда  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и, следовательно,  $\tau_{\tilde{\mathbf{v}}} = \tau_0$ .

Рассмотрим теперь такие статистические характеристики пространственных производных поля  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$ , как

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{v}_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \frac{\partial \tilde{v}_j(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} \right\rangle = - \left. \frac{\partial^2 F_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_k \partial r_l} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}}.$$

Для этих величин из уравнения (3.28) следует уравнение

$$\begin{aligned} 2\lambda \frac{\partial^2 F_{ij}(0)}{\partial r_k \partial r_l} &= 2\lambda^2 \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \frac{\partial^2 B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_k \partial r_l} - 2 \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{\beta\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_k \partial r_l} \frac{\partial^2 F_{ij}(0)}{\partial r_\beta \partial r_\gamma} - \\ &- \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{\beta j}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_\gamma \partial r_k} \frac{\partial^2 F_{i\gamma}(0)}{\partial r_\beta \partial r_l} - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{\beta j}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_\gamma \partial r_l} \frac{\partial^2 F_{i\gamma}(0)}{\partial r_\beta \partial r_k} - \\ &- \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{\beta i}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_\gamma \partial r_k} \frac{\partial^2 F_{\gamma j}(0)}{\partial r_\beta \partial r_l} - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{\beta i}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_\gamma \partial r_l} \frac{\partial^2 F_{\gamma j}(0)}{\partial r_\beta \partial r_k} - \\ &- \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{i\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_\beta \partial r_k} \frac{\partial^2 F_{\beta j}(0)}{\partial r_\gamma \partial r_l} - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{i\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_\beta \partial r_l} \frac{\partial^2 F_{\beta j}(0)}{\partial r_\gamma \partial r_k} - \\ &- \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{j\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_\beta \partial r_k} \frac{\partial^2 F_{i\beta}(0)}{\partial r_\gamma \partial r_l} - \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{j\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_\beta \partial r_l} \frac{\partial^2 F_{i\beta}(0)}{\partial r_\gamma \partial r_k} - \\ &- 2 \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_\beta \partial r_\gamma} \frac{\partial^2 F_{\beta\gamma}(0)}{\partial r_k \partial r_l} - 2 \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^4 B_{ij}(0, \tau)}{\partial r_\beta \partial r_\gamma \partial r_k \partial r_l} F_{\beta\gamma}(0). \quad (4.55) \end{aligned}$$

Положим в уравнении (4.55)  $i = k, j = l$ . Получаем выражение

$$\lambda \left\langle \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle = 4 \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{\beta\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_i \partial r_j} \frac{\partial^2 F_{ij}(0)}{\partial r_\beta \partial r_\gamma}. \quad (4.56)$$

Для величины, стоящей в правой части (4.56), имеем

$$\frac{\partial^2 F_{ij}(0)}{\partial r_\beta \partial r_\gamma} = \lambda \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} \frac{\partial^2 B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial r_\beta \partial r_\gamma}$$

и при выполнении условий (3.32), в силу (4.43), получаем

$$\frac{\partial^2 F_{ij}(0)}{\partial r_\beta \partial r_\gamma} = \frac{\partial^2 B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{0}, 0)}{\partial r_\beta \partial r_\gamma} = \frac{D}{d(d+2)} [(d+1)\delta_{\beta\gamma}\delta_{ij} - \delta_{\beta i}\delta_{\gamma j} - \delta_{\beta j}\delta_{\gamma i}],$$

где величина  $D$  описывается формулой (4.44) и связана с вихревой структурой поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

Следовательно, для коэффициента диффузии  $D_\rho(\mathbf{v})$  получаем выражение

$$\begin{aligned} D_\rho(\mathbf{v}) &= \frac{4D(d+1)}{d(d+2)\lambda^2} \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{\beta\beta}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial \mathbf{r}^2} = \\ &= \frac{4(d+1)}{d(d+2)(d-1)\lambda^2} \frac{\partial^2 B_{\alpha\alpha}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{0}, 0)}{\partial \mathbf{r}^2} \int_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{\beta\beta}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau, \tau)}{\partial \mathbf{r}^2}. \quad (4.57) \end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что коэффициент  $D_\rho(\mathbf{v}) \sim \sigma_{\mathbf{u}}^4$ . И сперва вихревая компонента поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  генерирует вихревую компоненту поля  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  прямым линейным механизмом без участия адвекции, а уже затем вихревая компонента поля  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  генерирует дивергентную компоненту поля  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  через механизм адвекции. Следовательно, наличие оседания примеси приводит к уменьшению коэффициента диффузии  $D_\rho(\mathbf{v})$ , т. е. к увеличению времени кластеризации.

В заключение данной главы приведем некоторые общие выводы, вытекающие из предыдущего рассмотрения.

- Статистические характеристики решения задачи о диффузии пассивной примеси в случайных дивергентных полях скоростей могут иметь мало общего с поведением отдельных реализаций. Для таких задач традиционный подход, основанный на моментном описании, неинформативен. Для этих задач необходимо иметь статистическое описание на уровне плотностей вероятностей (как минимум одновременной или одноточечной).
- В задачах о диффузии пассивной примеси в случайных дивергентных полях скоростей существуют, однако, когерентные статистические физические явления, осуществляющиеся с вероятностью единица (кластеризация частиц и поля консервативной примеси в дивергентном поле скоростей). Это означает, что данное явление осуществляется почти во всех реализациях случайного поля плотности.
- Сами когерентные явления практически не зависят от модели флуктуирующих параметров динамической системы и в простейшем случае их временная динамика может быть описана в рамках одновременных и одноточечных распределений вероятностей с помощью методов статистической топографии. При этом, конечно, конкретные параметры, характеризующие это явление (например, характерные времена образования кластерных структур и их пространственные характерные масштабы) могут существенно зависеть от моделей.



- Подходу, основанному на традиционном методе анализа устойчивости динамических систем по Ляпунову с помощью анализа ляпуновских характеристических показателей, по-прежнему, уделяется большое внимание многими исследователями. В приложении к стохастическим динамическим системам, и в частности в задачах диффузии пассивной примеси, при таком подходе вычисляются характеристические показатели, которые после этого усредняются по ансамблю реализаций случайных параметров. Такие средние величины совпадают с кривой типичной реализации для логнормального закона положительных нестационарных во времени характеристик решений стохастических динамических систем. Это естественно, так как, по сути дела, оба метода основаны на линеаризации исходной динамической системы. Отличие состоит только в том, что при вычислении кривой типичной реализации мы сразу пользуемся такими свойствами случайных параметров, как стационарность во времени и однородность и изотропность в пространстве. Кроме того, практически всегда удается провести анализ в рамках приближения дельта-коррелированности во времени флуктуирующих параметров, т. е. на основе уравнения Фоккера–Планка, что позволяет избежать громоздкости и значительно упростить процедуру вычислений.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ДЛЯ ОПИСАНИЯ КОГЕРЕНТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

## Приложение А

### НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Остановимся теперь кратко на математическом аппарате, позволяющем описать когерентные процессы в стохастических динамических системах. Для более полной информации см. монографии [8, 9, 11]. Прежде всего обсудим общие свойства динамических систем, описываемых дифференциальными (обыкновенными или в частных производных) или интегральными уравнениями, решения которых является функционалом случайных параметров.

#### А.1. Вариационные (функциональные) производные

Напомним общее определение функционала. Мы говорим, что задан некоторый функционал, если установлено правило, по которому каждой функции из некоторой совокупности сопоставлено число. Примеры функционалов:

$$\text{а) } F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} d\tau a(\tau)\varphi(\tau),$$

где  $a(t)$  — заданная (фиксированная) функция, а пределы  $t_1, t_2$  могут быть как конечными, так и бесконечными. Это — линейный функционал.

$$\text{б) } F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2)\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2),$$

где  $B(t_1, t_2)$  — фиксированная заданная функция. Это — квадратичный функционал.

$$\text{в) } F[\varphi(\tau)] = f(\Phi[\varphi(\tau)]),$$

где  $f(x)$  — заданная функция, а величина  $\Phi[\varphi(\tau)]$  сама является функционалом.

Оценим разность значений одного и того же функционала (см. рис. А.1), взятого для двух функций  $\varphi(\tau)$  и  $\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)$ ,  $\delta\varphi(\tau) \neq 0$  при

$$t - \frac{1}{2}\Delta t < \tau < t + \frac{1}{2}\Delta t$$

Вариацией функционала называется линейная по  $\delta\varphi(\tau)$  часть разности

$$\delta F[\varphi(\tau)] = \{F[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] - F[\varphi(\tau)]\}.$$

*Вариационной (или функциональной) производной* называется предел (см., например, [27])

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\int d\tau \delta\varphi(\tau)}. \quad (\text{А.1})$$

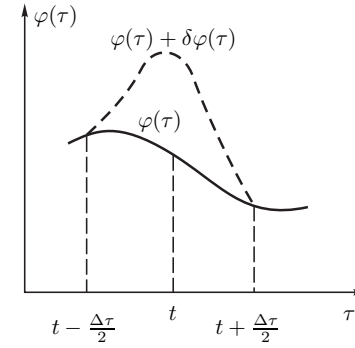


Рис. А.1. К определению вариационной производной

С целью сокращения записи вместо обозначения  $\delta F[\varphi(\tau)]/\delta\varphi(t)dt$  будем использовать  $\delta F[\varphi(\tau)]/\delta\varphi(t)$ .

Отметим, что если в (А.1) взять в качестве функции  $\delta\varphi(\tau) = \alpha\delta(\tau)$ , где  $\delta(\tau)$  — обычная дельта-функция Дирака, то формулу (А.1) можно записать в виде, имеющем вид обычной производной:

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d}{d\alpha} F[\varphi(\tau) + \alpha\delta(\tau - t)].$$

Вариационная производная от функционала  $F[\varphi(\tau)]$  является снова функционалом от  $\varphi(\tau)$ , зависящим еще от точки  $t$  как от параметра. Следовательно, эта вариационная производная будет иметь производные двойкого типа: ее можно дифференцировать обычным образом по параметру  $t$ , а можно также составить ее вариационную производную по  $\varphi(\tau)$  в точке  $\tau = t'$ , являющуюся второй вариационной производной от исходного функционала:

$$\frac{\delta^2 F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t')\delta\varphi(t)} = \frac{\delta}{\delta\varphi(t')} \left[ \frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} \right].$$

Вторая вариационная производная будет уже функционалом от  $\varphi(\tau)$ , зависящим от пары точек  $t, t'$ , и т. д.

Найдем вариационные производные от функционалов (а), (б) и (в).

В случае (а) имеем

$$\delta F[\varphi(\tau)] = F[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] - F[\varphi(\tau)] = \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} d\tau a(\tau)\delta\varphi(\tau).$$

Если функция  $a(t)$  непрерывна на отрезке  $\Delta t$ , то по теореме о среднем

$$\delta F[\varphi(\tau)] = a(t') \int_{\Delta t} d\tau \delta\varphi(\tau),$$

где точка  $t'$  принадлежит отрезку  $[t - \Delta t/2, t + \Delta t/2]$ , так что

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a(t') = a(t). \quad (\text{А.2})$$

Аналогично, в случае **(б)** получаем

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t)} = \int_{t_1}^{t_2} d\tau [B(\tau, t) + B(t, \tau)] \varphi(\tau) \quad (t_1 < t < t_2).$$

Отметим, что здесь функцию  $B(\tau_1, \tau_2)$  всегда можно считать симметричной функцией своих аргументов.

В случае **(в)** имеем

$$\begin{aligned} F[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] &= f(\Phi[\varphi(\tau)]) + \frac{\partial}{\partial \Phi}(\Phi[\varphi(\tau)]) \delta\Phi \delta\Phi[\varphi(\tau)] + \dots = \\ &= F[\varphi(\tau)] + \frac{\partial f(\Phi[\varphi(\tau)])}{\partial \Phi} \delta\Phi[\varphi(\tau)] + \dots \end{aligned}$$

и, следовательно, получаем

$$\frac{\delta}{\delta \varphi(t)} f(\Phi[\varphi(\tau)]) = \frac{\partial f(\Phi[\varphi(\tau)])}{\partial \Phi} \frac{\delta}{\delta \varphi}(t) \Phi[\varphi(\tau)]. \quad (\text{A.3})$$

Рассмотрим теперь функционал  $\Phi[\varphi(\tau)] = F_1[\varphi(\tau)]F_2[\varphi(\tau)]$ . Для него имеем

$$\begin{aligned} \delta\Phi[\varphi(\tau)] &= \{F_1[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)]F_2[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] - F_1[\varphi(\tau)]F_2[\varphi(\tau)]\} = \\ &= F_1[\varphi(\tau)]\delta F_2[\varphi(\tau)] + F_2[\varphi(\tau)]\delta F_1[\varphi(\tau)], \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta \varphi(t)} F_1[\varphi(\tau)]F_2[\varphi(\tau)] = F_1[\varphi(\tau)] \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} F_2[\varphi(\tau)] + F_2[\varphi(\tau)] \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} F_1[\varphi(\tau)]. \quad (\text{A.4})$$

Можно формально определить и выражение для вариационной производной функционала  $\varphi(\tau_0)$  по функции  $\varphi(t)$  соотношением

$$\frac{\delta \varphi(\tau_0)}{\delta \varphi(t)} = \delta(\tau_0 - t). \quad (\text{A.5})$$

Формулу (A.5) можно обосновать, например, рассматривая линейный функционал вида

$$F[\varphi(\tau)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \varphi(\tau) \exp\left\{-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (\text{A.6})$$

Для него, согласно (A.2), вариационная производная имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta \varphi(t)} F[\varphi(\tau)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(t - \tau_0)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (\text{A.7})$$

Переходя теперь формально к пределу при  $\sigma \rightarrow 0$  в выражениях (A.6) и (A.7), мы и получаем формулу (A.5). И при этом

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t)} = \frac{\partial F[\varphi(\tau)]}{\partial \varphi(\tau)} \frac{\delta \varphi(\tau)}{\delta \varphi(t)} = \frac{\partial F[\varphi(\tau)]}{\partial \varphi(\tau)} \delta(\tau - t).$$

С помощью формулы (A.5) очень удобно производить функциональное дифференцирование функционалов, явно зависящих от  $\varphi(\tau)$ . Так для квадратичного функционала **(б)** имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) \varphi(\tau_1) \varphi(\tau_2) &\stackrel{(\text{A.4})}{=} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) \left[ \frac{\delta \varphi(\tau_1)}{\delta \varphi(t)} \varphi(\tau_2) + \varphi(\tau_1) \frac{\delta \varphi(\tau_2)}{\delta \varphi(t)} \right] \stackrel{(\text{A.5})}{=} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d\tau [B(t, \tau) + B(\tau, t)] \varphi(\tau) \quad (t_1 < t < t_2). \end{aligned}$$

В качестве другого примера рассмотрим функционал

$$F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} d\tau L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right).$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} F[\varphi(\tau)] &\stackrel{(\text{A.3})}{=} \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left[ \frac{\partial L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)}{\partial \varphi(\tau)} + \frac{\partial L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)}{\partial \dot{\varphi}(\tau)} \frac{d}{d\tau} \right] \frac{\delta \varphi(\tau)}{\delta \varphi(t)} \stackrel{(\text{A.5})}{=} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left[ \frac{\partial L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)}{\partial \varphi(\tau)} + \frac{\partial L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)}{\partial \dot{\varphi}(\tau)} \frac{d}{d\tau} \right] \delta(\tau - t) = \\ &= \left( -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}(t)} + \frac{\partial}{\partial \varphi(t)} \right) L\left(t, \varphi(t), \frac{d\varphi(t)}{dt}\right), \end{aligned}$$

где  $\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t)$ , если точка  $t$  принадлежит интервалу  $(t_1, t_2)$ .

Подобно тому как функция может быть разложена в ряд Тейлора, функционал  $F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)]$  можно разложить в функциональный ряд Тейлора по функции  $\eta(\tau)$  в окрестности  $\eta(\tau) \sim 0$ :

$$\begin{aligned} F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)] &= F[\varphi(\tau)] + \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t)} \eta(t) + \\ &+ \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \frac{\delta^2 F[\varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t_1) \delta \varphi(t_2)} \eta(t_1) \eta(t_2) + \dots \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

Отметим, что операторное выражение типа

$$\begin{aligned} 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} + \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \eta(t_1) \eta(t_2) \frac{\delta^2}{\delta \varphi(t_1) \delta \varphi(t_2)} + \dots = \\ = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} + \frac{1}{2!} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} \right]^2 + \dots \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

можно сокращенно записать в виде оператора

$$\exp\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} \right\}, \quad (\text{A.10})$$

действие которого надо понимать именно в смысле разложения (А.9). С помощью этого оператора формулу (А.8) можно переписать в виде

$$F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)] = \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} \right\} F[\varphi(\tau)], \quad (\text{А.11})$$

что позволяет нам интерпретировать оператор (А.10) как оператор функционального сдвига.

Рассмотрим теперь функционал  $F[t; \varphi(\tau)]$ , зависящий от параметра  $t$ . Этот функционал можно дифференцировать по  $t$ , а также найти его вариационную производную по  $\varphi(t')$ . Легко видеть, что эти операции перестановочны, т. е. имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta F[t; \varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t')} = \frac{\delta}{\delta \varphi(t')} \frac{\partial F[t; \varphi(\tau)]}{\partial t}. \quad (\text{А.12})$$

Если область изменения  $\tau$  не зависит от  $t$ , то равенство (А.12) очевидно. В противном случае, например для функционалов  $F[t; \varphi(\tau)]$ , у которых  $0 \leq \tau \leq t$ , равенство (А.12) проверяется путем разложения функционала  $F[t; \varphi(\tau)]$  в функциональный ряд Тейлора.

В качестве конкретного примера применения описанного формализма, рассмотрим простейшую задачу, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0. \quad (\text{А.13})$$

## А.2. Принцип динамической причинности

Для многих прикладных задач, связанных с изучением статистических характеристик их решений, требуется знание зависимости решений этих задач от коэффициентов уравнения (вообще говоря, функциональной). Эти зависимость обладает некоторыми общими свойствами. Проиллюстрируем их на примере простейшей задачи — системы обыкновенных дифференциальных уравнений (А.13), которую можно переписать в виде нелинейного интегрального уравнения

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t d\tau \mathbf{U}(\mathbf{r}(\tau), \tau). \quad (\text{А.14})$$

Решение уравнения (А.14) зависит параметрически от начальных условий  $\mathbf{r}_0, t_0$  и функционально от векторного поля  $\mathbf{U}(\mathbf{r}', \tau)$ .

Проварьируем уравнение (А.14) по полю  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ . Считая, что начальное условие  $\mathbf{r}_0$  не зависит от поля  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ , с помощью равенства (А.5), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\delta U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r}(\tau) - \mathbf{r}') \delta(\tau - t'),$$

получаем линейное уравнение для вариационной производной:

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')) \theta(t' - t_0) \theta(t - t') + \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(\tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')}, \quad (\text{А.15})$$

где  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  — дельта функция Дирака, а

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases}$$

— ступенчатая функция Хевисайда. Из уравнения (А.15) следует, что

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = 0, \quad \text{если } t' > t \text{ или } t' < t_0, \quad (\text{А.16})$$

т. е. решение  $\mathbf{r}(t)$  динамической задачи (А.14), если рассматривать его как функционал поля  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$ , зависит только от значений  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$  при  $t_0 < t' < t$ . Следовательно, функция  $\mathbf{r}(t)$  не меняется, если поле  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$  изменяется вне интервала  $(t_0, t')$ , т. е. для  $t' < t_0$  или  $t' > t$ . Условие (А.16) будем называть *условием динамической причинности*.

Принимая это условие во внимание, уравнение (А.15) можно переписать в виде (при  $t_0 < t' < t$ )

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')) + \int_{t'}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(\tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')}, \quad (\text{А.17})$$

и, следовательно, переходя к пределу  $t \rightarrow t' + 0$ , получаем равенство

$$\left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t=t'+0} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')), \quad (\text{А.18})$$

или же в пределе  $t' \rightarrow t - 0$

$$\left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t'=t-0} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \quad (\text{А.19})$$

Интегральное уравнение (А.17) для вариационной производной, очевидно, эквивалентно линейному дифференциальному уравнению с начальным условием

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right) = \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(t), t)}{\partial r_k} \left( \frac{\delta r_k(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right), \quad (\text{А.20})$$

$$\left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t=t'} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')).$$

Условие динамической причинности является общим свойством задач, описываемых дифференциальными уравнениями с начальными условиями.

## А.3. Уравнение Лиувилля

Современный аппарат теории случайных процессов позволяет построить замкнутое описание динамических систем, если эти системы удовлетворяют условию динамической причинности и описываются линейными дифференциальными уравнениями

в частных производных или интегральными уравнениями определенного типа. Переход от описания исходной, вообще говоря нелинейной, системы к эквивалентному описанию с помощью линейных уравнений в частных производных можно осуществить с помощью индикаторных функций. Однако размерность пространства переменных при этом увеличивается. Рассмотрим такой переход на примере уравнения (А.13).

Пусть стохастическая задача описывается системой уравнений (А.13):

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0. \quad (\text{А.21})$$

Введем скалярную функцию в пространстве  $(\mathbf{r}, t)$ :

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}), \quad (\text{А.22})$$

обычно называемую *индикаторной функцией*, сосредоточенную на сечении случайного процесса  $\mathbf{r}(t)$  заданной плоскостью  $\mathbf{r}(t) = \text{const}$ .

Дифференцируя (А.22) по времени  $t$  с помощью уравнения (А.21), получаем равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) = -\mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} [\mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t) \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r})]. \end{aligned}$$

Используя далее «выкалывающее» свойство дельта-функции

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t) \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}),$$

получаем линейное уравнение в частных производных

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \varphi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \varphi(\mathbf{r}, t_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (\text{А.23})$$

которое эквивалентно исходной системе и называется *уравнением Лиувилля*. Это уравнение соответствует уравнению непрерывности для движения фазовых точек в фазовом пространстве  $\{\mathbf{r}, t\}$ .

### Замечание А.1. Особенность работы с дельта-функцией

Из изложенного метода вывода уравнения Лиувилля очевидно, что необходимо видеть различие между функцией  $\mathbf{r}(t)$  и параметром  $\mathbf{r}$ . В связи с этим для правильной работы с дельта-функцией необходимо выписывать аргумент функции  $\mathbf{r}(t)$  во всех промежуточных выкладках (ср. запись уравнений (А.21) и (А.13)). Пренебрежение этим правилом приводит, как правило, к ошибке. ♦

Переход от системы (А.21) к уравнению Лиувилля (А.23) сопровождается расширением фазового пространства  $(\mathbf{r}, t)$ , которое, однако, имеет конечную размерность.

Уравнение (А.23) можно переписать в виде линейного интегрального уравнения:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \{ \mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau) \varphi(\mathbf{r}, \tau) \},$$

вариация которого по функции  $U_i(\mathbf{r}', t')$  с использованием формулы (А.5) приводит к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} &= - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial r_i} \left\{ \frac{\delta U_i(\mathbf{r}, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \varphi(\mathbf{r}, \tau) \right\} - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau) \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right\} = \\ &= -\theta(t-t')\theta(t'-t_0) \frac{\partial}{\partial r_j} \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}, t') \} - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau) \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right\}, \quad (\text{А.24}) \end{aligned}$$

где, как и ранее,  $\theta(t)$  — ступенчатая функция Хевисайда. Следовательно,

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \sim \theta(t-t')\theta(t'-t_0),$$

и вариационная производная удовлетворяет условию

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = 0, \quad \text{если } t' < t_0 \text{ или } t' > t,$$

которое выражает условие динамической причинности для уравнения Лиувилля (А.23).

При условии  $t_0 < t' < t$  уравнение (А.24) можно записать в виде

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = -\frac{\partial}{\partial r_j} \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}, t') \} - \int_{t'}^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau) \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right\}, \quad (\text{А.25})$$

откуда получаем равенство

$$\left. \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right|_{t=t'+0} = -\frac{\partial}{\partial r_i} \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}, t') \}. \quad (\text{А.26})$$

Отметим, что равенство (А.26) можно получить и непосредственно из выражения (А.18). В самом деле, вариационная производная  $\delta\varphi(\mathbf{r}, t)/\delta U_j(\mathbf{r}', t')$ , в силу определения функции  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ,

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = \frac{\delta}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial r_i} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')}, \quad (\text{А.27})$$

и, следовательно, при  $t = t' + 0$  имеем равенство

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right|_{t=t'+0} &= -\frac{\partial}{\partial r_i} \delta(\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}) \left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right|_{t=t'+0} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial r_j} \{ \delta(\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \} = -\frac{\partial}{\partial r_j} \{ \varphi(\mathbf{r}, t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \}. \quad (\text{А.28}) \end{aligned}$$

## Приложение Б

### СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ

#### Б.1. Общие замечания

Если мы имеем случайную функцию  $z(t)$  (случайный процесс), то все ее статистические характеристики в фиксированный момент времени  $t$  описываются одновременной плотностью вероятностей

$$P(z, t) = \langle \delta(z(t) - z) \rangle, \quad (\text{Б.1})$$

параметрически зависящей от времени, с помощью равенства

$$\langle f(z(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) P(z, t).$$

В формуле Б.1 через скобки  $\langle \dots \rangle$  обозначена операция усреднения по ансамблю случайного процесса  $z(t)$ .

Интегральная функция распределения для этого процесса, определяющая вероятность того, что в момент времени  $t$  процесс  $z(t) < Z$ , вычисляется по формуле

$$F(t, Z) = P(z(t) < Z) = \int_{-\infty}^Z dz P(z, t),$$

и, следовательно,

$$F(t, Z) = \langle \theta(Z - z(t)) \rangle, \quad F(t, \infty) = 1, \quad (\text{Б.2})$$

где  $\theta(z)$  — функция Хевисайда, равная нулю при  $z < 0$  и единице при  $z > 0$ .

Отметим, что сингулярная дельта-функция Дирака, стоящая под знаком усреднения в (Б.1):

$$\varphi(z, t) = \delta(z(t) - z),$$

называется *индикаторной функцией*.

Для полного статистического описания случайной функции  $z(t)$  достаточно знать ее характеристический функционал

$$\Phi[v(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau v(\tau) z(\tau) \right\} \right\rangle,$$

где функция  $v(t)$  — произвольная (достаточно «хорошая») функция. Зная функционал  $\Phi[v(\tau)]$ , можно найти такие характеристики случайной функции  $z(t)$ , как ее среднее значение  $\langle z(t) \rangle$ , корреляционную функцию  $\langle z(t_1) z(t_2) \rangle$ ,  $n$ -точечную моментную функцию  $\langle z(t_1) \dots z(t_n) \rangle$  и т. д.

В самом деле, раскладывая характеристический функционал  $\Phi[v(\tau)]$  в функциональный ряд Тейлора, получаем для него выражение через моментные функции процесса  $z(t)$ :

$$\Phi[v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n M_n(t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n),$$

$$M_n(t_1, \dots, t_n) = \langle z(t_1) \dots z(t_n) \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(t_1) \dots \delta v(t_n)} \Phi[v(\tau)] \Big|_{v=0}.$$

Таким образом, моментные функции случайного процесса  $z(t)$  определяются через вариационные производные характеристического функционала. Вариационные производные и правила работы с ними определены в Приложении А.

Представим теперь  $\Phi[v(\tau)]$  в виде  $\Phi[v(\tau)] = \exp\{\Theta[v(\tau)]\}$ . Функционал  $\Theta[v(\tau)]$  также можно разложить в функциональный ряд Тейлора:

$$\Theta[v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_n(t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n), \quad (\text{Б.3})$$

где функция

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(t_1) \dots \delta v(t_n)} \Theta[v(\tau)] \Big|_{v=0}$$

называется *кумулянтной функцией*  $n$ -го порядка случайного процесса  $z(t)$ .

Аналогичным образом определяется и характеристический функционал случайного скалярного поля  $f(\mathbf{x}, t)$ :

$$\Phi[v(\mathbf{x}', \tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} dt v(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) \right\} \right\rangle = \exp \{ \Theta[v(\mathbf{x}', \tau)] \},$$

а также моментные и кумулянтные функции  $n$ -го порядка:

$$M_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \delta v(\mathbf{x}_n, t_n)} \Phi[v(\mathbf{x}', \tau)] \Big|_{v=0},$$

$$K_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \delta v(\mathbf{x}_n, t_n)} \Theta[v(\mathbf{x}', \tau)] \Big|_{v=0}.$$

Если  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  — векторное случайное поле, то следует считать  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  векторной функцией.

#### Б.2. Расщепление корреляций для гауссовых случайных процессов и полей (формула Фурутцу–Новикова)

Ограничимся для простоты одномерными случайными процессами (обобщения на многомерные случаи не вызывают затруднений). При статистическом анализе динамических систем необходимо уметь вычислять корреляцию  $\langle z(t) R[z(\tau)] \rangle$ , где  $R[z(\tau)]$  — функционал, который может зависеть от процесса  $z(t)$  как явным, так и неявным образом.

Для вычисления этого среднего значения рассмотрим вспомогательный функционал  $R[z(\tau) + \eta(\tau)]$ , где  $\eta(t)$  — произвольная детерминированная функция, и вычислим величину  $\langle z(t)R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle$ . Интересующую нас корреляцию получим, положив в окончательном результате  $\eta(\tau) = 0$ .

Функционал  $R[z(\tau) + \eta(\tau)]$  можно разложить в функциональный ряд Тейлора по  $z(\tau)$  и представить его в виде

$$R[z(\tau) + \eta(\tau)] = e^{-\int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau)}} R[\eta(\tau)],$$

вводя оператор функционального сдвига. Тогда для корреляции  $\langle z(t)R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle$  получаем выражение:

$$\langle z(t)R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \Omega \left[ t; \frac{\delta}{i\delta \eta(\tau)} \right] \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle,$$

где функционал  $\Omega[t; v(\tau)]$  определяется в виде

$$\Omega[t; v(\tau)] = \frac{\left\langle z(t) \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle}{\left\langle \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle} = \frac{1}{\Phi[v(\tau)]} \frac{\delta}{i\delta v(t)} \Phi[v(\tau)] \equiv \frac{\delta}{i\delta v(t)} \Theta[v(\tau)],$$
(Б.4)

где  $\Theta[v(\tau)] = \ln \Phi[v(\tau)]$ , а  $\Phi[v(\tau)]$  — характеристический функционал случайного процесса  $z(t)$ .

Учитывая, что вариационное дифференцирование по  $\eta(\tau)$  можно заменить дифференцированием по  $z(\tau)$  и положить затем  $\eta(\tau) = 0$ , получаем для интересующей нас корреляции окончательное выражение

$$\langle z(t)R[z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[ t; \frac{\delta}{i\delta z(\tau)} \right] R[z(\tau)] \right\rangle. \quad (Б.5)$$

Если воспользоваться разложением функционала  $\Theta[v(\tau)]$  в функциональный ряд Тейлора (В.18), то функционал

$$\Omega[t; v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_{n+1}(t, t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n)$$

и, следовательно, выражение (Б.5) принимает вид

$$\langle z(t)R[z(\tau)] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_{n+1}(t, t_1, \dots, t_n) \left\langle \frac{\delta^n R[z(\tau)]}{\delta z(t_1) \dots \delta z(t_n)} \right\rangle. \quad (Б.6)$$

В физических задачах, удовлетворяющих условию динамической причинности по времени  $t$ , статистические характеристики решения в момент времени  $t$  определяются статистическими характеристиками случайного процесса  $z(\tau)$  при  $0 \leq \tau \leq t$ , которые полностью описываются характеристическим функционалом

$$\Phi[t; v(\tau)] = e^{\Theta[t; v(\tau)]} = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle.$$

В этом случае все полученные выше формулы остаются в силе для вычисления статистических средних  $\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle$  при  $t' < t$ ,  $\tau \leq t$ , т. е. имеет место равенство

$$\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[ t'; t; \frac{\delta}{i\delta z(\tau)} \right] R[t; z(\tau)] \right\rangle \quad (0 < t' < t), \quad (Б.7)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega[t'; t; v(\tau)] &= \frac{\delta}{i\delta v(t')} \Theta[t; v(\tau)] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_n K_{n+1}(t', t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n). \end{aligned} \quad (Б.8)$$

В случае, когда  $t' = t - 0$ , формула в (Б.7) по-прежнему имеет место, т. е.

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[ t; t; \frac{\delta}{i\delta z(\tau)} \right] R[t; z(\tau)] \right\rangle. \quad (Б.9)$$

Однако разложение (Б.8) не всегда дает правильный предельный переход при  $t' \rightarrow t - 0$  (т. е. операции предельного перехода и разложения в функциональный ряд Тейлора могут быть и не перестановочны). В этом случае

$$\Omega[t; t; v(\tau)] = \frac{1}{\Phi[t; v(\tau)]} \frac{d}{idv(t)} \Phi[t; v(\tau)] = \frac{d}{idv(t)} \Theta[t; v(\tau)] \quad (Б.10)$$

и статистические средние в (Б.7) и (Б.9) могут быть разрывны при  $t' = t - 0$ .

Для гауссового случайного процесса  $z(t)$  все формулы, полученные выше, существенно упрощаются. В этом случае логарифм характеристического функционала  $\Phi[v(\tau)]$  имеет вид (среднее значение процесса  $z(t)$  считаем равным нулю) (В.7) и, следовательно, функционал  $\Omega[t; v(\tau)]$  (Б.4) принимает вид линейного функционала

$$\Omega[t; v(\tau)] = i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(t, \tau_1) v(\tau_1), \quad (Б.11)$$

а формула (Б.5) принимает вид

$$\langle z(t)R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(t, \tau_1) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau_1)} \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle. \quad (Б.12)$$

Заменяя теперь дифференцирование по  $\eta(\tau)$  на дифференцирование по  $z(\tau)$  и полагая  $\eta(\tau) = 0$ , получаем равенство

$$\langle z(t)R[z(\tau)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(t, \tau_1) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(\tau_1)} R[z(\tau)] \right\rangle, \quad (Б.13)$$

которое в физической литературе принято называть *формулой Фурутцу-Новикова* по имени авторов, впервые ее получивших [28, 47].

Легко написать и многомерное обобщение формулы (Б.13), которое можно записать в виде

$$\langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}) R[\mathbf{z}] \rangle = \int d\mathbf{r}' \langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}) z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}') \rangle \left\langle \frac{\delta R[\mathbf{z}]}{\delta z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}')} \right\rangle, \quad (Б.14)$$

где через  $\mathbf{r}$  обозначены все непрерывные аргументы случайного поля векторного поля  $\mathbf{z}(\mathbf{r})$ , а через  $i_1, \dots, i_n$  — индексные аргументы. По повторяющимся индексным аргументам в правой части (Б.14) предполагается суммирование.

Если случайный процесс  $z(\tau)$  определен только на отрезке времени  $[0, t]$ , то функционал  $\Theta[t, v(\tau)]$  будет определяться выражением

$$\Theta[t, v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2), \quad (\text{Б.15})$$

а функционалы  $\Omega[t', t; v(\tau)]$ ,  $\Omega[t, t; v(\tau)]$  будут линейными функционалами:

$$\begin{aligned} \Omega[t', t; v(\tau)] &= \frac{\delta}{i\delta v(t')} \Theta[t, v(\tau)] = i \int_0^t d\tau B(t', \tau) v(\tau), \\ \Omega[t, t; v(\tau)] &= \frac{d}{iv(t)dt} \Theta[t, v(\tau)] = i \int_0^t d\tau B(t, \tau) v(\tau), \end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

и, следовательно, формулы (Б.7), (Б.9) будут иметь вид

$$\langle z(t') R[t, z(\tau)] \rangle = \int_0^t d\tau B(t', \tau) \left\langle \frac{\delta R[z(\tau)]}{\delta z(\tau)} \right\rangle \quad (t' \leq t), \quad (\text{Б.17})$$

совпадающий с равенством (Б.13) при выполнении условия

$$\frac{\delta R[t; z(\tau)]}{\delta z(\tau)} = 0 \quad \text{при} \quad \tau < 0, \quad \tau > t. \quad (\text{Б.18})$$

Соответствующее обобщение многомерной формулы (Б.14) на случай причинного во времени функционала  $R[t; \mathbf{z}(\tilde{\mathbf{r}}, \tau)]$  имеет вид

$$\langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}, t) R[t; \mathbf{z}(\tilde{\mathbf{r}}, \tau)] \rangle = \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' \langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}, t) z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}', t') \rangle \left\langle \frac{\delta R[t; \mathbf{z}(\tilde{\mathbf{r}}, \tau)]}{\delta z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}', t')} \right\rangle. \quad (\text{Б.19})$$

## Приложение В

### СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТОПОГРАФИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ

Полное описание случайных процессов и полей, содержится в их характеристических функционалах. Однако даже знание одноточечных плотностей вероятностей случайных процессов и полей дает определенную информацию об эволюции случайных процессов во всем интервале времен и структуре случайных полей в пространстве. Эту информацию можно получить на основе идей статистической топографии случайных процессов и полей.

#### В.1. Случайные процессы

Прежде всего обсудим понятие типичной реализации случайного процесса  $z(t)$ , которое характеризует основные особенности поведения отдельной реализации процесса в целом на всем интервале времен.

##### В.1.1. Типичная реализация случайного процесса

Назовем кривой типичной реализации случайного процесса  $z(t)$  детерминированную кривую  $z^*(t)$ , которая является *медианой интегральной функции распределения* (Б.2) и определяется как решение алгебраического уравнения

$$F(t, z^*(t)) = \int_{-\infty}^{z^*(t)} dz P(z, t) = \frac{1}{2}. \quad (\text{В.1})$$

Основанием для этого является свойство медианы, заключающееся в том, что для любого интервала времени  $(t_1, t_2)$  случайный процесс  $z(t)$  как-бы «обвивает» кривую  $z^*(t)$  таким образом, что среднее время, в течение которого выполняется неравенство  $z(t) > z^*(t)$ , совпадает со средним временем в течение которого выполняется обратное

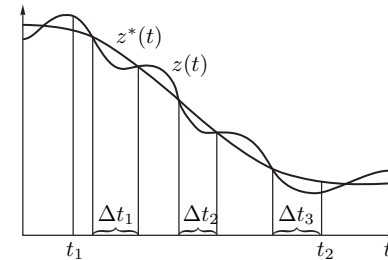


Рис. В.1. К определению кривой типичной реализации случайного процесса



неравенство  $z(t) < z^*(t)$  (рис. В.1), т. е.

$$\langle T_{z(t) > z^*(t)} \rangle = \langle T_{z(t) < z^*(t)} \rangle = \frac{1}{2}(t_2 - t_1). \quad (\text{В.2})$$

В самом деле, интегрируя равенство (В.1) по времени в интервале  $(t_1, t_2)$ , получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt F(t, z^*(t)) = \frac{1}{2}(t_2 - t_1). \quad (\text{В.3})$$

С другой стороны, в силу определения интегральной функции распределения (Б.2), интеграл в левой части (В.3) равен

$$\int_{t_1}^{t_2} dt F(t, z^*(t)) = \langle T(t_1, t_2) \rangle, \quad (\text{В.4})$$

где  $T(t_1, t_2) = \sum_1^N \Delta t_k$  — общее время из интервала  $(t_1, t_2)$ , в течение которого реализация процесса  $z(t)$  лежит выше кривой  $z^*(t)$ . Сопоставляя (В.3) с (В.4), и получаем равенство (В.2).

Кривая  $z^*(t)$  может, естественно, существенно отличаться от любой конкретной реализации процесса  $z(t)$  и не описывает величину возможных выбросов. Таким образом, кривая типичной реализации  $z^*(t)$  случайного процесса  $z(t)$ , полученная с помощью одновременной плотности вероятностей, определена тем не менее на всем интервале времени  $t \in (0, \infty)$ .

Для конкретных типов случайных процессов можно получить дополнительную информацию, характеризующую уже выбросы относительно этой кривой.

### В.1.2. Статистика числа точек пересечения процесса с прямой

Одноточечная плотность вероятностей (Б.1) для случайного процесса  $z(t)$  является результатом усреднения сингулярной индикаторной функции по ансамблю реализаций случайного процесса  $z(t)$ . Эта функция сосредоточена на точках пересечения процесса  $z(t)$  прямой  $z = \text{const}$ , определяемых как корни алгебраического уравнения

$$z(t_n) = z \quad (n = 0, 1, \dots, \infty),$$

и, следовательно, ее можно переписать в виде

$$\varphi(z, t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{|p(t_k)|} \delta(t - t_k),$$

где  $p(t) = \frac{d}{dt}z(t)$ .

Число таких точек само является случайной величиной, которая, очевидно, описывается формулой

$$n(t, z) = \int_{-\infty}^t d\tau |p(\tau)| \varphi(\tau; z). \quad (\text{В.5})$$

Следовательно, среднее значение числа точек пересечения процесса  $z(t)$  прямой  $z = \text{const}$  описывается корреляцией временной производной процесса  $z(t)$  с ее индикаторной функцией или совместной одновременной плотностью вероятностей процесса  $z(t)$  и ее временной производной  $\frac{d}{dt}z(t)$ .

Аналогичным образом легко определить и некоторые элементы статистики, связанной с точками максимума (минимума) и т. п. случайного процесса  $z(t)$ .

Рассмотрим теперь несколько примеров случайных процессов.

### В.1.3. Простейшие примеры случайных процессов

#### Гауссов случайный процесс.

Прежде всего обсудим случай непрерывного процесса — гауссова случайного процесса  $z(t)$  со средним значением, равным нулю ( $\langle z(t) \rangle = 0$ ), и корреляционной функцией  $B(t_1, t_2) = \langle z(t_1)z(t_2) \rangle$ . Его характеристический функционал имеет вид

$$\Phi[v(\tau)] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 B(t_1, t_2) v(t_1) v(t_2) \right\}. \quad (\text{В.6})$$

Для этого процесса единственной отличной от нуля кумулянтной функцией является его корреляционная функция  $K_2(t_1, t_2) = B(t_1, t_2)$ , и, следовательно,

$$\Theta[v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 B(t_1, t_2) v(t_1) v(t_2). \quad (\text{В.7})$$

Отметим, что для гауссова процесса со средним значением, равным нулю, все моментные функции нечетного порядка равны нулю, а моментные функции четного порядка определяются суммой, в которой процессы  $z(t_i)z(t_k)$  усредняются попарно всевозможными способами.

Если функция  $v(\tau)$  в формуле (В.7) отлична от нуля только в интервале  $0 < \tau < t$ , то характеристический функционал

$$\Phi[t; v(\tau)] = \left\langle \exp \left( i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right) \right\rangle = \exp \left\{ -\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2) \right\} \quad (\text{В.8})$$

зависит также и от времени  $t$ , и в этом случае функционал  $\Phi[t; v(\tau)]$ , как функция параметра  $t$ , удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = -v(t) \int_0^t dt_1 B(t, t_1) v(t_1) \Phi[t; v(\tau)], \quad \Phi[0; v(\tau)] = 1. \quad (\text{В.9})$$

Чтобы получить одновременную характеристическую функцию в момент времени  $t$  для гауссова случайного процесса, положим в (В.6) функцию  $v(\tau)$  в виде

$$v(\tau) = v \delta(\tau - t).$$

В результате получаем

$$\Phi(v, t) = \left\langle e^{ivz(t)} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz P(z, t) e^{ivz} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2(t) v^2 \right\}, \quad (\text{В.10})$$

где  $\sigma^2(t) = B(t, t)$ . Одновременную плотность вероятностей гауссова случайного процесса получим, выполняя обратное преобразование Фурье от (В.10):

$$P(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \Phi(v, t) e^{-ivz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma^2(t)} \right\}. \quad (\text{В.11})$$

Отметим, что для стационарного во времени случайного процесса  $z(t)$  величина дисперсии  $\sigma^2(t)$  не зависит от времени  $t$ , т.е.  $\sigma^2(t) = \sigma^2 = \text{const}$ .

Функция  $P(z, t)$  симметрична по  $z$  относительно точки  $z = 0$ , т.е.

$$P(z, t) = P(-z, t). \quad (\text{B.12})$$

При наличии среднего значения для гауссова случайного процесса  $z(t) - \langle z(t) \rangle$  вместо (B.11) получаем выражение

$$P(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{(z - \langle z(t) \rangle)^2}{2\sigma^2(t)} \right\}, \quad (\text{B.13})$$

и кривая типичной реализации (B.1) для гауссова случайного процесса  $z(t)$ , в силу свойства симметрии (B.12), очевидно, совпадает со средним значением процесса  $z(t)$ , т.е.

$$z^*(t) = \langle z(t) \rangle, \quad (\text{B.14})$$

так как равенство (B.1)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_{-\infty}^{z^*(t)} dz \exp \left\{ -\frac{(z - \langle z(t) \rangle)^2}{2\sigma^2(t)} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_{-\infty}^{z^*(t) - \langle z(t) \rangle} dz \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma^2(t)} \right\} = \frac{1}{2}$$

выполняется при условии (B.14).

### Логарифмически нормальный случайный процесс.

Отметим, что для так называемого *логарифмически нормального (логнормального)* случайного процесса  $y(t)$ , логарифм которого является гауссовым случайным процессом

$$y(t) = e^{z(t)},$$

одновременная плотность вероятностей  $P(y, t)$  имеет вид

$$P(y, t) = \frac{1}{y} P(z = \ln y, t) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [e^{-z(t)} y]}{2\sigma^2(t)} \right\},$$

и, следовательно, интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{y^*(t)} dy P(y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_{-\infty}^{y^*(t)} \frac{dy}{y} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [e^{-z(t)} y]}{2\sigma^2(t)} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_{-\infty}^{\ln[e^{-z(t)} y^*(t)]} dz \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma^2(t)} \right\} \end{aligned}$$

равен 1/2 при условии, что  $e^{-z(t)} y^*(t) = 1$ , т.е. кривая типичной реализации для логнормального случайного процесса  $y(t)$  определяется равенством

$$y^*(t) = e^{z(t)} = e^{\langle \ln y(t) \rangle}. \quad (\text{B.15})$$

Отметим также, что если мы знаем поведение моментных функций случайного процесса  $y(t)$  во времени, т.е. функции  $\langle y^n(t) \rangle$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), то тем самым мы знаем и статистические характеристики случайного процесса  $z(t) = \ln y(t)$ . В самом деле,

$$\langle y^n(t) \rangle = \langle e^{n \ln y(t)} \rangle = \exp \left\{ n \langle \ln y(t) \rangle + \frac{n^2}{2} \sigma_{\ln y}^2(t) \right\},$$

и, следовательно,

$$\langle \ln y(t) \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \langle y^n(t) \rangle, \quad \sigma_{\ln y}^2(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} \ln \langle y^n(t) \rangle. \quad (\text{B.16})$$

## В.2. Случайные поля

В статистической топографии случайных полей основным объектом изучения, как и в обычной топографии горных массивов, является система контуров — линий уровня (в двумерном случае) или поверхностей (в трехмерном случае) постоянных значений, определяемых равенством  $f(\mathbf{r}, t) = f = \text{const}$ .

Для анализа системы контуров (для простоты в данном разделе, будем говорить о двумерном случае ( $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ )) удобно ввести сингулярную индикаторную функцию  $\varphi(t, \mathbf{R}; f) = \delta(f(\mathbf{R}, t) - f)$ , сосредоточенную на них.

Через эту функцию выражаются, например, такие величины как общая площадь областей, ограниченных линиями уровня, где  $f(\mathbf{R}, t) > f$

$$S(t; f) = \int \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) d\mathbf{R} = \int_f^\infty df' \int d\mathbf{R} \varphi(t, \mathbf{R}; f'),$$

и общая "масса" поля, заключенная в этих областях

$$M(t; f) = \int f(\mathbf{R}, t) \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) d\mathbf{R} = \int_f^\infty f' df' \int d\mathbf{R} \varphi(t, \mathbf{R}; f').$$

Среднее значение индикаторной функции по ансамблю реализаций определяет одновременную во времени и одноточечную в пространстве плотность вероятностей

$$P(t, \mathbf{R}; f) = \langle \varphi(t, \mathbf{R}; f) \rangle = \langle \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \rangle,$$

и, следовательно, средние по ансамблю реализаций значения всех выражений непосредственно определяются этой плотностью вероятностей.

Дополнительную информацию о детальной структуре поля  $f(\mathbf{R}, t)$  можно получить, включив в рассмотрение его пространственный градиент  $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) = \nabla f(\mathbf{R}, t)$ . Так, например, величина

$$l(t; f) = \int d\mathbf{R} |\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)| \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) = \oint dl \quad (\text{B.17})$$

описывает общую длину контуров [61–65] и является обобщением формулы (B.5) на случайные поля.

Подынтегральное выражение в (B.17) описывается расширенной индикаторной функцией

$$\varphi(t, \mathbf{R}; f, \mathbf{p}) = \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{p}), \quad (\text{B.18})$$

и среднее значение формулы (В.17) связано с совместной одновременной плотностью вероятностей полей  $f(\mathbf{R}, t)$  и его градиента  $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)$ , которая определяется путем усреднения индикаторной функции (В.18) по ансамблю реализаций, т.е. функцией

$$P(t, \mathbf{R}; f, \mathbf{p}) = \langle \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{p}) \rangle.$$

Включение в рассмотрение пространственных производных второго порядка позволяет оценить общее число контуров  $f(\mathbf{R}, t) = f = \text{const}$  с помощью приближенной (с точностью до незамкнутых линий) формулы [93]

$$N(t; f) = N_{\text{in}}(t; f) - N_{\text{out}}(t; f) = \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{R} \kappa(t, \mathbf{R}; f) |\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)| \delta(f(\mathbf{R}, t) - f),$$

где  $N_{\text{in}}(t; f)$ ,  $N_{\text{out}}(t; f)$  — число контуров, для которых вектор  $\mathbf{p}$  направлен по внутренней и внешней нормали, соответственно, а  $\kappa(t, \mathbf{R}; f)$  — кривизна линии уровня.

Отметим, что для пространственно однородного поля  $f(\mathbf{R}, t)$ , когда соответствующие одноточечные плотности вероятностей  $P(t, \mathbf{R}; f)$  и  $P(t, \mathbf{R}; f, \mathbf{p})$  не зависят от  $\mathbf{R}$ , статистические средние всех выражений (без интегрирования по  $\mathbf{R}$ ) будут описывать соответствующие удельные (приходящиеся на единицу площади) значения этих величин, если они, конечно, существуют. В этом случае случайное поле  $f(\mathbf{R}, t)$  является статистически эквивалентным случайному процессу, все статистические характеристики которого совпадают с одноточечными характеристиками поля  $f(\mathbf{R}, t)$ .

## Приложение Г

### ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЕЛЬТА-КОРРЕЛИРОВАННОГО ВО ВРЕМЕНИ ГАУССОВА СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

#### Г.1. Уравнение Фоккера–Планка

Пусть векторная функция  $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$  удовлетворяет динамическому уравнению

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (\text{Г.1})$$

где  $v_i(\mathbf{x}, t)$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) — детерминированные функции, а  $f_i(\mathbf{x}, t)$  — случайные функции ( $n + 1$ ) переменных, обладающие следующими свойствами:

- а)  $f_i(\mathbf{x}, t)$  — гауссово случайное поле в  $(n + 1)$ -мерном пространстве  $(\mathbf{x}, t)$ ;
- б)  $\langle f_i(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$ .

Будем для определенности считать, что  $t$  — временная координата, а  $\mathbf{x}$  — пространственная.

Статистические характеристики поля  $f_i(\mathbf{x}, t)$  полностью описываются заданием его корреляционного тензора

$$B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t') \rangle.$$

Так как уравнение (Г.1) является уравнением первого порядка с начальным условием, то для него выполняется условие динамической причинности

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} x_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad t' < t_0 \quad \text{и} \quad t' > t, \quad (\text{Г.2})$$

т.е. его решение  $\mathbf{x}(t)$  функционально зависит лишь от предшествующих по  $t$  значений  $f_j(\mathbf{x}, t')$  из интервала  $t_0 \leq t' \leq t$ . При этом для вариационной производной имеем равенство

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t - 0)} x_i(t) = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}'). \quad (\text{Г.3})$$

Однако может существовать статистическая связь между  $\mathbf{x}(t)$  и последующими значениями  $f_j(\mathbf{x}, t'')$ , где  $t'' > t$ , так как такие значения  $f_j(\mathbf{x}, t'')$  коррелированы со значениями  $f_j(\mathbf{x}, t')$  при  $t' \leq t$ . Ясно, что корреляция функции  $\mathbf{x}(t)$  с последующими значениями  $f_j(\mathbf{x}, t'')$  заметна лишь при  $t'' - t \leq \tau_0$ , где  $\tau_0$  — радиус корреляции поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  по переменной  $t$ .

Для достаточно большого класса реальных физических процессов характерный временной масштаб изменения функции  $\mathbf{x}(t)$  имеет величину порядка  $T \gg \tau_0$ , и в этом случае существует малый параметр —  $\tau_0/T$ , который может быть использован для построения приближенного решения.

В первом приближении по этому параметру малости можно рассматривать асимптотику при  $\tau_0 \rightarrow 0$ . При этом значения  $\mathbf{x}(t')$  при  $t' < t$  будут не только функционально, но и статистически независимы от значений  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t'')$  при  $t'' > t$ . Это приближение эквивалентно замене корреляционного тензора  $B_{ij}$  на некоторый эффективный тензор, определяемый равенством

$$B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 2\delta(t - t')F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t). \quad (\text{Г.4})$$

Величина  $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t)$  при этом определяется из условия равенства интегралов от  $B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$  и  $B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$  по  $t'$ :

$$F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t'),$$

что и соответствует переходу к гауссовому дельта-коррелированному по времени  $t$  случайному полю.

Введем индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}), \quad (\text{Г.5})$$

где  $\mathbf{x}(t)$  — решение уравнения (Г.1), удовлетворяющую уравнению Лиувилля

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (\text{Г.6})$$

При этом

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t - 0)} \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}, t) \}. \quad (\text{Г.7})$$

Уравнение для плотности вероятностей решения уравнения (Г.1)

$$P(\mathbf{x}, t) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle$$

получим, усредняя уравнение (Г.6) по ансамблю реализаций поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle. \quad (\text{Г.8})$$

Уравнение (Г.8) можно переписать в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \int dx' \int_{t_0}^t dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} \right\rangle. \quad (\text{Г.9})$$

Здесь мы воспользовались формулой Фурутцу–Новикова (Б.14) на с. 109:

$$\langle f_k(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \rangle = \int dx' \int dt' B_{kl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]}{\delta f_l(\mathbf{x}', t')} \right\rangle, \quad (\text{Г.10})$$

справедливой для корреляции гауссова случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  с произвольным функционалом  $R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$  от него, и условием динамической причинности (Г.2).

Уравнение (Г.9) показывает, что одновременная плотность вероятностей решения  $\mathbf{x}(t)$  в момент времени  $t$  определяется функциональной зависимостью решения  $\mathbf{x}(t)$  от поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}', t)$  для всех времен в интервале  $(t_0, t)$ .

В общем случае плотность вероятностей  $P(\mathbf{x}, t)$  не описывается замкнутым уравнением. Если же для корреляционной функции поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  воспользоваться приближением (Г.4), то возникнут члены, связанные со значениями  $\delta\varphi[\mathbf{x}, t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]/\delta f_j(\mathbf{x}', t')$  при совпадающих временных аргументах  $t' = t - 0$ ,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \int dx' F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) \left\langle \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_j(\mathbf{x}', t - 0)} \right\rangle,$$

которые, согласно равенству (Г.7), выражаются непосредственно через саму величину  $\varphi[\mathbf{x}, t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$ . Таким образом, мы приходим к замкнутому уравнению Фоккера–Планка

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)] \right) P(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t) P(\mathbf{x}, t)], \quad (\text{Г.11})$$

где

$$A_k(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial}{\partial x'_l} F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) \right|_{\mathbf{x}' = \mathbf{x}}.$$

Уравнение (Г.11) следует решать с начальным условием  $P(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ , или же с начальным условием более общего вида:  $P(\mathbf{x}, t_0) = W_0(\mathbf{x})$ , если начальные условия также случайны, но статистически независимы от поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ .

Уравнение Фоккера–Планка (Г.11) — уравнение в частных производных, и его дальнейший анализ существенно зависит от формулировки краевых условий по  $\mathbf{x}$ , которые формулируются для анализа конкретных задач.

Рассмотрим величины, входящие в уравнение (Г.11). Члены этого уравнения с  $A_k(\mathbf{x}, t)$  и  $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t)$  обусловлены флуктуациями поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ . Если поле  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  стационарно во времени, то величины  $A_k(\mathbf{x})$  и  $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  не зависят от времени. Если к тому же поле  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  однородно и изотропно по всем пространственным координатам, то величина  $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) = \text{const}$ , что соответствует постоянному тензору коэффициентов диффузии, а величина  $A_k(\mathbf{x}, t) = 0$  (заметим, однако, что зависимость  $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t)$  и  $A_k(\mathbf{x}, t)$  от  $\mathbf{x}$  может быть связана и с использованием криволинейных координат).

## Г.2. Плотность вероятностей перехода

Вернемся теперь к динамической системе (Г.1) и рассмотрим  $m$ -временную плотность вероятностей

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \langle \delta(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_1) \dots \delta(\mathbf{x}(t_m) - \mathbf{x}_m) \rangle, \quad (\text{Г.12})$$

относящуюся к  $m$  различным моментам времени  $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ . Дифференцируя (Г.12) по времени  $t_m$  и используя затем динамическое уравнение (Г.1), условие динамической причинности (Г.2), определение функции  $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t)$  и формулу Фурутцу–Новикова (Г.10), можно получить уравнение, аналогичное уравнению Фоккера–Планка (Г.11):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_m} P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) + \\ & + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{mk}} [v_k(\mathbf{x}_m, t_m) + A_k(\mathbf{x}_m, t_m)] P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \\ & = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_{mk} \partial x_{ml}} [F_{kl}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m; t_m) P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m)]. \end{aligned} \quad (\text{Г.13})$$

Здесь суммирование по индексу  $m$  не производится. Начальное условие к (Г.13) можно найти из формулы (Г.12). Полагая  $t_m = t_{m-1}$  в (Г.12), получаем

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_{m-1}) = \delta(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1})P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \quad (\text{Г.14})$$

Решение уравнения (Г.13) можно искать в виде

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1})P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \quad (\text{Г.15})$$

Так как все дифференциальные операции в (Г.13) относятся к  $t_m$  и  $\mathbf{x}_m$ , то, подставляя (Г.15) в (Г.13) и (Г.14), находим следующее уравнение для плотности вероятностей перехода:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)] \right) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)] \quad (\text{Г.16})$$

с начальным условием

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)|_{t \rightarrow t_0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

где

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) | \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \rangle.$$

В уравнении (Г.16) мы обозначили переменные  $\mathbf{x}_m, t_m$  через  $\mathbf{x}, t$ , а переменные  $\mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}$  — через  $\mathbf{x}_0, t_0$ .

Применяя формулу (Г.15) ( $m-1$ ) раз, получаем соотношение

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) \dots p(\mathbf{x}_2, t_2 | \mathbf{x}_1, t_1) P(\mathbf{x}_1, t_1), \quad (\text{Г.17})$$

где  $P(\mathbf{x}_1, t_1)$  — плотность вероятностей, определяемая уравнением (Г.11) и относящаяся к одному моменту времени  $t_1$ . Равенство (Г.17) выражает многовременную плотность вероятностей через произведение плотностей вероятностей перехода и означает, что случайный процесс  $\mathbf{x}(t)$  является марковским.

### Г.3. Об условиях применимости уравнения Фоккера–Планка

Для оценки границ применимости уравнения Фоккера–Планка необходимо учитывать конечность радиуса корреляции  $\tau_0$  поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  по временной координате. В этом случае вместо уравнения для плотности вероятностей (Г.11) получается уравнение

$$\hat{E}P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_k} S'(\mathbf{x}, t),$$

где  $\hat{E}$  — оператор, стоящий в левой части уравнения (Г.11), в котором величина  $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$  заменена на

$$\tilde{F}_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \int_0^t dt' B_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t),$$

а член  $S'(\mathbf{x}, t)$  учитывает поправки к вектору плотности потока вероятностей, связанные с конечностью  $\tau_0$ . При  $\tau_0 \rightarrow 0$  мы возвращаемся к уравнению (Г.11). Таким образом, условие малости параметра  $\tau_0/T$  является необходимым, но, вообще говоря, не достаточным для возможности описывать статистические характеристики решения

уравнения (Г.1) на основе приближения дельта-коррелированного случайного поля, которому соответствует уравнение Фоккера–Планка. Для каждой конкретной задачи необходимо проводить более детальные исследования. Далее мы приведем физически более наглядный метод, называемый *диффузионным приближением*, также приводящий к марковости решения уравнения (Г.1), но учитывающий, в определенной мере, конечность временного радиуса корреляции.

Здесь же подчеркнем, что приближение дельта-коррелированного случайного поля не означает формальной замены случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  в (Г.1) на случайное поле с корреляционной функцией (Г.4). Это приближение соответствует построению асимптотического разложения при стремлении временного радиуса корреляции  $\tau_0$  поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  к нулю. И при таком предельном переходе точные средние величины типа

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{x}', \tau)] \rangle$$

переходят в выражения, полученные с помощью формальной замены корреляционно-го тензора поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  на эффективный тензор (Г.4).

## Г.4. Простейшие марковские случайные процессы

Существует лишь небольшое число уравнений Фоккера–Планка, допускающих точное решение. Это прежде всего уравнения Фоккера–Планка, соответствующие таким стохастическим уравнениям, которые сами допускают отыскание решения в аналитическом виде. Для таких задач зачастую удается определить не только одноточечную плотность вероятностей и переходную плотность вероятностей, но и характеристический функционал, а также другие важные для приложений статистические характеристики. Самым простым случаем является уравнение, определяющее *винеровский случайный процесс*. Учитывая особую важность таких процессов в физике (они, например, описывают *броуновское движение частицы*).

### Г.4.1. Винеровский случайный процесс

Винеровский случайный процесс определяется как решение стохастического уравнения

$$\frac{d}{dt} w(t) = z(t), \quad w(0) = 0,$$

где  $z(t)$  — гауссов дельта-коррелированный во времени процесс с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0\delta(t-t').$$

Решение этого уравнения

$$w(t) = \int_0^t d\tau z(\tau)$$

— непрерывный гауссов нестационарный случайный процесс с параметрами

$$\langle w(t) \rangle = 0, \quad \langle w(t)w(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0 \min(t, t').$$

И, следовательно, его характеристический функционал имеет структуру

$$\begin{aligned} \Phi[t; v(\tau)] &= \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau w(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle = \\ &= \exp \left\{ -\sigma^2 \tau_0 \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 v(\tau_1) v(\tau_2) \min(\tau_1, \tau_2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Г.18})$$

#### Г.4.2. Винеровский случайный процесс со сносом

Обсудим более общий процесс со сносом, зависящий от параметра  $\alpha$  по формуле

$$w(t; \alpha) = -\alpha t + w(t), \quad \alpha > 0.$$

Процесс  $w(t; \alpha)$  — марковский процесс и его плотность вероятностей

$$P(w, t; \alpha) = \langle \delta(w(t; \alpha) - w) \rangle$$

описывается уравнением Фоккера–Планка:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial w} \right) P(w, t; \alpha) = D \frac{\partial^2}{\partial w^2} P(w, t; \alpha), \quad P(w, 0; \alpha) = \delta(w), \quad (\text{Г.19})$$

где через коэффициент диффузии обозначена величина  $D = \sigma^2 \tau_0$ . Его решение имеет вид гауссова распределения:

$$P(w, t; \alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{(w + \alpha t)^2}{4Dt} \right\}. \quad (\text{Г.20})$$

Соответствующая интегральная функция распределения, равная вероятности того, что  $w(t; \alpha) < w$ , равна

$$F(w, t; \alpha) = \int_{-\infty}^w dw P(w, t; \alpha) = \Phi \left( \frac{w}{\sqrt{2Dt}} + \alpha \sqrt{\frac{t}{2D}} \right), \quad (\text{Г.21})$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z dy \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} \quad (\text{Г.22})$$

— интеграл вероятностей. При этом кривая типичной реализации винеровского случайного процесса со сносом, в соответствии с формулами (В.15) на с. 114, является линейной функцией времени:

$$w^*(t; \alpha) = -\alpha t.$$

С помощью винеровского случайного процесса можно конструировать и другие процессы, удобные для моделирования различных физических явлений. Для положительных величин такой простейшей аппроксимацией является логарифмически нормальный (логнормальный) процесс, который мы и рассмотрим более подробно.

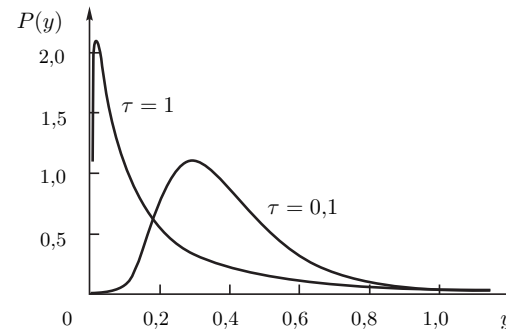


Рис. Г.1. Логарифмически нормальная плотность вероятностей (Г.24) для значения параметра  $\alpha/D = 1$  и безразмерного времени  $\tau = 0,1$  и  $1$

#### Г.4.3. Логарифмически нормальный процесс

Определим логнормальный случайный процесс формулой

$$y(t; \alpha) = e^{w(t; \alpha)} = \exp \left\{ -\alpha t + \int_0^t d\tau z(\tau) \right\}, \quad (\text{Г.23})$$

где  $z(t)$  — гауссов процесс «белого шума» с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t) z(t') \rangle = 2\sigma^2 \tau_0 \delta(t - t').$$

Он описывается стохастическим уравнением

$$\frac{d}{dt} y(t; \alpha) = \{-\alpha + z(t)\} y(t; \alpha), \quad y(0; \alpha) = 1.$$

Одновременная плотность вероятностей логнормального процесса

$$\begin{aligned} P(y, t; \alpha) &= \langle \delta(y(t; \alpha) - y) \rangle = \langle \delta(e^{w(t; \alpha)} - y) \rangle = \\ &= \frac{1}{y} \langle \delta(w(t; \alpha) - \ln y) \rangle = \frac{1}{y} P(w, t; \alpha)|_{w=\ln y}, \end{aligned}$$

где  $P(w, t; \alpha)$  — одновременная плотность вероятностей винеровского процесса со сносом, описываемая равенством (Г.20), и, следовательно,

$$P(y, t; \alpha) = \frac{1}{2y\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{(\ln y + \alpha t)^2}{4Dt} \right\} = \frac{1}{2y\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(ye^{\alpha t})}{4Dt} \right\}, \quad (\text{Г.24})$$

где параметр  $D = \sigma^2 \tau_0$ . Графики логарифмически нормальной плотности вероятностей (Г.24) для значения параметра  $\alpha/D = 1$  и безразмерного времени  $\tau = Dt = 0,1$  и  $1$  приведены на рис. Г.1.

Характерной особенностью этих графиков является появление длинного пологого «хвоста» при  $\tau = 1$ , означающего усиление роли больших выбросов процесса  $y(t; \alpha)$  в формировании одновременной статистики. Соответственно, интегральная функция

распределения, согласно (Г.21), (Г.22), определяется выражением

$$F(y, t; \alpha) = P(y(t; \alpha) < y) = P(w(t; \alpha) < \ln y) = \\ = \int_{-\infty}^{\ln y} dw P(w, t; \alpha) = \Phi \left( \frac{\ln y}{\sqrt{2Dt}} + \alpha \sqrt{\frac{t}{2D}} \right) = \Phi \left( \frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln (ye^{\alpha t}) \right). \quad (\text{Г.25})$$

Зная только одноточечные статистические характеристики процесса  $y(t; \alpha)$ , можно получить важную информацию о поведении реализаций процесса  $y(t; \alpha)$  на всем интервале времен  $(0, \infty)$ . В частности:

1) Логнормальный процесс  $y(t; \alpha)$  является марковским процессом и его одновременная плотность вероятностей (Г.24) описывается уравнением Фоккера–Планка:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right) P(y, t; \alpha) = D \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} P(y, t; \alpha), \quad P(y, 0; \alpha) = \delta(y - 1). \quad (\text{Г.26})$$

Исходя из уравнения (Г.26) легко написать уравнения для моментных функций процесса  $y(t; \alpha)$ , решения которых определяются равенствами

$$\langle y^n(t; \alpha) \rangle = e^{n(n-\alpha/D)Dt}, \quad \left\langle \frac{1}{y^n(t; \alpha)} \right\rangle = e^{n(n+\alpha/D)Dt}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{Г.27})$$

и экспоненциально растут во времени.

Исходя из уравнения (Г.26) также легко получить равенство

$$\langle \ln y(t) \rangle = -\alpha t$$

и, следовательно, параметр  $\alpha$  можно записать в виде

$$-\alpha = \frac{1}{t} \langle \ln y(t) \rangle. \quad (\text{Г.28})$$

### Замечание Г.1. Ляпуновская экспонента

Подходу, основанному на анализе устойчивости решений детерминированных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A(t) \mathbf{x}(t)$$

по Ляпунову, уделяется большое внимание многими исследователями. При этом анализируются верхний предел решения задачи

$$\lambda_{\mathbf{x}(t)} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |\mathbf{x}(t)|,$$

который называется его характеристическим показателем. В приложении к стохастическим динамическим системам при таком подходе, зачастую, для интерпретации и упрощения полученных результатов, эти исследователи на последней стадии подключают статистический анализ и вычисляют их статистические средние такие, например, как

$$\langle \lambda_{\mathbf{x}(t)} \rangle = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \langle \ln |\mathbf{x}(t)| \rangle. \quad (\text{Г.29})$$

◆

Таким образом параметр  $\alpha$  является *ляпуновской экспонентой* для логнормального случайного процесса  $y(t)$  (см., например, [12, 13]).

2) Зная интегральную функцию распределения, можно вычислить кривую типичной реализации логнормального процесса  $y(t; \alpha)$ , которая оказывается экспоненциально спадающей кривой:

$$y^*(t) = e^{\langle \ln y(t) \rangle} = e^{-\alpha t}, \quad (\text{Г.30})$$

в соответствии с формулами (В.15) на с. 114.

Экспоненциальный рост моментов обусловлен выбросами процесса  $y(t; \alpha)$  относительно кривой типичной реализации  $y^*(t; \alpha)$  как в сторону больших, так и в сторону малых значений  $y$ .

Для значения параметра  $\alpha/D = 1$  среднее значение процесса  $y(t; D)$  не зависит от времени и равно единице. При этом, однако, вероятность выполнения неравенства  $y < 1$  при  $Dt \gg 1$ , согласно (Г.25), быстро стремится к единице по закону

$$P(y(t; D) < 1) = \Phi \left( \sqrt{\frac{Dt}{2}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} e^{-Dt/4},$$

т. е. подавляющее время графики реализаций процесса лежат ниже уровня его среднего значения  $\langle y(t; D) \rangle = 1$ , хотя статистические моменты процесса  $y(t; D)$  в основном и определяются его большими выбросами.

Таким образом, мы имеем явное противоречие в характерах поведения статистических характеристик процесса  $y(t; \alpha)$  и его реализаций.

3) Поведение реализаций процесса  $y(t; \alpha)$  на всем интервале времени можно также оценить с помощью  $p$ -мажорантных кривых  $M_p(t, \alpha)$ , которые определим следующим образом. Назовем мажорантной кривой такую кривую  $M_p(t, \alpha)$ , для которой при любых временах  $t$  с вероятностью  $p$  выполняется неравенство  $y(t; \alpha) < M_p(t, \alpha)$ , т. е.

$$P\{y(t; \alpha) < M_p(t, \alpha) \text{ для всех } t \in (0, \infty)\} = p.$$

При этом существует однопараметрический класс экспоненциально спадающих мажорантных кривых

$$M_p(t, \alpha, \beta) = (1 - p)^{-D/\beta} e^{(\beta - \alpha)t}. \quad (\text{Г.31})$$

Обратим внимание на тот замечательный факт, что, несмотря на постоянство статистического среднего  $\langle y(t; D) \rangle = 1$  и экспоненциальный рост высших моментов процесса  $y(t; D)$ , всегда можно указать экспоненциально спадающую мажорантную кривую (Г.31), ниже которой будут лежать реализации процесса  $y(t; D)$  с любой наперед заданной вероятностью  $p < 1$ . В частности, например, с вероятностью  $p = 1/2$  выполняется неравенство

$$y(t; D) < M_{1/2}(t, D, D/2) = 4e^{-Dt/2} \quad (\text{Г.32})$$

для любого момента времени  $t$  из интервала  $(0, \infty)$ . Схематическое поведение реализации процесса  $y(t; D)$  и мажорантной кривой (Г.32) приведено на рис. Г.2.

Это еще раз подтверждает сделанный ранее вывод о том, что экспоненциальный рост моментов процесса  $y(t; D)$  во времени — эффект чисто статистический, обусловленный усреднением по всему ансамблю реализаций.

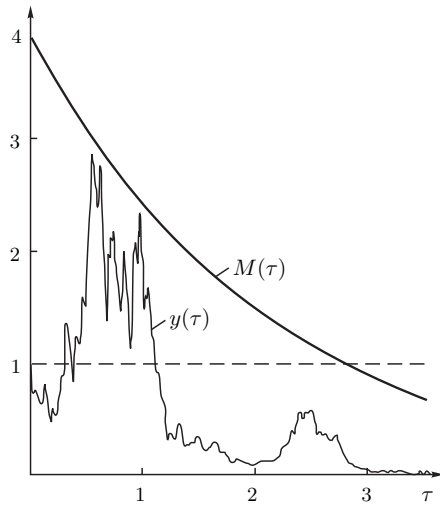


Рис. Г.2. Схематическое поведение реализации процесса  $y(t; D)$  и мажорантной кривой  $M(\tau)$  (Г.32)

Отметим, что площадь под экспоненциально убывающими мажорантными кривыми конечна. Следовательно, большие выбросы процесса  $y(t; \alpha)$ , вызывая экспоненциальный рост высших моментов, не вносят существенного вклада в площадь под реализациями, которая практически для всех реализаций также конечна, т.е. выбросы логнормального процесса  $y(t; \alpha)$  достаточно узки.

## Г.5. Диффузионное приближение

Условием применимости приближения дельта-коррелированности случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  (т.е. уравнения Фоккера–Планка) является условие малости  $\tau_0$  — временного радиуса корреляции случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  — по сравнению со всеми временными масштабами, имеющимися в рассматриваемой задаче. Учет конечности временного радиуса корреляции случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  можно провести в рамках диффузионного приближения. Это приближение более наглядно и физично, чем формальное математическое приближение дельта-коррелированного случайного поля. Это приближение справедливо также для достаточно малых флуктуаций параметров стохастической динамической системы и позволяет получить не только условия применимости дельта-коррелированного приближения, но и описать новые физические эффекты, порожденные конечностью временного радиуса корреляции случайных параметров.

В рамках диффузионного приближения предполагается, что влияние случайных воздействий на временных масштабах порядка  $\tau_0$  несущественно, т.е. система на этих масштабах эволюционирует как свободная.

Пусть опять векторная функция  $\mathbf{x}(t)$  удовлетворяет динамическому уравнению (Г.1) на с. 117:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (\text{Г.33})$$

где  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  — векторная детерминированная функция, а  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  — случайное статистически однородное в пространстве и стационарное во времени гауссово векторное поле

со статистическими характеристиками

$$\langle f(\mathbf{x}, t) \rangle = 0, \quad B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = B_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t') \rangle.$$

Введем индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}), \quad (\text{Г.34})$$

где  $\mathbf{x}(t)$  — решение уравнения (Г.33), удовлетворяющую уравнению Лиувилля (Г.6) на с. 118:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (\text{Г.35})$$

Уравнение для плотности вероятностей решения уравнения (Г.33)

$$P(\mathbf{x}(t) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle$$

получим, как и ранее, усредняя уравнение (Г.35) по ансамблю реализаций поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad P(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (\text{Г.36})$$

Используя формулу Фурутцу–Новикова (Г.10) на с. 118

$$\langle f_k(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \rangle = \int d\mathbf{x}' \int dt' B_{kl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta}{\delta f_l(\mathbf{x}', t')} R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \right\rangle,$$

справедливую для корреляции гауссова случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  с произвольным функционалом  $R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$  от него, уравнение (Г.36) можно переписать в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \int_{t_0}^t d\mathbf{x}' \int dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} \varphi(\mathbf{x}, t) \right\rangle. \quad (\text{Г.37})$$

В диффузионном приближении уравнение (Г.37) является точным, а вариационная производная и индикаторная функция на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \tau_0$  описываются системой динамических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} &= - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} \right\}, \\ \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} \Big|_{t=t'} &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}, t') \}, \end{aligned} \quad (\text{Г.38})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \}, \quad \varphi(\mathbf{x}, t) \Big|_{t=t'} = \varphi(\mathbf{x}, t').$$

Решение задачи (Г.37), (Г.38) справедливо для всех времен  $t$ . Однако в этом случае решение задачи (Г.33)  $\mathbf{x}(t)$  не является векторным марковским случайным процессом, так как ее многовременная плотность вероятностей не допускает факторизации с помощью плотности вероятностей перехода. В асимптотическом случае  $t \gg \tau_0$  решение исходной динамической системы (Г.33) в диффузионном приближении уже будет марковским случайным процессом, и условиями применимости его является малость всех статистических эффектов на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции  $\tau_0$ .



## Список литературы

1. *Ареф Х.* Развитие хаотической адвекции // *Нелинейная динамика.* 2006. Т. 2, № 1. С. 111–133.
2. *Бакунин О.Г.* Корреляционные и перколяционные свойства турбулентной диффузии // *УФН.* 2003. Т. 173, № 7. С. 757–768.
3. *Бэтчелор Дж.* Теория однородной турбулентности. — М.: ИЛ, 1955.
4. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986.
5. *Грибова Е.З., Жукова И.С., Лапинова С.А., Саичев А.И., Эльперин Т.* Особенности диффузии падающей частицы // *ЖЭТФ.* 2003. Т. 123, № 3. С. 543–551.
6. *Дожучаев В.П.* Метод дисперсионных соотношений для средней концентрации в теории турбулентной диффузии пассивной примеси // *Изв. АН, Физ. атмосфер. и океана.* 1995. Т. 31, № 2. С. 275–281.
7. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. — М.: Наука, 1988.
8. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения глазами физика. Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения. — М.: Физматлит, 2001.
9. *Кляцкин В.И.* Динамика стохастических систем. Курс лекций. — М.: Физматлит, 2002.
10. *Кляцкин В.И.* Диффузия и кластеризация оседающей примеси в случайных гидродинамических потоках // *ЖЭТФ.* 2004. Т. 126, № 5. С. 1153–1166.
11. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения. Теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике. Т. 1, 2 — М.: Физматлит, 2008.
12. *Кляцкин В.И.* Динамические стохастические системы, кривая типичной реализации и ляпуновские экспоненты // *Изв. АН, физ. атм. и океана.* 2008. Т. 44, № 1. С. 21–35.
13. *Кляцкин В.И.* Статистическая топография и ляпуновские экспоненты в динамических стохастических системах // *УФН.* 2008. Т. 178, № 4. С. 419–431.
14. *Кляцкин В.И., Гурарий Д.* Когерентные явления в стохастических динамических системах // *УФН.* 1999. Т. 169, № 2. С. 171–207.
15. *Кляцкин В.И., Кошель К.В.* Простейший пример возникновения кластерной структуры поля пассивной примеси в случайных потоках // *УФН.* 2000. Т. 170, № 7. С. 771–778.
16. *Кляцкин В.И., Налбандян О.Г.* Диффузия пассивной оседающей примеси в изотропном случайном поле скоростей // *Изв. АН Физ. атмосфер. и океана.* 1997. Т. 32, № 3. С. 291–297.
17. *Кляцкин В.И., Саичев А.И.* Статистическая теория диффузии плавучей пассивной примеси в случайном поле скоростей // *ЖЭТФ.* 1997. Т. 111, № 4. С. 1297–1313.
18. *Кляцкин В.И., Эльперин Т.* Кластеризация поля плотности числа малоинерционных частиц в случайных бездивергентных гидродинамических потоках // *ЖЭТФ.* 2002. Т. 122, № 2. С. 327–340.
19. *Кляцкин В.И., Эльперин Т.* Диффузия малоинерционных частиц под действием случайных сил и проблема Крамерса // *Изв. АН, Физ. атмосфер. и океана.* 2002. Т. 38, № 6. С. 817–823.
20. *Кляцкин В.И., Якушкин И.Г.* Стохастический перенос в случайных волновых полях // *ЖЭТФ.* 2000. Т. 118, № 4. С. 849–862.
21. *Кошель К.В., Александрова О.В.* Некоторые результаты численного моделирования диффузии пассивной примеси в случайном поле скоростей // *Изв. АН, Физ. атмосфер. и океана.* 1999. Т. 35, № 5. С. 638–648.
22. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1988.
23. *Лихтенберг А.Дж., Либерман М.А.* Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984.
24. *Лэмб Г.* Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947.
25. *Лютовинов В.С., Чечеткин В.Р.* Спектр Колмогорова–Обухова в корреляционной функции пассивной примеси в турбулентной жидкости // *Изв. АН СССР, Физ. атмосфер. и океана.* 1989. Т. 25, № 3. С. 195–198.
26. *Миравель А.П., Монин А.С.* О статистических свойствах примеси, перемешиваемой двумерной турбулентностью // *Изв. АН ССР, Физ. атмосфер. и океана.* 1983. Т. 19, № 9. С. 902–912.
27. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидродинамика. Ч. 1, 2. — М.: Наука, 1965, 1967.
28. *Новиков Е.А.* Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности // *ЖЭТФ.* 1964. Т. 47, № 5. С. 1919–1926.
29. *Саичев А.И., Уткин С.Г.* Законы аномальной диффузии / В: *Нелинейные волны* 2002. — Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2003.
30. *Уленбек Г.Е.* Фундаментальные проблемы статистической механики // *УФН.* 1971. Т. 103, № 2. С. 275–318.
31. *Учайкин В.В.* Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // *УФН.* 2003. Т. 173, № 8. С. 844–876.
32. *Avellaneda M., Majda A.J.* Mathematical models with exact renormalization for turbulent transport // *Comm. Math. Phys.* 1990. V. 131. P. 381–429.

33. *Balkovsky E., Falkovich G., Fouzon A.* Clustering of inertial particles in turbulent flows // <http://arxiv.org/abs/chao-dyn/9912027>. 2000.
34. *Balkovsky E., Falkovich G., Fouzon A.* Intermittent Distribution of Inertial Particles in Turbulent Flows // *Phys. Rev. Letters*. 2001. V. 86, № 13. P. 2790–2793.
35. *Batchelor G.K.* Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. 1. General discussion and the case of small conductivity // *J. Fluid Mech.* 1959. V. 5, № 1. P. 113–133.
36. *Batchelor G.K., Howells I.D., Townsend A.A.* Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. 2. The case of large conductivity // *J. Fluid Mech.* 1959. V. 5, № 1. P. 134–139.
37. *Bouchaud J.P., Georges A.* Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications, // *Phys. Report*. 1990. V. 195, № 19. P. 127–293.
38. *Chen H., Chen S., Kraichnan R.H.* Probability distribution of a stochastically advected scalar field // *Phys. Rev. Letters*. 1989. V. 63, № 24. P. 2657–2660.
39. *Cressman J.R., Golburg W.I.* Compressible flow: Turbulence at the surface // *J. Stat. Phys.* 2003. V. 113, № 5/6. P. 875–883.
40. *Cressman J.R., Golburg W.I., Schumacher J.* Dispersion of tracer particles in a compressible flow // *Europhys. Letters*. 2004. V. 66, № 2. P. 219–225.
41. *Cristiani A., Vulpiani A.* On the effect of noise and drift on diffusion in fluids // *J. Stat. Phys.* 1993. V. 70. P. 197–211.
42. *Csanady G.T.* Turbulent Diffusion in the Environment. *Geophys. and Astrophys. Monographs* V. 3, — Dordrecht: Reidel Publ. Co., 1973.
43. *Dagan G.* Theory of solute transport by groundwater // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1987. V. 19. P. 183–215.
44. *Dahm W.J.A., Buch K.A.* Lognormality of the scalar dissipation pdf in turbulent flows // *Phys. Fluids*. 1989. V. A1, № 7. P. 1290.
45. *Er-El J., Peskin R.L.* Relative diffusion of constant-level balloons in the Southern Hemisphere // *J. Atmos. Sci.* 1981. V. 38, № 10. P. 2264–2274.
46. *Fannjiang, A., Ryzhin L., Papanicolaou G.* Evolution of trajectory correlations in steady random flows // *Proc. Symposia in Appl. Math.* 1998. V. 54. P. 105–130.
47. *Furutsu K.* On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium // *J. Res. NBS.* 1963. V. D-67. P. 303.
48. *Gao F.* An analytical solution for the scalar probability density function in homogeneous turbulence // *Phys. Fluids*. 1991. V. A3, № 4. P. 511–513.
49. *Gollub, J., J. Crarke, Gharib M., Lane B., Mesquita O.* Fluctuations and transport in a stirred fluid with a mean gradient // *Phys. Rev. Lett.* 1991. V. 67, № 25. P. 3507–3510.

50. *Griffa A.* Applications of stochastic particle models to oceanographic problems / In: *Stochastic Modeling in Oceanography, Progress in Probability*. 1996. V. 39. P. 114–140, eds. R.J. Adler, P. Müller, B.L. Razovsky. — Boston: Birkhäuser.
51. *Gurvich A.S., Yaglom A.M.* Breakdown of eddies and probability distributions for small-scale turbulence // *Phys. Fluids Suppl.* 1967. V. 10, № 9. P. 559.
52. *Herterich K., Hasselmann K.* The horizontal diffusion of tracers by surface waves // *J. Phys. Oceanogr.* 1982. V. 12. P. 704–711.
53. *Holzer M., Pumir A.* Simple models on non-Gaussian statistics for a turbulently advected passive scalar // *Phys. Rev.* 1993. V. E47, № 1. P. 202–219.
54. *Holzer M., Siggia E.* Turbulent mixing of a passive scalar // *Phys. Fluids*. 1994. V. 6, № 5. P. 1820–1837.
55. *Kerstein A.R., McMurtry P.A.* Mean-field theories of random advection // *Phys. Rev.* 1994. V. E49, № 1. P. 474–482.
56. *Kimura Y., Kraichnan R.H.* Statistics of an advected passive scalar // *Phys. of Fluids*. 1993. V. A5, № 9. P. 2264–2277.
57. *Klyatskin V.I., Woyczynski W.A.* Fluctuations of passive scalar with nonzero mean concentration gradient in random velocity fields // *JETP*. 1995. V. 81, № 4. P. 770–773.
58. *Klyatskin V.I., Woyczynski W.A., Gurarie D.* Short-time correlation approximation for diffusing tracers in random velocity fields: a functional approach / In: *Stochastic Modeling in Oceanography, Progress in Probability*, V. 39. P. 221–269, eds. R.J. Adler, P.Müller, B.L. Razovsky. — Boston: Birkhäuser, 1996.
59. *Klyatskin V.I., Woyczynski W.A., Gurarie D.* Diffusing passive tracers in random incompressible velocity flows: Statistical topography aspects // *J. Stat. Phys.* 1996. V. 84, № 3/4. P. 797–836.
60. *Lesieur M.*, *Turbulence in Fluids, Fluid Mechanics and Its Applications* V. 1, 2-nd ed. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990.
61. *Longuet-Higgins M.S.* Statistical properties of a moving wave-form // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1956. V. 52. P. 234–245.
62. *Longuet-Higgins M.S.* On the velocity of the maxima in a moving wave-form // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1957. V. 53. P. 230–233.
63. *Longuet-Higgins M.S.* The statistical analysis of a random, moving surface // *Philos. Trans. R. Soc. London*. 1957. Ser. A249, № 966. P. 321–387.
64. *Longuet-Higgins M.S.* Statistical properties of an isotropic random surface // *Philos. Trans. R. Soc. London*. 1957. Ser. A250, № 975. P. 157–174.
65. *Longuet-Higgins M.S.* The statistical geometry of random surfaces / In: *Hydrodynamic Stability, Proc. 13-th Symp. Appl. Math., Am. Math. Soc.* 1962. P. 105–142.

66. *Majda A. J.* The random uniform shear layer: An explicit example of turbulent diffusion with broad tail probability distribution // *Phys. Fluids*. 1993. V. A5, № 8. P. 1963–1970.
67. *Majda A. J.* Random shearing direction models for isotropic turbulent diffusion // *J. Stat. Phys.* 1994. V. 75, № 5/6. P. 1153–1165.
68. *Maxey M. R.* The Gravitational Settling of Aerosol Particles in Homogeneous turbulence and random flow field // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 174. P. 441–465.
69. *Maxey M. R.* On the advection of spherical and non-spherical particles in a non-uniform flow // *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 1990. V. A333. P. 289–307.
70. *Maxey M. R., Corsin S.* Gravitational settling of aerosol particles in randomly oriented cellular flow field // *J. Atmos. Sci.* 1986. V. 43. P. 1112–1134.
71. *Maxey M. R., Riley J. J.* Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow // *Phs. Fluids*. 1983. V. 26, № 4. P. 883–889.
72. *Maxey M. R., Wang L. P.* Settling Velocity and Concentration Distribution of Heavy Particles in Homogeneous Isotropic Turbulence // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 256. P. 27–68.
73. *Maxey M. R., Chang E. J., Wang L.-P.* Interaction of Particles and Microbubbles with turbulence // *Exp. Therm. Fluid Sci.* 1996. V. 12. P. 417–425.
74. *McComb W.* The Physics of Fluid Turbulence. Oxford Engineering Sci. Ser. V. 25. — Oxford: Clarendon Press, 1990.
75. *Mehlig B., Wilkinson M.*, Coagulation by random velocity fields as a Kramers Problem // *Phys. Rev. Letters*. 2004. V. 92, № 25. P. 250602-1–250602-4.
76. *Mesinger F.* Behavior of a very large number of constant-volume trajectories // *J. Atmos. Sci.* 1965. V. 22, № 5. P. 479–492.
77. *Mesinger F.* Numerical integration of the primitive equations with a floating set of computation points: experiments with a barotropic global model // *Monthly Weather Review*. 1971. V. 99, № 1. P. 15–29.
78. *Mesinger F., Mintz Y.* Numerical simulation of the 1970–1971 Eole experiment, Numerical simulation of weather and climate, Technical Report № 4. — Los Angeles: Dep. Meteorology. Univ. of California, 1970.
79. *Mesinger F., Mintz Y.* Numerical simulation of the clustering of the constant-volume balloons in the global domain, Numerical simulation of weather and climate, Technical Report № 5. — Los Angeles: Dep. Meteorology, Univ. of California, 1970.
80. *Metzler R., Klafter J.* The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Physics Reports*. 2000. V. 339. P. 1–77.
81. *Nicolis G., Prigogin I.*, Exploring Complexity, an Introduction. — New York: W.H. Freeman and Company, 1989.
82. *Okubo A.* Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models, Biomathematics V. 10. — N. Y.: Springer-Verlag, 1980.

83. *Ott S., Mann J.* An experimental investigation of the relative diffusion of particle pairs in three dimensional turbulent flow // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 422. P. 207–223.
84. *Pumir A.* A numerical study of the mixing of a passive scalar in three dimensions in the presence of a mean gradient // *Phys. Fluids*. 1994. V. 6, № 6. P. 2118–2132.
85. *Pumir A., Shraiman B., Siggia E.* Exponential tails and random advection // *Phys. Rev. Lett.* 1991. V. 66, № 23. P. 2984–2987.
86. *Saichev A. I., Woyczynski W. A.* Probability distributions of passive tracers in randomly moving media / In: *Stochastic Models in Geosystems*, eds. S. A. Molchanov, W. A. Woyczynski, IMA Volumes in Math. and its Appl. V. 85. P. 359–400. — N. Y.: Springer-Verlag, 1996.
87. *Sagdeev R. Z., Usikov D. A., Zaslavsky G. M.* Nonlinear Physics: from the Pendulum to Turbulence and Chaos. — Chur: Harwood Acad. Publ., 1988.
88. *Sanderson B. G., Okubo A.* Diffusion by internal waves // *J. Geophys. Res.* 1988. V. 93. P. 3570–3582.
89. *Shandarin S. F., Zel'dovich Ya. B.* Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium: the large scale structure of the Universe // *Rev. Modern Phys.* 1989. V. 61. P. 185–220.
90. *Shraiman B. I., Siggia E. D.* Lagrangian path integrals and fluctuations in random flow // *Phys. Rev.* 1994. V. E49, № 4. P. 2912–2927.
91. *Sinai Ya. G., Yakhot V.* Limiting probability distributions of a passive scalar in a random velocity field // *Phys. Rev. Lett.* 1989. V. 63, № 18. P. 1962–1964.
92. *Stokes G. G.* On the Effect of the Internal friction of Fluids on the Motion of Pendulums // *Trans. Camb. Phil. Soc.* 1851. V. 9. P. 8.
93. *Swerling P.* Statistical properties of the contours of random surfaces // *I.R.E. Trans. Inf. Theory*. 1962. V. IT-8. P. 315–321.
94. *Taylor G. I.* Diffusions by continuous movements // *Proc. London Math. Society*. 1923. Ser. 2. V. 20. P. 196–211.
95. *Taylor G. I.* The spectrum of turbulence // *Proc. Royal Society*. 1938. V. A 164, № 919. P. 476–490.
96. *Walterscheid R. L., Hocking W. K.* Stokes diffusion by atmospheric internal gravity waves // *J. Atmos. Sci.* 1991. V. 48. P. 2213–2230.
97. *Weichman P. B., Glazman R. E.* Turbulent fluctuation and transport of passive scalar by random wave fields // *Phys. Rev. Letters*. 1999. V. 83, № 24. P. 5011–5018.
98. *Weichman P. B., Glazman R. E.* Passive scalar transport by travelling wave fields // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 420, P. 147–200.
99. *Weichman P. B., Glazman R. E.* Spatial variations of a passive tracer in a random wave field // *J. Fluid Mech.* 2002. V. 453. P. 263–287.
100. *Wilkinson M., Mehlig B.*, Caustics in turbulent aerosols // *Europhys. Letters*. 2005. V. 71, № 2. P. 186–192.

101. *Ziman J.M.*, Models of Disorder, The Theoretical Physics of Homogeneously Disordered Systems. — Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1979.
102. *Zambianchi E., Griffa A.* Effects of finite scales of turbulence on dispersion estimates // J. Mar. Res. 1994. V. 52. P. 129–148.
103. *Zirbel C.L., Çinlar E.* Mass transport by Brownian motion / In: Stochastic Models in Geosystems, eds. S.A. Molchanov, W.A. Woyczynski, IMA Volumes in Math. and its Appl., 1996. V. 85. P. 459–492. — N.Y.: Springer-Verlag.

## Предметный указатель

- Еоле-эксперимент, 13
- Броуновское движение, 30, 121
- Вариационная производная, 98, 102, 103, 107
- Винеровский случайный процесс, 30
- Вихревой дрейф, 55
- Волны  
 Россби, 49  
 акустические, 49  
 внутренние гравитационные, 49  
 гравитационные, 49
- Выкалывающее свойство дельта-функции, 104
- Движение частиц, 11
- Динамическая причинность, 83, 103
- Диффузия  
 в волновых полях, 49–59  
 в случайных потоках, 18, 33–42  
 молекулярная, 42  
 частиц, 25–33, 40–45
- Интегральная функция распределения, 106, 111
- Кластеризация, 11, 13, 16, 33, 36
- Когерентные явления, 6
- Кривая  
 дисперсионная, 49  
 мажорантная, 125–126  
 типичной реализации, 28, 33, 36, 111, 112, 125  
 для гауссова процесса, 114  
 для логнормального процесса, 114
- Ляпуновская экспонента, 33, 124
- Марковский процесс, 124
- Маятник Капицы, 55
- Образование кластеров, 6
- Описание  
 лагранжево, 15, 25–33, 64–66, 81–82  
 эйлерово, 9, 31, 33–40, 66–79, 82
- Плотность вероятностей, 27  
 перехода, 120
- Поток  
 колмогоровский, 29, 30  
 плоско-параллельный, 29, 46  
 линейный, 29, 30, 40  
 струйное течение, 29
- Преобразование Фурье, 86
- Приближение диффузионное, 46–48, 121, 126–127
- Проблема Крамерса, 66
- Сила  
 Кориолиса, 49  
 Стокса, 9
- Случайное поле  
 дельта-коррелированное  
 гауссово, 118
- Случайный процесс, 106  
 винеровский, 121–122  
 гауссов, 113  
 логнормальный (логарифмически нормальный), 114, 123–126
- Статистическая  
 топография, 7, 20  
 эквивалентность, 29, 36
- Стоксов дрейф, 50, 59
- Стохастический нагрев плазмы, 49
- Структура вихревая, 24, 64, 70
- Структурная матрица, 32, 34
- Уравнение  
 Лиувилля, 19, 31, 51, 103–118  
 расширенное, 21  
 Ньютона, 9  
 Фоккера–Планка, 26, 27, 29, 31, 54, 117
- Ускорение Ферми, 49

## Формула

Стокса, 9

Фурутцу–Новикова, 24, 25, 109, 118,  
127

## Фрактальный характер, 16

## Функционал характеристический, 106

## Функция

Дирака, 99, 103, 106

Хевисайда, 29, 103, 105, 106

индикаторная, 15, 19–21, 29, 31, 51, 55,  
103–118

расширенная, 38

ошибок (интеграл вероятностей), 36,  
122

## Хаотическая адвекция, 11

## Характеристические кривые, 64

частицы, 9

## Частота Брента–Вяйсяля, 49

## Якобиан, 15