

В.И. КЛЯЦКИН

ОЧЕРКИ ПО
ДИНАМИКЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ



Издание осуществлено при поддержке Российского фонда
фундаментальных исследований по проекту 11-05-07014-д

Кляцкин В.И. Очерки по динамике стохастических систем.
Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН
klyatskin@yandex.ru
<http://klyatskinvalery.narod.ru>

Настоящий вариант монографии, представляет переработку книги автора *Динамика стохастических систем (Курс лекций)*. — М: Физматлит, 2002.

В книге на основе функционального подхода формулируются общие методы статистического описания и анализа стохастических динамических систем с флуктуирующими параметрами, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, уравнениями в частных производных, краевыми задачами и интегральными уравнениями. Рассматриваются также асимптотические методы анализа стохастических динамических систем, такие как приближение дельта-коррелированного случайного процесса (поля) и диффузионное приближение. Общие идеи иллюстрируются на примерах когерентных явлений в стохастических динамических системах (происходящих с вероятностью равной единице), таких как кластеризация частиц и пассивной примеси (скалярной и векторной) в случайном поле скоростей, динамическая локализация плоских волн в слоистых случайных средах и возникновение каустической структуры волнового поля в многомерных случайных средах. Добавлены разделы, посвященные динамическому и статистическому описанию простейших систем гидродинамического типа, связи традиционных методов анализа устойчивости стохастических динамических систем по Ляпунову с методами статистической топографии, и приводится анализ задач статистического описания генерации магнитного поля в случайном поле скоростей (стохастическое динамо).

Для научных работников, специализирующихся в областях акустики, гидродинамики, магнитной гидродинамики, радиофизики, прикладной математики, теоретической и математической физики и имеющих дело со стохастическими динамическими системами, а также для студентов старших курсов и аспирантов.

Содержание

Предисловие	8
Часть I Динамическое описание стохастических систем	13
Очерк 1. Примеры динамических систем, формулировка задач	14
1.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (задачи с начальными условиями)	14
1.1.1. Частицы в поле случайных скоростей	14
1.1.2. Частица в поле случайных внешних сил	19
1.1.3. Явление переброса в динамических системах	20
1.1.4. Осциллятор с переменной случайной частотой (стохастический параметрический резонанс)	30
1.2. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (плоские волны в слоистых средах)	30
1.3. Уравнения в частных производных	34
1.3.1. Линейные уравнения в частных производных первого порядка	34
1.3.2. Квазилинейные и нелинейные уравнения с производными первого порядка	43
1.3.3. Параболическое уравнение квазиоптики (волны в случайно-неоднородных средах)	48
1.3.4. Уравнение Навье–Стокса (случайные силы в гидродинамической теории турбулентности)	52
Задачи	59
Очерк 2. Зависимость решения задачи от коэффициентов уравнений, начальных условий и параметров	60
2.1. Функциональная зависимость решения задачи	60
2.1.1. Вариационные (функциональные) производные	60
2.1.2. Принцип динамической причинности	64
2.2. Зависимость решения от параметров задачи	65
2.2.1. Зависимость решения задачи от начального условия	65
2.2.2. Метод погружения для краевых задач	67
Задачи	70

Очерк 3. Индикаторная функция и уравнение Лиувилля	73
3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения	73
3.2. Уравнения в частных производных первого порядка	76
3.2.1. Случай линейного уравнения	76
3.2.2. Случай квазилинейного уравнения	80
3.2.3. Общий случай нелинейного уравнения	82
3.3. Уравнения в частных производных высшего порядка	82
3.3.1. Параболическое уравнение квазиоптики	83
3.3.2. Случайные силы в гидродинамической теории турбулентности ..	85
Задачи	87
Часть II Стохастические уравнения	89
Очерк 4. Случайные величины, процессы и поля	90
4.1. Случайные величины и их характеристики	90
4.2. Случайные процессы, поля и их характеристики	95
4.2.1. Общие замечания	95
4.2.2. Статистическая топография случайных процессов и полей	99
4.2.3. Об условиях возникновения стохастического структурообразова-	
ния	102
4.2.4. Гауссов случайный процесс	104
4.2.5. Гауссово векторное случайное поле	106
4.2.6. Логарифмически нормальный случайный процесс	108
4.2.7. Разрывные случайные процессы	110
4.3. Марковские процессы	116
4.3.1. Общие свойства	116
4.3.2. Характеристический функционал марковского процесса	118
Задачи	119
Очерк 5. Расщепление корреляций	120
5.1. Общие соотношения	120
5.2. Гауссов процесс	122
5.3. Пуассоновский процесс	123
5.4. Телеграфный случайный процесс	124
5.5. Дельта-коррелированные случайные процессы	126
5.5.1. Асимптотический смысл дельта-коррелированных процессов ..	129
Задачи	131
Очерк 6. Общие подходы к стохастическим динамическим системам	135
6.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения	135
6.2. Динамические системы, допускающие полный статистический анализ ..	138
6.2.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения	138

6.2.2. Примеры уравнений в частных производных	150
6.3. Дельта-коррелированные процессы и поля	152
6.3.1. Одномерное нелинейное дифференциальное уравнение	154
6.3.2. Линейное операторное уравнение	155
Задачи	157

Очерк 7. Стохастические уравнения с марковскими флуктуациями параметров	168
7.1. Телеграфный случайный процесс	169
7.2. Гауссов марковский случайный процесс	171
Задачи	173

Очерк 8. Приближение дельта-коррелированного гауссова случайного поля	175
8.1. Уравнение Фоккера–Планка	175
8.2. Плотность вероятностей перехода	177
8.3. Простейшие марковские случайные процессы	180
8.3.1. Винеровский случайный процесс	180
8.3.2. Винеровский случайный процесс со сносом	180
8.3.3. Логарифмически нормальный процесс	183
8.4. Об условиях применимости уравнения Фоккера–Планка	194
8.4.1. Уравнение Ланжевена	195
8.5. Причинные интегральные уравнения	198
8.6. Диффузионное приближение	200
Задачи	202

Очерк 9. О методах решения и анализа уравнения Фоккера–Планка	209
9.1. Интегральные преобразования	209
9.2. Стационарные решения уравнения Фоккера–Планка	210
9.2.1. Одномерное нелинейное уравнение	210
9.2.2. Гамильтоновы системы	211
9.2.3. Системы гидродинамического типа	213
9.3. Краевые задачи для уравнения Фоккера–Планка (явление переброса) ..	220
9.4. Метод усреднения по быстрым осцилляциям	224
Задачи	225

Очерк 10. Другие подходы к решению задач статистической гидродинамики	229
10.1. О квазиупругих свойствах несжимаемой турбулентной среды	230
10.2. Излучение звука вихревыми движениями	234
10.2.1. Излучение звука вихревыми нитями	235
10.2.2. Излучение звука вихревыми кольцами	238

Часть III Примеры когерентных явлений в стохастических динамических системах **243**

Очерк 11. Кластеризация и диффузия частиц и пассивной примеси в случайных гидродинамических и магнитогидродинамических потоках	244
11.1. Общие замечания	244
11.2. Диффузия частиц в случайном поле скоростей	249
11.2.1. Одноточечные статистические характеристики	249
11.2.2. Двухточечные статистические характеристики	253
11.3. Вероятностное описание поля плотности в случайном поле скоростей ..	256
11.4. Вероятностное описание магнитного поля и его энергии в случайном поле скоростей	262
11.5. Интегральные одноточечные статистические характеристики пассивных векторных полей	271
11.5.1. Пространственная корреляционная функция поля плотности ..	272
11.5.2. Одноточечные статистические характеристики градиента поля плотности	275
11.5.3. Пространственная корреляционная функция магнитного поля ..	281
11.5.4. О спиральности магнитного поля	283
11.5.5. О диссипации энергии магнитного поля (дисперсии силы тока) ..	286
Задачи	288
Очерк 12. Локализация плоских волн в слоисто-неоднородных средах 292	
12.1. Общие замечания	292
12.1.1. Падение волны на слой неоднородной среды	292
12.1.2. Источник внутри слоя неоднородной среды	294
12.2. Статистическое описание волнового поля на границах слоя среды	297
12.2.1. Коэффициенты отражения и прохождения волны	297
12.2.2. Источник внутри среды	304
12.2.3. Статистическая локализация	305
12.3. Статистическая теория переноса излучения	306
12.3.1. Падение волны на слой среды	306
12.3.2. Источник плоских волн внутри случайно-неоднородной среды ..	312
12.4. Численное моделирование	315
Задачи	317
Очерк 13. Каустическая структура волнового поля в случайно-неоднородной среде	319
13.1. Исходные стохастические уравнения и некоторые их следствия	319
13.2. Амплитудно-фазовые флуктуации волнового поля	325
13.2.1. Случайный фазовый экран ($\Delta \mathbf{x} \ll \mathbf{x}$)	328
13.2.2. Случай непрерывной среды ($\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}$)	329

13.3. Континуальная запись решения задачи	330
13.3.1. Асимптотический анализ флуктуаций интенсивности плоской волны	333
13.4. Элементы статистической топографии случайного поля интенсивности ..	342
13.4.1. Область слабых флуктуаций интенсивности	344
13.4.2. Область сильных флуктуаций интенсивности	347
Задачи	350

Список литературы

355

Предметный указатель

361

I keep six honest serving-men
 (They taught me all I knew);
 Their names are What and Why and When
 And How and Where and Who.

R. Kipling

Предисловие

Статистические задачи занимают значительное место в различных областях физики. Если даже не говорить о задачах, традиционно относящихся к статистической физике, то имеется множество вопросов, в которых мы сталкиваемся с необходимостью учета флуктуационных эффектов. Хотя причины, вызывающие флуктуации, совершенно различны в различных задачах (это могут быть тепловые шумы, неустойчивости, турбулентность и т. д.), методы их теоретического рассмотрения часто очень схожи. При этом в ряде случаев статистическую природу самих флуктуаций можно считать известной (либо из физических соображений, либо из модельной постановки задачи), а сами физические процессы можно описывать как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных, интегро-дифференциальными и интегральными уравнениями. Основная задача заключается в получении замкнутых уравнений для статистических характеристик таких систем и исследовании их решений с максимально возможной полнотой.

Отметим, что волновые задачи зачастую являются краевыми задачами. В этих случаях, используя метод погружения, можно переформулировать их в задачи с начальными условиями, что существенно упрощает анализ статистических проблем.

Цель настоящей книги — показать, как различные физические задачи, описываемые стохастическими уравнениями, могут быть решены на основе общего подхода. При этом выясняются интересные аналогии между весьма различными физическими задачами.

В стохастических задачах с флуктуирующими параметрами переменными являются функции. Поэтому естественно для их анализа использовать функциональные методы. Мы будем использовать *функциональный метод*, впервые предложенный в работе Е. А. Новикова [1] для гауссовых флуктуаций параметров в теории турбулентности и развитый в монографиях автора [2, 3] для общего случая динамических систем и произвольной природы флуктуирующих параметров.

Однако лишь для небольшого числа конкретных динамических систем удается получить конечные результаты в общем виде. Более продуктивным оказывается использование асимптотического метода, основанного на разложении статистических характеристик решений динамических задач по малому параметру. Последний по существу является отношением времени корреляции случайного воздействия ко времени наблюдения или другим характерным временным масштабам задачи (в ряде случаев это будут не временные, а пространственные масштабы), по своей

сути являющегося обобщением теории броуновского движения. Это так называемое *приближение дельта-коррелированного случайного процесса (поля)*.

Применительно к задачам о динамических системах, движение которых подчиняется обыкновенным дифференциальным стохастическим уравнениям с гауссовыми флуктуациями параметров, используемый метод приводит к марковскому характеру решения задачи, а соответствующее уравнение для плотности вероятностей перехода имеет вид *уравнения Фоккера–Планка*. В книге подробно анализируются методы анализа этого уравнения и краевых условий для него, его решения с помощью интегральных преобразований и условия его применимости. В более сложных задачах, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, этот метод приводит к обобщенному уравнению типа Фоккера–Планка в вариационных производных для характеристического функционала решения задачи. Для динамических систем с негауссовыми флуктуациями параметров предлагаемый метод также приводит к марковскому характеру решения. Плотность вероятностей решения соответствующих динамических стохастических уравнений удовлетворяет при этом замкнутому операторному уравнению.

В физических работах, в которых используются уравнения Фоккера–Планка и подобные ему, они обычно выписываются на основе интуитивных соображений, а динамические уравнения привлекаются лишь для подсчета входящих в них коэффициентов. Такой подход, вообще говоря, непоследователен. Действительно, статистическая задача полностью определена динамическими уравнениями и предположениями о статистике случайных воздействий. При этом, например, уравнение Фоккера–Планка должно являться логическим следствием динамических уравнений и тех или иных предположений о характере случайных воздействий. Ясно, что далеко не во всех случаях решение задачи будет сводиться к уравнению Фоккера–Планка. Функциональный подход позволяет получить как уравнение Фоккера–Планка, исходя непосредственно из динамического уравнения задачи, так и условия его применимости. С формальной математической точки зрения наш подход соответствует подходу Р.Л. Стратоновича (см., например, [4]).

Развитый функциональный подход позволяет также для определенного класса случайных процессов (марковские процессы телеграфного типа, гауссов марковский процесс и т. п.) получать замкнутые уравнения для плотности вероятностей решения задач и с учетом конечности времени корреляции случайных воздействий.

Для гауссовых флуктуаций параметров можно построить и более физичное приближение, чем приближение дельта-коррелированного случайного процесса (поля), так называемое *диффузионное приближение*, учитывающее конечность временного радиуса корреляции. В этом приближении решение задачи является марковским, а условие его применимости имеет прозрачный физический смысл — малость статистических эффектов на масштабах порядка временного радиуса корреляции флуктуирующих параметров. Все эти вопросы подробно обсуждаются в данной книге как с общих позиций, так и на примерах конкретных физических проблем.

В последнее время внимание и теоретиков, и экспериментаторов привлекает воп-

рос о связи динамики усредненных статистических характеристик решения задачи с поведением решения в отдельных реализациях. Это особенно актуально для геофизических проблем, связанных с атмосферой и океаном, где, вообще говоря, отсутствует соответствующий ансамбль усреднения и экспериментаторы, как правило, имеют дело с отдельными реализациями.

Решение динамических задач для этих конкретных реализаций параметров среды практически безнадежно из-за их чрезвычайной математической сложности. В то же время исследователей интересуют основные особенности протекающих явлений, без отвлечения на частности. Поэтому очень привлекательной оказалась идея использовать хорошо развитый математический аппарат случайных процессов и полей, т. е. вместо отдельных реализаций исследуемых процессов рассматривать статистические средние по всему ансамблю возможных реализаций. В настоящее время, например, практически все задачи физики атмосферы и океана в той или иной степени основываются на статистическом анализе.

Введение случайности в параметрах среды порождает стохастичность в самих физических полях. Индивидуальные реализации, например скалярных двумерных полей $\rho(\mathbf{R}, t)$, $\mathbf{R} = \{x, y\}$, напоминают сложный горный ландшафт со случайно распределенными пиками, провалами, хребтами и перевалами. На рис. 0.1 приведены примеры реализаций двух случайных полей разной статистической структуры. О математическом и физическом смысле этих полей см. раздел 8.3 на с.194.

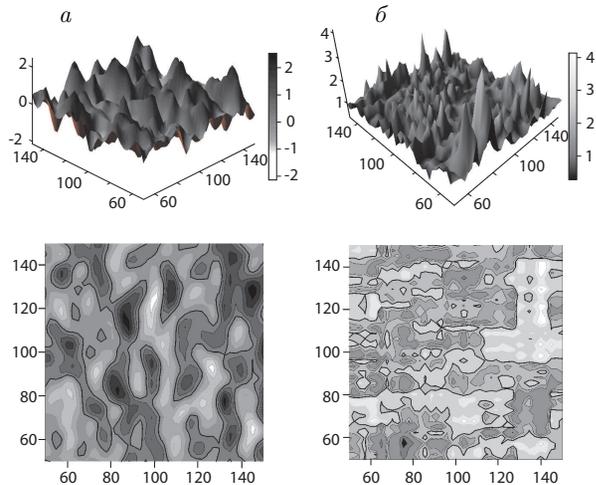


Рис. 0.1. Реализации гауссова с нулевым средним значением (а) и логнормального (б) полей и их топографические линии уровня. Жирными кривыми на нижних рисунках обозначены линии уровня, соответствующие значениям 0 (а) и 1 (б).

Обычно используемые методы статистического усреднения (т. е. вычисления среднего типа среднего значения — $\langle \rho(\mathbf{R}, t) \rangle$, пространственно-временной корреляционной функции — $\langle \rho(\mathbf{R}, t) \rho(\mathbf{R}', t') \rangle$ и т. п., где через $\langle \dots \rangle$ обозначено усреднение по ансамблю

реализаций случайных параметров) сглаживают качественные особенности отдельных реализаций, и зачастую полученные статистические характеристики не только не имеют ничего общего с поведением отдельных реализаций, но даже, на первый взгляд, им противоречат. Так, например, статистическое усреднение по всем реализациям делает поле средней концентрации пассивной примеси в случайном поле скоростей все более гладким, в то время как каждая его отдельная реализация, за счет перемешивания областей с существенно разной концентрацией, стремится стать все более изрезанной в пространстве.

Таким образом, статистические средние указанного типа обычно характеризуют «глобальные» пространственно-временные масштабы области, где осуществляются стохастические процессы, и ничего не говорят о деталях развития процессов внутри ее. А такие детали для данного примера существенно зависят от характера поля скоростей — является оно дивергентным или бездивергентным. Так, в первом случае с вероятностью, равной единице, в отдельных реализациях образуются *кластеры* — компактные области повышенной концентрации примеси, окруженные обширными областями плотности низкой концентрации. Однако при этом все статистические моменты расстояния между частицами экспоненциально растут во времени, т. е. имеет место статистическое разбегание частиц в среднем [5].

Аналогично этому имеет место экспоненциальное разбегание лучей в среднем при распространении волн в случайных средах, и в тоже время с вероятностью единица происходит образование *каустики* на конечных расстояниях. Другим примером, иллюстрирующим вышесказанное, является *динамическая локализация* плоских волн в слоистых случайно-неоднородных средах, заключающаяся в том, что реализации интенсивности волнового поля экспоненциально убывают вглубь среды с вероятностью, равной единице, при падении волны на полупространство такой среды и в то же время все ее статистические моменты экспоненциально растут с расстоянием от границы среды [6].

Такие физические процессы и явления, происходящие с вероятностью единица, будем называть *когерентными* процессами и явлениями (см., например, [7]). Подобную «статистическую когерентность» можно рассматривать как некую организацию сложной динамической системы, и выделение ее *статистически устойчивых характеристик* аналогично понятию *когерентности* как *самоорганизации* многокомпонентных систем, возникающих из хаотических взаимодействий их элементов (см., например, [8]). Получить же ответ на вопрос о том, происходит ли такое явление с вероятностью единица, вообще говоря, достаточно сложно. Однако для ряда задач в рамках простейших моделей флуктуирующих параметров это удается сделать путем аналитического анализа. В других случаях убедиться в этом можно с помощью численного моделирования или из анализа экспериментальных данных.

Полная статистика (например, полная совокупность всех n -точечных пространственно-временных моментных функций), безусловно, содержит всю информацию о динамической системе. Однако на практике удается исследовать лишь некоторые простейшие статистические характеристики, связанные, главным образом, с одновре-

менными и одноточечными распределениями вероятностей. Поэтому возникает вопрос: как, зная такого рода статистические характеристики и особенности системы, получить основные количественные и качественные особенности поведения отдельных ее реализаций?

Ответ на этот вопрос дают *методы статистической топографии* (см., например, [9]). Методы статистической топографии позволяют переосмыслить «философию» статистического анализа динамических стохастических систем, что может быть полезно и для экспериментаторов, планирующих статистическую обработку экспериментального материала. Все эти вопросы подробно обсуждаются в книге.

Монография предназначена для научных сотрудников, интересующихся математическим анализом стохастических задач физики. Однако она может быть полезна также студентам старших курсов и аспирантам математических и физических специальностей, имеющим дело со стохастическими динамическими системами. Книга состоит из трех частей.

Первую часть книги можно рассматривать как вводную. В ней рассмотрено несколько примеров типичных физических задач и обсуждаются особенности их решений в присутствии случайных возмущений параметров, определяющих их динамику. Более подробная постановка этих задач и их статистический анализ приведены в других частях книги.

Вторая часть книги посвящена общей теории статистического анализа динамических систем с флуктуирующими параметрами, описываемых как дифференциальными, так и интегральными уравнениями. Эта общая теория иллюстрируется конкретными примерами динамических систем. Здесь также рассматриваются такие асимптотические методы статистического анализа динамических систем, как приближение дельта-коррелированного случайного процесса (поля) и диффузионное приближение.

Третья часть книги посвящена анализу таких конкретных физических проблем, связанных с когерентными явлениями, как кластеризация и диффузия частиц и пассивной примеси (скалярной и векторной) в случайном поле скоростей, динамическая локализация при распространении плоских волн в слоистых случайных средах и возникновение каустической структуры волнового поля в многомерных случайных средах. Эти проблемы описываются как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных.

Каждый очерк дополнен задачами для самостоятельного решения, дополняющими общий текст книги, что должно помочь молодому исследователю быстрее «набить руку» для самостоятельной работы.

Более подробную информацию по существу излагаемого материала и библиографическим ссылкам можно найти в упомянутых выше монографиях [2, 3] и обзорных работах последнего времени [7, 10–15].

При подготовке этого издания автор старался учесть конкретные замечания и пожелания читателей как по улучшению стиля написания книги, так и по конкретным задачам. Исправлены различного рода неточности и опечатки.

Часть I

ДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О черк 1

ПРИМЕРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ И ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ ИХ РЕШЕНИЙ В ОТДЕЛЬНЫХ РЕАЛИЗАЦИЯХ

Рассмотрим несколько примеров динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями различного типа, и обсудим особенности поведения их решения в присутствии случайных возмущений параметров системы. Здесь мы ограничимся простейшими постановками задач. Более полные постановки задач будут даны далее в соответствующих разделах книги, посвященных их статистическому анализу.

1.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (задачи с начальными условиями)

1.1.1. Частицы в поле случайных скоростей

Частица в поле случайных скоростей в простейшем случае описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)$ — детерминированная составляющая поля скоростей (средний поток), а $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — случайная составляющая. В общем случае поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ может иметь как бездивергентную (соленоидальную, для которой $\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$), так и дивергентную (для которой $\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$) составляющие.

Остановимся на стохастических особенностях решения задачи (1.1) для системы частиц в отсутствии среднего потока ($\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = 0$). С формальной точки зрения, исходя из уравнения (1.1), каждая частица движется независим образом. Однако если случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ имеет конечный пространственный радиус корреляции l_{cor} , то частицы, расстояние между которыми меньше l_{cor} , находятся в общей зоне влияния случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, и могут появиться новые коллективные особенности в динамике такой системы частиц.

Для стационарного поля скоростей, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r})$, уравнение (1.1) упрощается и принимает вид

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0. \quad (1.2)$$

Отсюда ясно, что стационарные точки $\tilde{\mathbf{r}}$, в которых $\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{r}}) = 0$, остаются неподвижными точками. При этом, в зависимости от того, являются они устойчивыми или неустойчивыми, они будут притягивать или отталкивать частицы, находящиеся в их окрестности. В силу случайности функции $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ положение точек $\tilde{\mathbf{r}}$ также случайно.

Аналогичная ситуация должна иметь место и в общем случае пространственно-временного случайного поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$

Если какие-то точки $\tilde{\mathbf{r}}$ в течение достаточно большого времени остаются устойчивыми, то в отдельных реализациях случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ в их окрестностях должны образовываться кластерные области частиц (т. е. компактные области повышенной концентрации частиц, расположенные в большей степени в разреженных зонах). Если же смена устойчивости этих точек на неустойчивость происходит достаточно быстро и частицы не успевают значительно перестроиться, то кластерных областей образовываться не будет.

Численное моделирование [16, 17] показывает, что динамика системы частиц существенно различается в зависимости от того, является ли случайное поле скоростей бездивергентным или дивергентным. Так, на рис. 1.1, а для конкретной реализации бездивергентного стационарного во времени поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ схематически изображена эволюция системы частиц (двумерный случай), равномерно расположенных в круге, в безразмерном времени, связанным со статистическими параметрами поля $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. В этом случае площадь, ограниченная контуром, сохраняется и частицы относительно равномерно заполняют область, ограниченную деформированным контуром. Возникает лишь сильная изрезанность фрактального характера этого контура. Такое явление интенсивно изучается в настоящее время и получило название *хаотической адвекции* (см., например, [18]).

Для случая же потенциального поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ частицы, равномерно расположенные в квадрате в начальный момент времени, в процессе временной эволюции образуют кластерные области. Результаты численного моделирования для этого случая приведены на рис. 1.1, б. Подчеркнем, что образование кластеров — чисто кинематический эффект. Очевидно, что при усреднении по ансамблю реализаций случайного поля скоростей такая особенность динамики частиц исчезает.

Увидеть как происходит кластеризация частиц, можно на простейшем примере [10], в котором случайное поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ имеет структуру

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t)f(\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad (1.3)$$

где $\mathbf{v}(t)$ — случайный векторный процесс, а детерминированная функция от скалярного аргумента

$$f(\mathbf{k}\mathbf{r}) = \sin 2(\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (1.4)$$

является функцией одной переменной. Отметим, что такой вид функции $f(\mathbf{k}\mathbf{r})$ соответствует первому члену ряда разложения функции $f(\mathbf{k}\mathbf{r})$ по гармоническим составляющим и обычно используется при численном моделировании задачи [16, 17].

В этом случае уравнение (1.1) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t) \sin 2(\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0.$$

Для такой модели движение частицы по направлениям вектора \mathbf{k} , и перпендикулярном вектору \mathbf{k} , расщепляется, и если выбрать ось x в направлении вектора \mathbf{k} , то

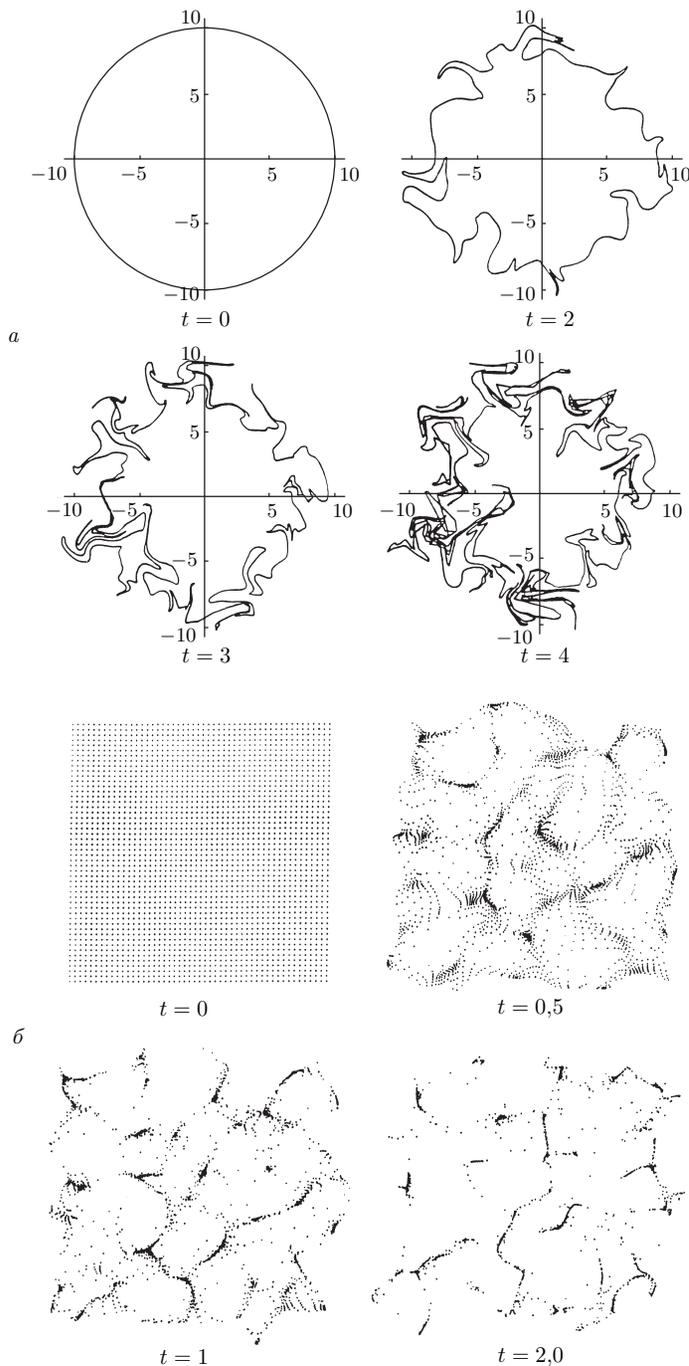


Рис. 1.1. Результаты численного моделирования диффузии системы частиц, описываемых уравнением (1.2) в соленоидальном (а) и потенциальном (б) случайных стационарных полях скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r})$

уравнения примут вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = v_x(t) \sin(2kx), \quad x(0) = x_0, \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{R}(t) = \mathbf{v}_R(t) \sin(2kx), \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0.$$

Решение первого уравнения в (1.5) имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{k} \arctan \left[e^{T(t)} \tan(kx_0) \right], \quad (1.6)$$

где

$$T(t) = 2k \int_0^t d\tau v_x(\tau). \quad (1.7)$$

Учитывая равенства, вытекающие из (1.6),

$$\begin{aligned} \sin(2kx) &= \frac{\sin(2kx_0)}{e^{-T(t)} \cos^2(kx_0) + e^{T(t)} \sin^2(kx_0)}, \\ \cos(2kx) &= \frac{1 - e^{2T(t)} \tan^2(kx_0)}{1 + e^{2T(t)} \tan^2(kx_0)}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

решение последнего уравнения в (1.5) можно записать в виде:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \int_0^t d\tau \frac{\sin(2kx_0) \mathbf{v}_R(\tau)}{e^{-T(\tau)} \cos^2(kx_0) + e^{T(\tau)} \sin^2(kx_0)}. \quad (1.9)$$

Таким образом, если начальное положение частицы x_0 такое, что

$$kx_0 = n \frac{\pi}{2}, \quad (1.10)$$

где $n = 0, \pm 1, \dots$, то частица будет неподвижной и $\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{r}_0$.

Равенства (1.10) определяют в общем случае плоскости или в одномерном случае — точки. Они соответствуют нулям поля скоростей. Устойчивость этих точек, однако, зависит от знака функции $\mathbf{v}(t)$, который изменяется в процессе эволюции. В результате можно ожидать, что частицы будут сгущаться в окрестностях этих точек, если $v_x(t) \neq 0$, что и должно соответствовать кластеризации.

Для бездивергентного поля скорости, когда $v_x(t) = 0$, и, следовательно, $T(t) \equiv 0$,

$$x(t|x_0) \equiv x_0, \quad \mathbf{R}(t|\mathbf{r}_0) = \mathbf{R}_0 + \sin 2(kx_0) \int_0^t d\tau \mathbf{v}_R(\tau),$$

т. е. никакой кластеризации не наблюдается.

При численном моделировании задачи будем использовать модель гауссового векторного случайного процесса $\mathbf{v}(t)$, дельта-коррелированного во времени, с параметрами

$$\langle \mathbf{v}(t) \rangle = 0 \quad \langle v_i(t) v_j(t') \rangle = 2\sigma^2 \delta_{ij} \tau_0 \delta(t - t'), \quad (1.11)$$

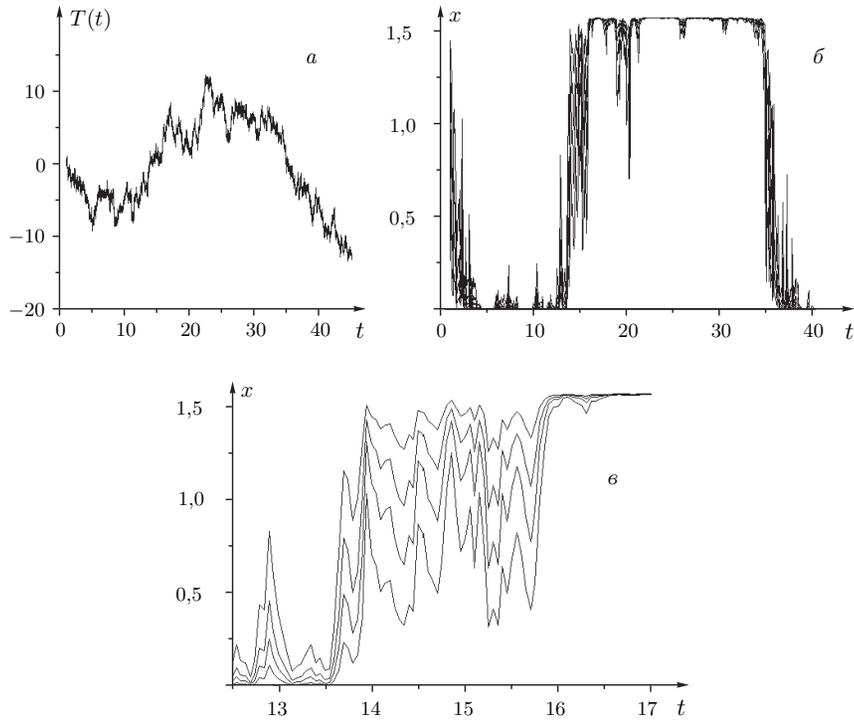


Рис. 1.2. Кусок реализации случайного процесса $T(t)$ (а), полученный путем численного интегрирования равенства (1.7) для одной реализации случайного процесса $v_x(t)$ и используемый для расчета временной эволюции x координат четырех частиц (б), (в)

где σ^2 — дисперсия каждой компоненты скорости, а τ_0 — ее временной радиус корреляции. При этом мы будем пользоваться безразмерными переменными

$$t \rightarrow k^2 \sigma^2 \tau_0 t, \quad x \rightarrow kx, \quad \langle v_i(t)v_j(t') \rangle \rightarrow 2\delta_{ij}\delta(t-t'). \quad (1.12)$$

На рис. 1.2, а представлен кусок реализации случайного процесса $T(t)$, полученный путем численного интегрирования равенства (1.7) для одной реализации случайного процесса $v_x(t)$, используемый для численного моделирования временной эволюции координат четырех частиц $x(t)$ ($x \in (0, \pi/2)$) с начальными координатами $x_0(i) = \frac{\pi i}{2 \cdot 5}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) (рис. 1.2, б). Из рис. 1.2, б видно, что частицы в безразмерный момент времени $t \approx 4$ образуют кластер в окрестности точки $x = 0$. Далее в момент времени $t \approx 16$ первоначальный кластер исчезает и образуется новый кластер в окрестности точки $x = \pi/2$. В момент времени $t \approx 40$ снова образуется кластер в окрестности точки $x = 0$ и т. д. При этом частицы в кластерах помнят свою предысторию и расходятся на значительные расстояния в переходных временных областях (рис. 1.2, в).

Таким образом видим, что в рассматриваемом примере кластер, как цельное обра-

зование, не переходит из одной области пространства в другое, а разрушается с последующим образованием нового. При этом время существования кластеров значительно больше, чем переходное время. По видимому это свойство конкретной рассматриваемой модели поля скоростей и возникает оно из-за стационарности точек (1.10).

Что касается диффузии частиц по y оси, то в этом направлении образования кластеров не наблюдается.

Отметим, что впервые, по-видимому, такого рода кластеризация для системы частиц была обнаружена в работах [19, 20], где в рамках простейших уравнений динамики атмосферы проводилось численное моделирование так называемого Eole эксперимента. В рамках этого глобального эксперимента в 1970–1971 годах было запущено в Аргентине 500 баллонов постоянной плотности, которые распространялись по всему южному полушарию на высоте примерно в 12 км. На рис. 1.3 представлено распределение баллонов по южному полушарию на 105 сутки после начала численного моделирования этого процесса [19], из которого ясно видно, что баллоны концентрируются в группы, что и соответствует кластеризации.

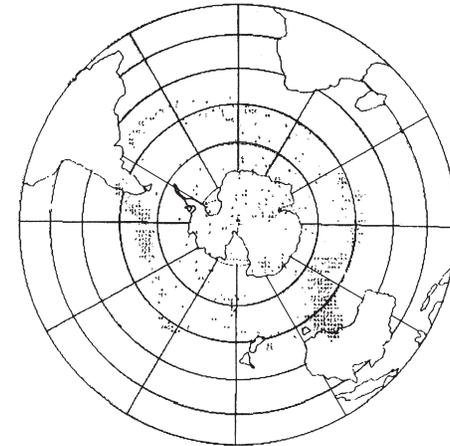


Рис. 1.3. Распределение баллонов в атмосфере через 105 суток после начала численного эксперимента

1.1.2. Частица в поле случайных внешних сил

Система уравнений типа (1.1) также описывает динамику частицы в поле случайных внешних сил $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$. В простейшем случае динамика частицы при наличии линейного трения описывается дифференциальным уравнением второго порядка (уравнение Ньютона)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) &= -\lambda \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_0, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{r}(0) = \mathbf{v}_0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

или системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}(t), & \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) &= -\lambda\mathbf{v}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_0, & \mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Отметим, что результаты численного моделирования стохастической системы уравнений (1.14) приведены в работах [21, 22]. В этих же работах изучалась устойчивость системы на основе анализа характеристических параметров по Ляпунову.

В детерминированном потенциальном поле сил динамика частицы при наличии линейного трения и случайных сил описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}(t), & \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) &= -\lambda\mathbf{v}(t) - \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_0, & \mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

которая является простейшим частным случаем *гамильтоновых систем* с линейным трением. При отсутствии трения и внешних сил, а также независимости от времени функции $U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r})$, имеется интеграл движения

$$\frac{d}{dt}E(t) = \text{const}, \quad E(t) = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + U(\mathbf{r}),$$

выражающий закон сохранения энергии.

В статистических задачах уравнения типа (1.14), (1.15) широко используются для описания *броуновского движения* частиц.

В общем случае гамильтоновые системы описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \frac{\partial H(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}}, & \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) &= -\frac{\partial H(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{r}}, \\ \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_0, & \mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_0, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где функция Гамильтона $H(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = H(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t)$. Для консервативных гамильтоновых систем функция $H(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ явно не зависит от времени, т. е. $H(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = H(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и, в этом случае, имеется интеграл движения

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \text{const}.$$

1.1.3. Явление переброса в динамических системах

Остановимся теперь на другом стохастическом аспекте, связанном с динамическими уравнениями типа (1.1), а именно на *явлении переброса*, обусловленном случайными флуктуациями.

Рассмотрим простейший случай нелинейного одномерного уравнения

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(1 - x^2) + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1.17)$$

где $f(t)$ — случайная функция времени. При отсутствии случайности ($f(t) \equiv 0$) решение уравнения (1.17) имеет два устойчивых стационарных состояния $x = \pm 1$ и одно неустойчивое состояние $x = 0$. В зависимости от начального условия решение уравнения (1.17) придет в одно из устойчивых состояний. Однако в присутствии малых случайных возмущений $f(t)$ динамическая система (1.17) сперва придет в окрестность одного из устойчивых состояний, а затем, по прошествии некоторого времени, будет переброшена в окрестность другого устойчивого состояния.

Отметим, что уравнение (1.17) соответствует предельному переходу $\lambda \rightarrow \infty$ в уравнении

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \lambda \frac{d}{dt}x(t) - \lambda \left\{ \frac{dU(x)}{dx} + f(t) \right\} = 0,$$

которое называется *уравнением Дюффинга* и является частным случаем одномерной гамильтоновой системы (1.15) вида

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(t), \quad \frac{d}{dt}v(t) = -\lambda \left\{ v(t) - \frac{dU(x)}{dx} - f(t) \right\} \quad (1.18)$$

с потенциальной функцией

$$U(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4},$$

т. е. предельному случаю большого значения коэффициента трения λ .

Статистическое описание этой задачи будет рассмотрено в п. 9.3 на с. 222. Отметим также, что в статистическом описании переход от гамильтоновой системы (1.18) к «укороченному уравнению» (1.17) называется *проблемой Крамерса* (см. п. 9.2.2 на с. 212).

Очевидно, что подобная ситуация может иметь место в более сложных случаях.

Нелинейные системы гидродинамического типа

При изучении крупномасштабных процессов в атмосфере, которая рассматривается как единая физическая система, одной из важнейших проблем является выяснение механизма обмена энергией между различными «степенями свободы». В последнее время все большее внимание привлекают попытки исследовать такие нелинейные процессы на моделях с небольшим числом степеней свободы (параметров). В связи с этим А. М. Обуховым (см., например, [23]) было введено понятие *систем гидродинамического типа* (СГТ). Эти системы имеют конечное число параметров v_1, \dots, v_n , но динамические уравнения, управляющие движением систем, обладают теми же общими свойствами, что и уравнения гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости — квадратичная нелинейность, сохранение энергии и регулярность (сохранение фазового объема при движении системы). Общее описание СГТ сформулировано в п. 9.2.3 на с. 213. Здесь же мы рассмотрим динамическое описание простейших систем этого типа.

Простейшая система (S_3) эквивалентна *уравнениям Эйлера* динамики твердого тела и может быть реализована в известной задаче о движении жидкости в эллипсоидальной полости [23]. Любые конечномерные аппроксимации уравнений гидродинамики, обладающие вышеописанными свойствами, относятся к классу СГТ.

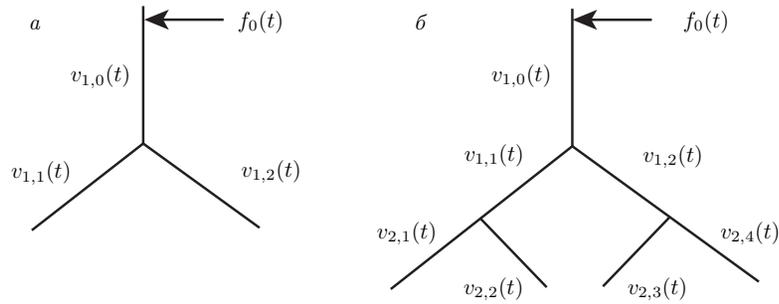


Рис. 1.4. Схемы 3-модовых (а) и 7-модовых (б) СГТ

Для моделирования каскадного механизма преобразования энергии в турбулентном потоке в работе [24] была предложена многоярусная СГТ. Каждый ярус этой системы состоит из триплетов одинакового масштаба, число которых при переходе на следующий ярус удваивается, а масштабы уменьшаются в геометрической прогрессии со знаменателем $Q \gtrsim 1$. Таким образом, эта модель описывает взаимодействие движений разных масштабов.

Первый ярус образован одним триплетом, на неустойчивую моду $v_{01}(t)$ которого действует приложенная к системе внешняя сила $f_0(t)$ (рис. 1.4, а). Его устойчивые моды $v_{1,1}(t)$ и $v_{1,2}(t)$ являются в тоже время неустойчивыми модами двух триплетов второго яруса, устойчивые моды $v_{2,1}(t)$, $v_{2,2}(t)$, $v_{2,3}(t)$, $v_{2,4}(t)$ (рис. 1.4, б) которых в свою очередь являются неустойчивыми модами четырех триплетов третьего яруса и т. д.

Вместе с тем следует отметить, что реальные физические процессы, описываемые макроскопическими уравнениями, в действительности протекают на фоне более мелкокомасштабных процессов (шумов), которые следует учитывать статистически. Такими процессами являются, например, молекулярные шумы для макроскопической гидродинамики, микротурбулентность по отношению к крупномасштабным движениям, влияние отброшенных (более мелкокомасштабных) членов в конечномерной аппроксимации уравнений гидродинамики и т. п. Статистический учет мелкокомасштабных шумов можно провести в рамках макроскопических переменных, включив в соответствующие макроскопические уравнения случайные (сторонние) силы с определенными статистическими характеристиками. Одновременно для рассматриваемых моделей следует ввести в уравнения движения также диссипативные члены, обуславливающие отток энергии в мелкокомасштабные моды.

Таким образом, простейшими гидродинамическими моделями для описания реальных процессов могут служить СГТ со случайными силами и линейным трением.

Одним из важных вопросов, например теории климата, является выяснение возможности реализации существенно различных циркуляционных процессов при одном и том же распределении притоков тепла, т. е. вопрос о существовании для данной гидродинамической системы различных режимов движения при одних и тех же «внешних

условиях». При этом естественно рассматривать также явление «переброса», состоящее в переходе системы от одного такого режима движения к другому. Характерной чертой перебросов является то, что переход происходит за время, малое по сравнению со «временем жизни» соответствующих режимов.

Все эти вопросы целесообразно исследовать на указанных выше простейших моделях. Соответствующие системы квадратично-нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений могут, вообще говоря, иметь несколько устойчивых режимов при одних и тех же значениях определенных параметров, характеризующих внешние условия. Тогда перебросы вызываются временными изменениями этих условий, а также действием случайных шумов. В отсутствие устойчивых режимов поведение системы может оказаться весьма сложным, доступным лишь статистическому описанию, как это происходит, например, в модели Лоренца [25]. Система может допускать и квазистационарные режимы движения, связанные с наличием безразличных состояний равновесия. Перебросы между такими режимами могут определяться динамической структурой системы, а ее поведение и в этом случае может оказываться «стохастическим».

Ниже такие явления переброса изучаются на простейших гидродинамических моделях.

Динамика триплета (гироскопа)

Рассмотрим вначале случай одного яруса, т. е. вынужденный режим движения триплета (рис. 1.4, а), полагая $f_0(t) = f_0$ постоянной и допуская наличие линейных диссипативных сил, действующих на его устойчивые моды. Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_{1,0}(t) &= \mu(v_{1,1}^2(t) - v_{1,2}^2(t)) + f_0, \\ \frac{d}{dt}v_{1,1}(t) &= -\mu v_{1,0}(t)v_{1,1}(t) - \lambda v_{1,1}(t), \\ \frac{d}{dt}v_{1,2}(t) &= \mu v_{1,0}(t)v_{1,2}(t) - \lambda v_{1,2}(t). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Если $f_0 > 0$, то компонента $v_{1,1}(t)$ отмирает со временем, и в безразмерных переменных

$$x = \sqrt{\frac{\mu}{f_0}}v_{1,0} - \frac{\lambda}{\sqrt{\mu f_0}}, \quad y = \sqrt{\frac{\mu}{f_0}}v_{1,2}, \quad \tau = \sqrt{\mu f_0}t \quad (1.20)$$

движение триплета (1.19) описывается двухмодовой системой

$$\frac{d}{dt}x(t) = -y^2(t) + 1, \quad \frac{d}{dt}y(t) = x(t)y(t), \quad (1.21)$$

имеющей интеграл движения $H_1 = x^2(t) + y^2(t) - 2 \ln y(t)$ и которую заменой переменных $p(t) = x(t)$, $q(t) = \ln y(t)$ можно привести к гамильтоновой форме

$$\frac{d}{dt}p(t) = -\frac{\partial \mathfrak{H}(p, q)}{\partial q}, \quad \frac{d}{dt}q(t) = \frac{\partial \mathfrak{H}(p, q)}{\partial p}$$

с гамильтонианом

$$\mathfrak{H}(p, q) = \frac{p^2(t)}{2} + \frac{1}{2}e^{2q(t)} - q(t).$$

Таким образом, динамика системы с трением (1.19), возбуждаемой постоянной внешней силой, описывается гамильтоновой системой.

Стационарные точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$ системы (1.21) являются центрами. Периоды T_1 движения по замкнутым траекториям вокруг каждой из этих особых точек (при этом $y(t)$ сохраняет знак) определяются для $H_1 - 1 \ll 1$ по асимптотической формуле

$$T_1 \approx \sqrt{2\pi} \left[1 + \frac{H_1 - 1}{12} \right].$$

В другом предельном случае, $H \gg 1$, когда траектории значительно удалены от указанных центров, получаем

$$T_1 \approx \frac{1}{\sqrt{H_1}} [2H_1 + \ln H_1].$$

Рассмотрим теперь динамическую систему (1.19), дополненную линейным трением для $v_{1,0}(t)$ компоненты, т. е. систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_{1,0}(t) &= \mu (v_{1,1}^2(t) - v_{1,2}^2(t)) - \lambda v_{1,0}(t) + f_0, \\ \frac{d}{dt}v_{1,1}(t) &= -\mu v_{1,0}(t)v_{1,1}(t) - \lambda v_{1,1}(t), \\ \frac{d}{dt}v_{1,2}(t) &= \mu v_{1,0}(t)v_{1,2}(t) - \lambda v_{1,2}(t). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Обезразмеривая эту систему, т. е. полагая

$$t \rightarrow t/\lambda, \quad v_{1,0}(t) \rightarrow \frac{\lambda}{\mu}v_0(t), \quad v_{1,2}(t) \rightarrow \frac{\lambda}{\mu}v_1(t), \quad v_{1,1}(t) \rightarrow \frac{\lambda}{\mu}v_2(t),$$

приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_0(t) &= v_2^2(t) - v_1^2(t) - v_0(t) + R, \\ \frac{d}{dt}v_1(t) &= v_0(t)v_1(t) - v_1(t), \\ \frac{d}{dt}v_2(t) &= -v_0(t)v_2(t) - v_2(t), \end{aligned} \quad (1.23)$$

где величина $R = \frac{\mu f_0}{\lambda^2}$ — аналог числа Рейнольдса.

Теперь динамическая система (1.23) имеет стационарные решения, зависящие от параметра R . При этом критическим значением является $R_{\text{cr}} = 1$.

При $R < 1$ имеется устойчивое стационарное решение

$$v_1 = v_2 = 0, \quad v_0 = R.$$

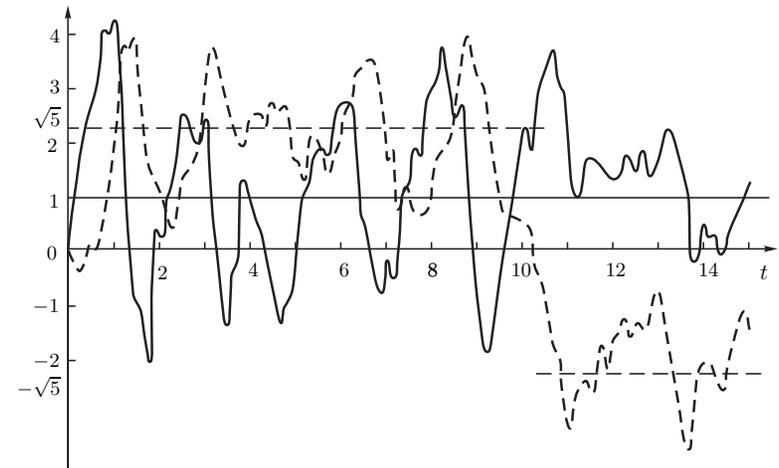


Рис. 1.5. Численное моделирование системы уравнений (1.25) для $R = 6$ и $\sigma^2 = 0,1$, иллюстрирующее явление переброса (сплошной линией изображена компонента $v_0(t)$, штриховой — $v_1(t)$)

При $R > 1$ это решение становится неустойчивым по отношению к малым возмущениям параметров, и устанавливается новый стационарный режим

$$v_0 = 1, \quad v_2 = 0, \quad v_1 = \pm\sqrt{R-1}. \quad (1.24)$$

При этом имеется элемент случайности, так как величина v_1 может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от амплитуды малых возмущений.

Пусть теперь на каждую компоненту триплета действуют случайные силы. Тогда вместо (1.23) имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_0(t) &= v_2^2(t) - v_1^2(t) - v_0(t) + R + f_0(t), \\ \frac{d}{dt}v_1(t) &= v_0(t)v_1(t) - v_1(t) + f_1(t), \\ \frac{d}{dt}v_2(t) &= -v_0(t)v_2(t) - v_2(t) + f_2(t). \end{aligned} \quad (1.25)$$

При наличии случайных воздействий при $R > 1$ динамическая система (1.25) сперва придет в окрестность одного из устойчивых состояний (1.24), а затем, по прошествии некоторого времени, будет переброшена в окрестность другого устойчивого состояния. На рис. 1.5 приведены результаты численного моделирования этого явления для $R = 6$ и различных реализаций случайного воздействия $\mathbf{f}(t)$, компоненты которого моделировались в виде гауссова случайного процесса. Статистическое описание этой задачи см. в Очерке 9 на с. 215.

Таким образом, в рамках динамики первого яруса переброс может осуществляться только за счет случайных внешних сил, действующих на все моды.

Переброс между квазистационарными режимами

Простейшая двухъярусная система в общем виде в безразмерных переменных, аналогичных (1.20), записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_{1,0}(t) &= v_{1,1}^2(t) - v_{1,2}^2(t) + 1, \\ \frac{d}{dt}v_{1,1}(t) &= -v_{1,0}(t)v_{1,1}(t) + Q(v_{2,1}^2(t) - v_{2,2}^2(t)), \\ \frac{d}{dt}v_{1,2}(t) &= -v_{1,0}(t)v_{1,2}(t) + Q(v_{2,3}^2(t) - v_{2,4}^2(t)), \\ \frac{d}{dt}v_{2,1}(t) &= -Qv_{1,1}(t)v_{2,1}(t), \quad \frac{d}{dt}v_{2,2}(t) = Qv_{1,1}(t)v_{2,2}(t), \\ \frac{d}{dt}v_{2,3}(t) &= -Qv_{1,2}(t)v_{2,3}(t), \quad \frac{d}{dt}v_{2,4}(t) = Qv_{1,2}(t)v_{2,4}(t). \end{aligned} \quad (1.26)$$

При $f_0 > 0$ возбужденными остаются лишь компоненты $v_{1,0}(t)$, $v_{1,2}(t)$, $v_{2,3}(t)$, и $v_{2,4}(t)$ (рис. 1.6).

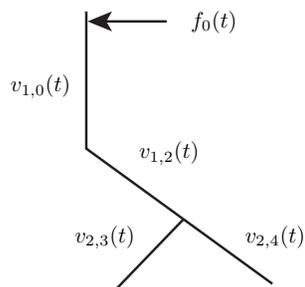


Рис. 1.6. Схема возбужденной 7-модовой СГТ

Система уравнений для этих компонент:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_{1,0}(t) &= -v_{1,2}^2(t) + 1, \\ \frac{d}{dt}v_{1,2}(t) &= -v_{1,0}(t)v_{1,2}(t) + Q(v_{2,3}^2(t) - v_{2,4}^2(t)), \\ \frac{d}{dt}v_{2,3}(t) &= -Qv_{1,2}(t)v_{2,3}(t), \quad \frac{d}{dt}v_{2,4}(t) = Qv_{1,2}(t)v_{2,4}(t), \end{aligned}$$

обладает интегралом движения

$$v_{2,3}(t)v_{2,4}(t) = I = \text{const.}$$

Вводя обозначения

$$x(t) = v_{1,0}(t), \quad y(t) = v_{1,2}(t), \quad z(t) = \frac{v_{2,4}(t)}{v_{2,3}(t)},$$

приходим к системе трех уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= -y^2(t) + 1, \\ \frac{d}{dt}y(t) &= x(t)y(t) + QI\left(\frac{1}{z(t)} - z(t)\right), \\ \frac{d}{dt}z(t) &= y(t)z(t), \end{aligned} \quad (1.27)$$

которая описывает поведение семимодовой модели (1.26).

Подключение второго яруса оказывает существенное влияние на динамику первого. Это объясняется тем, что сколь бы малыми ни были начальные значения для компонент $v_{2,3}(t)$ и $v_{2,4}(t)$ второго яруса, связанные с величиной постоянной I , переменная y поочередно меняет знак в силу уравнений (1.27).

Рассмотрим более подробно случай малых значений постоянной I . На рис. 1.7 дано численное решение уравнений (1.27) с начальными условиями: $x = 0,05$, $y = 1$, $z = 1$ при $Q = \sqrt{8}$, $I = 10^{-20}$.

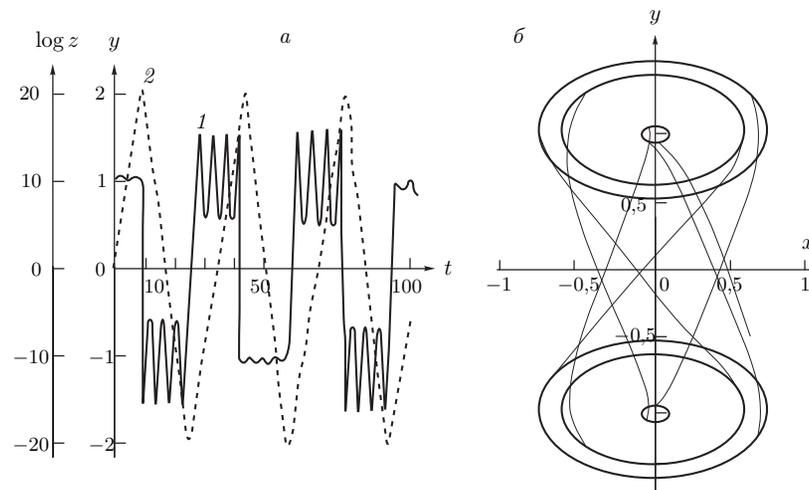


Рис. 1.7. Графики изменения во времени компонент системы (1.27) а: y (1), $\log z$ (2); б: проекция на плоскость x, y фазовой траектории системы (1.27)

Как видно из рисунков, система (1.27) при малых I участвует в двух движениях: «быстрых» — в малой окрестности той или иной замкнутой траектории гамильтоновой системы (1.21) вблизи плоскости $z = 1$ и в относительно редких перебросах, связанных со сменой знака у переменной y при $z \sim I$ или $z \sim -I^{-1}$. В результате каждого из этих перебросов параметры траекторий быстрых движений системы (1.27) существенно изменяются, что придает ее движению черты, характерные для динамических систем со странными аттракторами [25].

Для выделения «медленных» движений введем переменные X и Y :

$$x(t) = X(t)x_1(t), \quad y(t) = Y(t)y_1(t),$$

где $(x_1(t), y_1(t))$ — некоторое решение уравнений (1.21). Тогда для $X(t)$, $Y(t)$ и $z(t)$ из (1.27) находим

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X(t) &= \frac{1}{x_1(t)} \left[(X^2(t) - Y^2(t)) y_1^2(t) + 1 - X(t) \right], \\ \frac{d}{dt}Y(t) &= (X(t) - 1) Y(t) x_1(t) + \frac{QI}{y_1(t)} \left(\frac{1}{z(t)} - z(t) \right), \\ \frac{d}{dt}z(t) &= 2QY(t) y_1(t) z(t).\end{aligned}$$

Усредняя эти уравнения для медленно меняющихся величин по периоду¹ $T_1 = \sqrt{2}\pi$, получаем

$$\frac{d}{dt}X(t) = 0, \quad \frac{d}{dt}Y(t) = QI \left(\frac{1}{Z(t)} - Z(t) \right), \quad \frac{d}{dt}Z(t) = 2QY(t)Z(t), \quad (1.28)$$

где $Z = \tilde{z}(t)$. Система (1.28) обладает интегралом движения

$$H_2 = Y^2(t) + I \left(\frac{1}{Z(t)} + Z(t) \right) \quad (1.29)$$

и в соответствующих переменных, как и система (1.21), может быть записана в гамильтоновой форме. Движение системы (1.28) по замкнутым траекториям вокруг стационарной точки $(0, 1)$ характеризуется полупериодом T_2 (временем между перебросами), для которого находим

$$T_2 = \frac{2}{Q} \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{dZ}{Z \sqrt{H_2 - I \left(\frac{1}{Z} + Z \right)}} = \frac{1}{Q \sqrt{I (r + \sqrt{r^2 - 1})}} K \left(\sqrt{\frac{2\sqrt{r^2 - 1}}{r + \sqrt{r^2 - 1}}} \right),$$

где Z_1 и Z_2 — корни уравнения (1.29) при $Y = 0$; $r = 2H_2/I$; $K(z)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. При малых I

$$T_2 \approx \frac{1}{Q\sqrt{H_2}} \ln \left(\frac{4H_2}{I} \right). \quad (1.30)$$

На рис. 1.8 приведено численное решение уравнений (1.28) с начальными условиями $Y = 1$, $Z = 1$, отвечающими начальным условиям, выбранным ранее при решении уравнений (1.27), и с теми же значениями постоянных Q и I . Сравнение соответствующих графиков на рис. 1.7 и 1.8 демонстрирует удовлетворительное описание системой (1.28) перебросов в системе (1.27). Значения T_2 , найденные по формуле (1.30) и полученные в результате численного интегрирования уравнений (1.27), составляют соответственно 33,54 и 33,51. Отметим, что для системы (1.27) имеется еще одно характерное время $T_3 \sim 1/Q$, в течение которого осуществляется переброс.

¹Это выражение для T_1 оказывается достаточно точным для решения, изображенного на рис. 1.7. Значения гамильтониана для замкнутых траекторий системы (1.21), вблизи которых оно проходит, не превосходят двух. Поскольку указанные траектории заключены в малых окрестностях особых точек $(0, 1)$ и $(0, -1)$ этой системы, то при усреднении мы полагали $\tilde{y}_1(t) = 1$ и $1/\tilde{y}_1(t) = 1$.

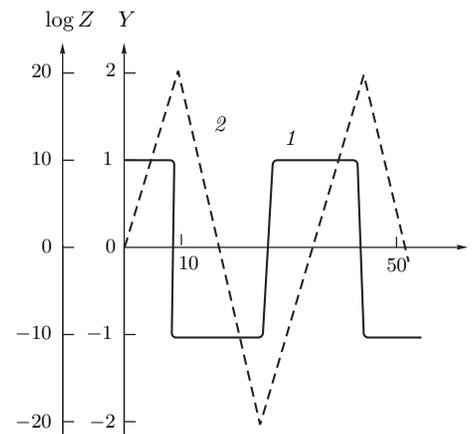


Рис. 1.8. Графики изменения во времени компонент системы (1.28): Y (1) и $\log Z$ (2)

Системы с сингулярным поведением

Рассмотрим простейший пример стохастической системы, возникающей в статистической теории волн и имеющей сингулярное поведение во времени:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\lambda x^2(t) + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad \lambda > 0, \quad (1.31)$$

где $f(t)$ — случайная функция времени.

В отсутствие случайностей решение уравнения (1.31) имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{\lambda(t - t_0)}, \quad t_0 = -\frac{1}{\lambda x_0}.$$

Если $x_0 > 0$, то $t_0 < 0$, и решение задачи $x(t)$ монотонно стремится к нулю с ростом времени. Если же $x_0 < 0$, то решение $x(t)$ обращается в $\{-\infty\}$ в течение конечного промежутка времени $t_0 = -1/\lambda x_0$, т.е. становится *сингулярным* и имеет *взрывной характер*. В этом случае влияние случайной силы $f(t)$ на динамику системы несущественно. Оно становится важным только в случае положительного значения x_0 . В этом случае решение задачи, слегка флуктуируя, уменьшается с ростом времени, оставаясь положительным. При достижении достаточно малого значения $x(t)$ оно будет «переброшено» под действием силы $f(t)$ в область отрицательных значений x и по прошествии некоторого конечного времени обратится в $-\infty$.

Таким образом, в стохастическом случае для любых значений величины x_0 решение задачи (1.31) имеет взрывной характер и обращается в $-\infty$ в течение конечного времени t_0 . Примерная реализация поведения решения задачи (1.31) $x(t)$ во времени для $t > t_0$ имеет как бы *квази-периодическую* структуру и схематически изображена на рис. 1.9.

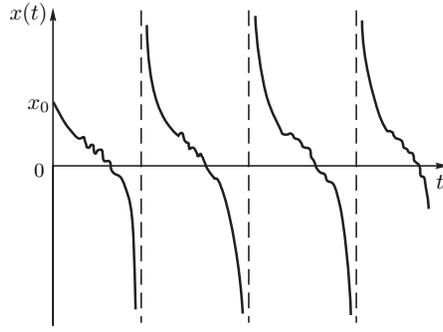


Рис. 1.9. Типичная реализация решения уравнения (1.31)

1.1.4. Осциллятор с переменной случайной частотой (стохастический параметрический резонанс)

Рассмотренные выше стохастические примеры соответствовали аддитивному включению случайных воздействий на динамику систем. Простейший нетривиальный пример мультипликативного воздействия (параметрического) можно проиллюстрировать на примере *стохастического параметрического резонанса*, описываемого уравнением второго порядка

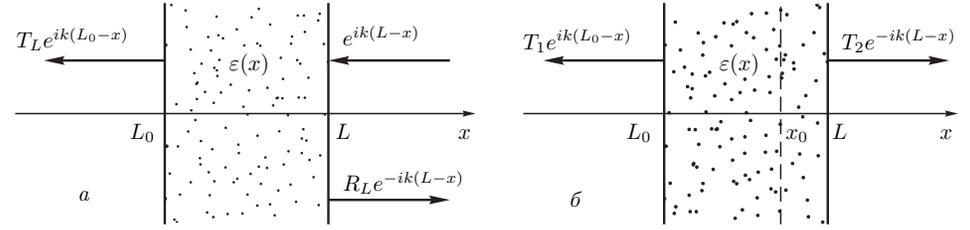
$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega_0^2[1 + z(t)]x(t) &= 0, \\ x(0) = x_0, \quad \frac{d}{dt}x(0) &= v_0, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где $z(t)$ — случайная функция времени. Это уравнение возникает практически во всех областях физики. С физической точки зрения очевидно, что динамическая система (1.32) подвержена параметрическому возбуждению, так как случайный процесс $z(t)$ содержит гармонические компоненты всех частот, включая значения $2\omega_0/n$ ($n = 1, 2, \dots$), которые в точности соответствуют параметрическому резонансу в системе с периодической функцией $z(t)$ (например, *уравнение Матье*).

1.2. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (плоские волны в слоистых средах)

В предыдущем разделе мы рассмотрели несколько примеров динамических систем, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями. Рассмотрим теперь простейшую линейную краевую задачу, а именно стационарную одномерную волновую задачу.

Пусть слой неоднородной среды занимает часть пространства $L_0 < x < L$. Плоская волна с единичной амплитудой $u_0(x) = e^{-ik(x-L)}$ падает на него из области $x > L$ (рис. 1.10, *a*). Волновое поле в слое неоднородной среды описывается *урав-*

Рис. 1.10. Падение плоской волны на слой среды (*a*) и источник внутри среды (*b*)

нением Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + k^2(x)u(x) = 0, \quad (1.33)$$

где

$$k^2(x) = k^2[1 + \varepsilon(x)],$$

а функция $\varepsilon(x)$ описывает неоднородности среды. Вне слоя считаем, что $k(x) = k$, т. е. $\varepsilon(x) = 0$; внутри же слоя предполагаем, что $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + i\gamma$, где $\varepsilon_1(x)$ — действительная часть, ответственная за процессы рассеяния волны в среде, а мнимая часть $\gamma \ll 1$ описывает поглощение волны в среде.

В области $x > L$ волновое поле имеет структуру

$$u(x) = e^{-ik(x-L)} + R_L e^{ik(x-L)},$$

где R_L — комплексный коэффициент отражения.

В области $x < L_0$ волновое поле имеет структуру

$$u(x) = T_L e^{ik(L_0-x)},$$

где T_L — комплексный коэффициент прохождения.

Краевыми условиями для уравнения (1.33) являются условия непрерывности функции и ее производной на границах слоя, которые можно записать в виде

$$u(L) + \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 2, \quad u(L_0) - \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (1.34)$$

Таким образом, волновое поле в слое неоднородной среды описывается краевой задачей (1.33), (1.34). Само же динамическое уравнение (1.33) по внешнему виду совпадает с уравнением (1.32). Отметим, что в этом случае функция $\varepsilon(x)$ разрывна на границах слоя и мы будем называть краевую задачу (1.33), (1.34) *краевой задачей с несогласованными границами*. Для таких задач рассеяние волны происходит не только на неоднородностях среды, но и на скачках функции $\varepsilon(x)$ на границах слоя.

Если параметры среды $\varepsilon_1(x)$ заданы статистически, то решение стохастической задачи (1.33), (1.34) состоит в нахождении статистических характеристик величин

$$R_L = u(L) - 1, \quad T_L = u(L_0),$$

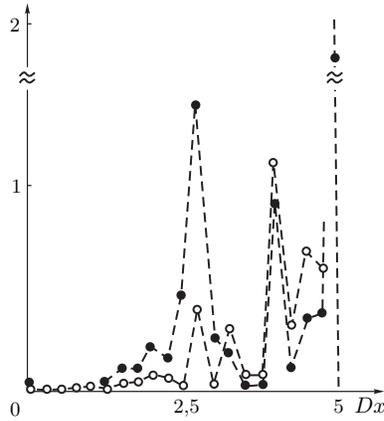


Рис. 1.11. Численное моделирование динамической локализации для двух реализаций неоднородностей среды

связанных со значением поля на границах слоя, и интенсивности волнового поля,

$$I(x) = |u(x)|^2$$

внутри неоднородной среды, что составляет предмет изучения *статистической теории переноса излучения*.

Отметим, что при $x < L$ из уравнения (1.33) следует равенство

$$k\gamma I(x) = \frac{d}{dx}S(x),$$

где плотность потока энергии $S(x)$ определяется выражением

$$S(x) = \frac{i}{2k} \left[u(x) \frac{d}{dx} u^*(x) - u^*(x) \frac{d}{dx} u(x) \right].$$

Из краевых условий следует, что $S(L) = 1 - |R_L|^2$ и $S(L_0) = |T_L|^2$, и для непоглощающей среды ($\gamma = 0$), сохранение плотности потока энергии выражается равенством

$$|R_L|^2 + |T_L|^2 = 1. \quad (1.35)$$

Остановимся на некоторых особенностях решения стохастической краевой задачи (1.33), (1.34). При отсутствии неоднородностей среды ($\varepsilon_1(x) = 0$) и для достаточно малого поглощения волны γ интенсивность волнового поля слабо, экспоненциальным образом, затухает в глубь среды по закону

$$I(x) = |u(x)|^2 = e^{-k\gamma(L-x)}. \quad (1.36)$$

На рис. 1.11 приведены две реализации интенсивности волнового поля в достаточно толстом слое среды, соответствующие двум реализациям неоднородностей среды, полученным численным моделированием и отличающимся тем, что для них функция

$\varepsilon_1(x)$ в середине слоя на расстоянии длины волны имеют разные знаки. Это позволяет увидеть влияние малой расстройки среды на поведение решения краевой задачи. Не останавливаясь на детальном описании параметров задачи, отметим только, что на этом рисунке явно просматривается тенденция резкого экспоненциального спада (с большими выбросами как в сторону увеличения величины интенсивности, так и к значениям, близким к нулю), обусловленная многократным переотражением волны в хаотически неоднородной среде (*динамическая локализация*). При этом параметр $\gamma \ll 1$ и, следовательно, влияние малого поглощения на динамическую локализацию не существенно.

Краевую задачу (1.33), (1.34) с помощью *метода погружения* (см. следующий параграф) можно переформулировать в виде динамической задачи с начальными условиями по параметру L — геометрическому положению правой границы слоя, рассматривая решение краевой задачи как функцию этого параметра. Так коэффициент отражения R_L удовлетворяет при этом уравнению Риккати:

$$\frac{d}{dL}R_L = 2ikR_L + \frac{ik}{2}\varepsilon(L)(1 + R_L)^2, \quad R_{L_0} = 0, \quad (1.37)$$

а волновое поле в слое среды $u(x) \equiv u(x; L)$ описывается линейным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial L}u(x; L) = ik u(x; L) + \frac{ik}{2}\varepsilon(L)(1 + R_L)u(x; L), \quad (1.38)$$

$$u(x; x) = 1 + R_x.$$

Из уравнения (1.37) при отсутствии затухания (т.е. при $\gamma = 0$) вытекает уравнение для квадрата модуля коэффициента отражения $W_L = |R_L|^2$:

$$\frac{d}{dL}W_L = -2k\gamma W_L - \frac{ik}{2}\varepsilon_1(L)(R_L - R_L^*)(1 - W_L), \quad W_{L_0} = 0. \quad (1.39)$$

Отметим, что если граница слоя L_0 является полностью отражающей границей, то начальным условием к уравнению (1.39) будет условие $W_{L_0} = 1$. В этом случае падающая на слой волна полностью отражается этим слоем, т.е. $W_L = 1$.

В общем случае произвольной границы L_0 для полупространства случайно-неоднородной среды ($L_0 \rightarrow -\infty$) при отсутствии затухания формально также имеется «стационарное», не зависящее от L , решение $W_L = 1$, соответствующее полному отражению падающей волны. Это решение, как будет показана далее, действительно осуществляется в статистической задаче с вероятностью, равной единице.

Если, в отличие от рассмотренной задачи, функция $k(x)$ непрерывна на границе $x = L$, т.е. волновое число в свободном полупространстве $x > L$ равно $k(L)$, то краевыми условиями для задачи (1.33), вместо условий (1.34), будут условия

$$u(L) + \frac{i}{k(L)} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 2, \quad u(L_0) - \frac{i}{k(L_0)} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (1.40)$$

Краевую задачу (1.33), (1.40) будем называть задачей *со согласованной границей*.

Аналогичным образом поле точечного источника, расположенного в слое случайно неоднородной среды, описывается краевой задачей для функции Грина уравнения Гельмгольца:

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x; x_0) + k^2[1 + \varepsilon(x)]G(x; x_0) = 2ik\delta(x - x_0),$$

$$G(L; x_0) + \frac{i}{k} \frac{dG(x; x_0)}{dx} \Big|_{x=L} = 0, \quad G(L_0; x_0) - \frac{i}{k} \frac{dG(x; x_0)}{dx} \Big|_{x=L_0} = 0.$$

Вне слоя среды решение в этом случае имеет вид уходящих волн (рис. 1.10, б):

$$G(x; x_0) = T_1 e^{ik(x-L)} \quad (x \geq L), \quad G(x; x_0) = T_2 e^{-ik(x-L_0)} \quad (x \leq L_0).$$

Положение источника на границе слоя $x_0 = L$ соответствует краевой задаче (1.33), (1.34) о падении волны на слой среды, т. е.

$$G(x; L) = u(x; L).$$

1.3. Уравнения в частных производных

Обратимся теперь к примерам динамических систем (динамических полей), описываемых уравнениями в частных производных.

1.3.1. Линейные уравнения в частных производных первого порядка Диффузия поля плотности в случайном поле скоростей

Простейшими задачами, описываемыми линейными уравнениями в частных производных первого порядка, являются уравнения непрерывности для плотности консервативной примеси и перенос неконсервативной пассивной примеси случайным полем скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (1.41)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) q(\mathbf{r}, t) = 0, \quad q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}). \quad (1.42)$$

Для консервативной примеси сохраняется общая масса примеси

$$M_0 = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r}) \quad (1.43)$$

Линейные уравнения в частных производных первого порядка (1.41), (1.42) могут быть решены методом характеристик. Вводя *характеристические кривые* (частицы)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (1.44)$$

эти уравнения можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = - \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(t), \quad \rho(0) = \rho_0(\mathbf{r}_0), \quad (1.45)$$

$$\frac{d}{dt} q(t) = 0, \quad q(0) = q_0(\mathbf{r}_0).$$

Такая формулировка задачи соответствует *лагранжеву описанию*, в то время как исходные динамические уравнения (1.41), (1.42) соответствуют *эйлерову описанию*.

Характеристический векторный параметр \mathbf{r}_0 введен в систему уравнений (1.44), (1.45). Уравнение (1.44) совпадает при этом с уравнением (1.1), описывающим динамику частицы в поле случайных скоростей.

Решение системы уравнений (1.44), (1.45) зависит от начального значения \mathbf{r}_0 , т. е.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0), \quad \rho(t) = \rho(t|\mathbf{r}_0), \quad (1.46)$$

что будем отмечать вертикальной чертой.

Первое из равенств (1.46) можно рассматривать как алгебраическое уравнение для характеристического параметра \mathbf{r}_0 , решение которого $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)$ существует, так как *расходимость* $j(t|\mathbf{r}_0) = \det \|\partial r_i(t|\mathbf{r}_0)/\partial r_{0k}\|$ отлична от нуля. Следовательно, решение исходного уравнения (1.41) можно записать в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(t|\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)) = \int d\mathbf{r}_0 \rho(t|\mathbf{r}_0) j(t|\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}).$$

Интегрируя это выражение по \mathbf{r} , получаем в силу (1.43) связь функций $\rho(t|\mathbf{r}_0)$ и $j(t|\mathbf{r}_0)$ в виде

$$\rho(t|\mathbf{r}_0) = \frac{\rho_0(\mathbf{r}_0)}{j(t|\mathbf{r}_0)} \quad (1.47)$$

и, следовательно, поле плотности можно переписать в виде равенства

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 \rho(t|\mathbf{r}_0) j(t|\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \quad (1.48)$$

устанавливающего связь между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками. Отметим, что дельта функция в правой части этого равенства является *индикаторной функцией* для положения лагранжевой частицы (см. следующую главу).

Для бездивергентного поля скоростей ($\text{div} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0$) расходимость частицы, также как и ее плотность сохраняются, т. е.

$$j(t|\mathbf{r}_0) = 1, \quad \rho(t|\mathbf{r}_0) = \rho_0(\mathbf{r}_0), \quad q(t|\mathbf{r}_0) = q_0(\mathbf{r}_0).$$

Остановимся теперь на стохастических особенностях решения задачи (1.41). Удобно анализировать динамику случайных полей в *топографических* понятиях. Так, для бездивергентного поля скоростей эволюция во времени контура постоянных значений концентрации $\rho = \text{const}$ совпадает с динамикой частиц в этом поле скоростей и совпадает, следовательно, с динамикой, приведенной на рис. 1.1, а. В этом случае площадь,

ограниченная контуром, сохраняется и, как видно из рисунка, возникает сильная изрезанность картины *фрактального характера*, т. е. происходит как обострение градиентов, так и возникновение динамики контура на все меньших и меньших масштабах. В другом предельном случае (дивергентного поля скоростей) площадь, ограниченная контуром, стремится к нулю и поле плотности сжимается, образуя *кластеры*. Примеры численного моделирования для этого случая приведены в работах [16, 17]. При усреднении по ансамблю реализаций эти особенности динамики исчезают.

Проследить образование кластеров в эйлеровом описании можно на примере случайного поля скоростей вида (1.3), (1.4) на с. 15. В этом случае уравнение для лагранжевого представления поля плотности (1.45) для однородного начального условия принимает вид

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -2kv_x(t)\cos(2kx)\rho(t), \quad \rho(0) = \rho_0,$$

которое с учетом равенства (1.8) на с. 17 можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\rho(t|\mathbf{r}_0) = -2kv_x(t)\frac{1 - e^{2T(t)}\tan^2(kx_0)}{1 + e^{2T(t)}\tan^2(kx_0)}\rho(t|\mathbf{r}_0), \quad (1.49)$$

где функция $T(t)$ описывается равенством (1.7) на с. 17. Интегрируя уравнение (1.49), получаем выражение для лагранжевого представления поля плотности в рамках рассматриваемой модели

$$\rho(t|x_0)/\rho_0 = \left[e^{-T(t)}\cos^2(kx_0) + e^{T(t)}\sin^2(kx_0) \right].$$

Исключая теперь характеристический параметр x_0 с помощью равенств

$$\begin{aligned} \sin^2(kx_0) &= \frac{e^{-T(t)}\sin^2(kx(t))}{e^{T(t)}\cos^2(kx(t)) + e^{-T(t)}\sin^2(kx(t))}, \\ \cos^2(kx_0) &= \frac{e^{T(t)}\cos^2(kx(t))}{e^{T(t)}\cos^2(kx(t)) + e^{-T(t)}\sin^2(kx(t))}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

вытекающих из (1.6) на с. 17 переходим к эйлеровому описанию

$$\rho(x, t)/\rho_0 = \frac{1}{e^{T(t)}\cos^2(kx) + e^{-T(t)}\sin^2(kx)}. \quad (1.51)$$

Из выражения (1.51) видно, что поле плотности везде незначительно, кроме окрестностей точек $kx = n\frac{\pi}{2}$, где $\rho(x, t)/\rho_0 = e^{\pm T(t)}$, и, следовательно, достаточно велико при соответствующем знаке случайного фактора $T(t)$.

Таким образом для рассматриваемой задачи кластерная структура поля плотности в эйлеровом описании формируется в окрестностях точек

$$kx = n\frac{\pi}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Отметим, что усредненная по пространственным переменным величина (1.51)

$$\overline{\rho(x, t)/\rho_0} = 1,$$

не зависит от случайного фактора $T(t)$, а для квадрата плотности получаем выражение, в основном, растущее во времени

$$\overline{(\rho(x, t)/\rho_0)^2} = \frac{1}{2} (e^{T(t)} + e^{-T(t)}),$$

Результаты расчета пространственно-временной эволюции реализации эйлерова поля плотности $1 + \rho(x, t)/\rho_0$ в безразмерных переменных (см. (1.12) на с. 18) представлены на рис. 1.12, *a-z* (единица добавлена, чтобы не иметь проблем с близкими к нулю значениями плотности в логарифмическом масштабе). Из этих рисунков наглядно видно последовательное перетекание поля плотности к узким окрестностям точек $x \approx 0$ и $x \approx \pi/2$, т. е. образование кластеров, где относительное значение плотности достигает значений порядка $10^3 - 10^4$, а во всем остальном пространстве имеет практически нулевые значения. Отметим, что в моменты времени t , в которые $T(t) = 0$, реализация поля плотности проходит через начальное однородное состояние.

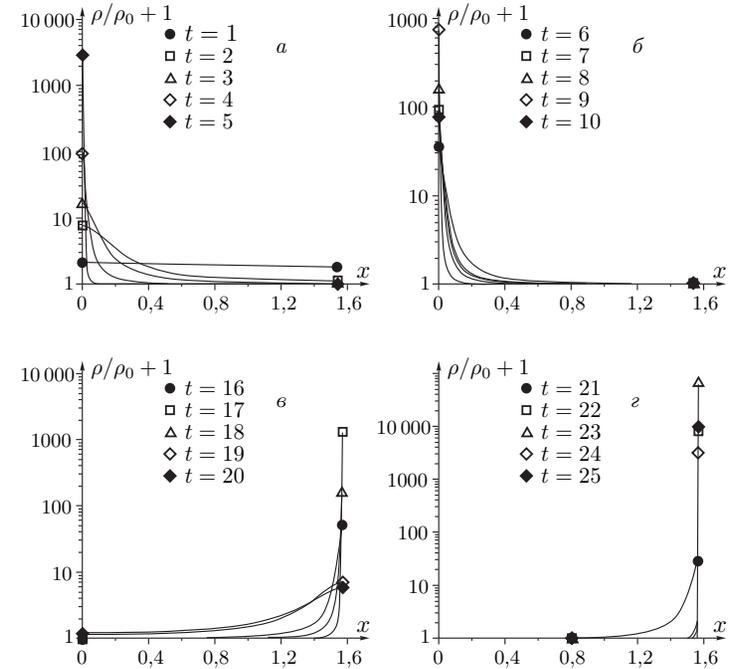


Рис. 1.12. Пространственно-временная эволюция эйлерова поля плотности, описываемая формулой (1.51)

Рассмотренная модель позволяет понять основное отличие диффузии в дивергентных и бездивергентных полях скоростей. В бездивергентных (несжимаемых) полях скорости частицы (и, следовательно, поле плотности) не успевают притягиваться к устойчивым центрам притяжения за время их существования и частицы слегка

флуктуируют относительно своего первоначального местонахождения. В дивергентном же (сжимаемом) поле скоростей за то же время существования устойчивых центров притяжения частицы успевают притянуться к ним, так как этот процесс притяжения убыстряется экспоненциальным образом, что наглядно проявляется в формуле (1.51).

Из описанной картины ясно, что динамическое уравнение (1.41) в качестве модельного уравнения, описывающего физическую реальность, может использоваться только на ограниченном интервале времени. Для более полного анализа необходимо включить в рассмотрение поле градиента концентрации примеси $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$, которое описывается уравнением (по повторяющимся индексам предполагается суммирование)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) p_i(\mathbf{r}, t) = -p_k(\mathbf{r}, t) \frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} - \rho(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i \partial \mathbf{r}}, \quad (1.52)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{p}_0(\mathbf{r}) = \nabla \rho_0(\mathbf{r}).$$

Кроме того, следует учесть также эффект молекулярной диффузии (с динамическим коэффициентом диффузии μ_ρ), сглаживающий упомянутое обострение градиентов, который описывается линейным уравнением в частных производных второго порядка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = \mu_\rho \Delta \rho(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}). \quad (1.53)$$

Диффузия магнитного поля в случайном поле скоростей

Диффузия таких пассивных полей, как поле плотности примеси (концентрация частиц) и магнитного поля, являются важной проблемой теории турбулентности в магнитной гидродинамике. Исходными стохастическими уравнениями для поля плотности примеси $\rho(\mathbf{r}, t)$ является уравнение непрерывности (1.41), рассмотренное в предыдущем пункте, и уравнение индукции для бездивергентного магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ ($\text{div } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0$) [26]

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{rot} [\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)], \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}), \quad (1.54)$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ гидродинамическое поле скоростей, а через псевдовектор $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ обозначено векторное произведение векторов \mathbf{A} и \mathbf{B}

$$C_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k,$$

где ε_{ijk} — псевдотензор, имеющий значение $\varepsilon_{ijk} = 0$, если индексы i , j и k не все различны, и $\varepsilon_{ijk} = 1$ или $\varepsilon_{ijk} = -1$, если индексы i , j и k все различны и расположены в циклическом или антициклическом порядке (см., например, [27]). При этом оператор

$$\text{rot } \mathbf{C}(\mathbf{r}, t) = [\nabla \times \mathbf{C}(\mathbf{r}, t)], \quad \text{rot } \mathbf{C}(\mathbf{r}, t)|_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} C_k(\mathbf{r}, t)$$

называется *вихрем* поля $\mathbf{C}(\mathbf{r}, t)$.

В общем случае магнитной гидродинамики поле скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ описывается уравнением Навье-Стокса, дополненным плотностью сторонних электромагнитных сил

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)].$$

Мы же, как и ранее, будем считать поле скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ случайным полем с заданными статистическими параметрами.

Произведение двух псевдотензоров ε уже является тензором и в этом случае имеет место равенство

$$\varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jpr} = \delta_{ij} \delta_{lp} \delta_{mq} + \delta_{ip} \delta_{lq} \delta_{mj} + \delta_{iq} \delta_{lj} \delta_{mp} - \delta_{ij} \delta_{lq} \delta_{mp} - \delta_{ip} \delta_{lj} \delta_{mq} - \delta_{iq} \delta_{lp} \delta_{mj} \quad (1.55)$$

и, следовательно, при $j = m$ (по повторяющимся индексам предполагается суммирование)

$$\varepsilon_{ilm} \varepsilon_{mpq} = (d-2)(\delta_{ip} \delta_{lq} - \delta_{iq} \delta_{lp}), \quad (1.56)$$

где d — размерность пространства, и в двумерном случае свертка обращается в нуль.

Таким образом для двойного векторного произведения получаем выражение

$$[\mathbf{C} \times [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]]_i = \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{mpq} C_l A_p B_q = C_q A_i B_q - C_p A_p B_i. \quad (1.57)$$

Так, если поля \mathbf{C} , \mathbf{A} и \mathbf{B} являются обычными векторными полями, то равенство (1.57) принимает вид

$$[\mathbf{C} \times [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]] = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B}. \quad (1.58)$$

Если же векторное поле $\mathbf{C} = \nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ является оператором, то из равенства (1.57) получаем выражение

$$\text{rot} [\mathbf{A}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (1.59)$$

Отметим, что если векторное поле $\mathbf{A} = \nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ является оператором в выражении (1.57), то, соответственно, получаем равенство

$$[\mathbf{C}(\mathbf{r}) \times \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r})] = C_q(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} B_q(\mathbf{r}) - \left(\mathbf{C}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

и, в частности,

$$[\mathbf{B}(\mathbf{r}) \times \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r})] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}) - \left(\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (1.60)$$

Таким образом, используя равенство (1.59), уравнение (1.54) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \left(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}). \quad (1.61)$$

Динамическая система (1.61) — консервативна и в процессе эволюции сохраняется поток магнитного поля $\int d\mathbf{r} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$.

Нас интересует эволюция магнитного поля в пространстве и во времени для заданных гладких начальных распределений, и, в частности, просто однородных $\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0$. Ясно, что на начальных этапах развития диффузии эффект действия динамической диффузии не существен и именно этот случай описывается уравнением (11.2). Для дальнейшей эволюции необходимо принимать во внимание эффект действия динамической диффузии, который описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \left(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mu_{\mathbf{H}} \Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (1.62)$$

где $\mu_{\mathbf{H}}$ – динамический коэффициент диффузии для магнитного поля.

Отметим, что для модели поля скоростей (1.3), (1.4) на с. 15 в случае отсутствия динамической диффузии также можно получить явные выражения для магнитного поля, аналогично случаю плотности примеси [14]. Для этой модели уравнение индукции для однородного начального условия (11.2) принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x(t) \sin 2(kx) \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{H}(x, t) = 2k \cos 2(kx) [\mathbf{v}(t) H_x(x, t) - v_x(t) \mathbf{H}(x, t)],$$

$$\mathbf{H}(x, 0) = \mathbf{H}_0,$$

откуда видно, что x -компонента магнитного поля сохраняется (т.е. $H_x(x, t) = H_{x0}$), а в поперечной (y, z) плоскости появляется дополнительный источник (генерация) магнитного поля из-за наличия H_{x0}

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x(t) \sin 2(kx) \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{H}_{\perp}(\mathbf{r}, t) = 2k \cos 2(kx) [\mathbf{v}_{\perp}(t) H_{x0} - v_x(t) \mathbf{H}_{\perp}(x, t)],$$

$$\mathbf{H}_{\perp}(x, 0) = \mathbf{H}_{\perp 0}. \quad (1.63)$$

Уравнение (1.63) является уравнением в частных производных и его можно решать методом характеристик (лагранжево описание). Уравнения для характеристик имеют вид

$$\frac{d}{dt} x(t|x_0) = v_x(t) \sin 2(kx(t|x_0)), \quad x(0|x_0) = x_0, \quad (1.64)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H}_{\perp}(t|x_0) = 2k \cos 2(kx|x_0) [\mathbf{v}_{\perp}(t) H_{x0} - v_x(t) \mathbf{H}_{\perp}(t|x_0)], \quad \mathbf{H}_{\perp}(0|x_0) = \mathbf{H}_{\perp 0},$$

где вертикальной чертой указана зависимость от характеристического параметра x_0 .

Первое уравнение в (1.64) описывает диффузию частиц и его решение имеет вид

$$x(t|x_0) = \frac{1}{k} \arctan \left[e^{T(t)} \tan(kx_0) \right],$$

где функция $T(t)$ описывается равенством (1.7) на с. 17. Решение уравнения для магнитного поля имеет вид

$$\mathbf{H}_{\perp}(t|x_0) = \left[e^{-T(t)} \cos^2(kx_0) + e^{T(t)} \sin^2(kx_0) \right] \mathbf{H}_{\perp 0} +$$

$$+ 2k \left[e^{-T(t)} \cos^2(kx_0) + e^{T(t)} \sin^2(kx_0) \right] \times$$

$$\times \int_0^t d\tau \frac{\left[e^{-T(\tau)} \cos^2(kx_0) - e^{T(\tau)} \sin^2(kx_0) \right]}{\left[e^{-T(\tau)} \cos^2(kx_0) + e^{T(\tau)} \sin^2(kx_0) \right]^2} v_x(\tau) \mathbf{v}_{\perp}(\tau) H_{x0}.$$

Исключая теперь характеристический параметр x_0 с помощью равенств (1.50) на с. 36, переходим к эйлеровому описанию

$$\mathbf{H}_{\perp}(x, t) = \frac{\rho(x, t)}{\rho_0} \mathbf{H}_{\perp 0} +$$

$$+ 2k H_{x0} \int_0^t d\tau \frac{\left[e^{T(t)-T(\tau)} \cos^2(kx) - e^{-T(t)+T(\tau)} \sin^2(kx) \right]}{\left[e^{T(t)-T(\tau)} \cos^2(kx) + e^{-T(t)+T(\tau)} \sin^2(kx) \right]^2} v_x(\tau) \mathbf{v}_{\perp}(\tau), \quad (1.65)$$

где плотность пассивной примеси $\rho(x, t)$ описывается равенством (1.51). Выполняя теперь в выражении (1.65) замену переменных интегрирования $t - \tau = \lambda$, можно переписать его в виде

$$\mathbf{H}_{\perp}(x, t) = \frac{\rho(x, t)}{\rho_0} \mathbf{H}_{\perp 0} +$$

$$+ 2k H_{x0} \int_0^t d\lambda \frac{\left[e^{T(t)-T(\tau)} \cos^2(kx) - e^{-T(t)+T(\tau)} \sin^2(kx) \right]}{\left[e^{T(t)-T(\tau)} \cos^2(kx) + e^{-T(t)+T(\tau)} \sin^2(kx) \right]^2} v_x(t - \lambda) \mathbf{v}_{\perp}(t - \lambda),$$

где

$$T(t) - T(\tau) = \int_{\tau}^t d\xi v_x(\xi) = \int_0^{t-\tau} d\eta v_x(t - \eta) = \int_0^{\lambda} d\eta v_x(t - \eta)$$

и, следовательно, для одновременных статистических характеристик магнитного поля, в силу стационарности поля скоростей (см. например, равенство (4.26) на с. 96), можно заменить

$$v_x(t - \lambda) \rightarrow v_x(\lambda),$$

т.е. переписать выражение (1.65) в статистически эквивалентном виде

$$\mathbf{H}_{\perp}(x, t) = \frac{\rho(x, t)}{\rho_0} \mathbf{H}_{\perp 0} + 2k H_{x0} \int_0^t d\tau \frac{\left[e^{T(\tau)} \cos^2(kx) - e^{-T(\tau)} \sin^2(kx) \right]}{\left[e^{T(\tau)} \cos^2(kx) + e^{-T(\tau)} \sin^2(kx) \right]^2} v_x(\tau) \mathbf{v}_{\perp}(\tau). \quad (1.66)$$

Первое слагаемое описывает кластеризацию магнитного поля по типу кластеризации поля плотности, если величина $\mathbf{H}_{\perp 0} \neq 0$. Второе слагаемое описывает генерацию магнитного поля в поперечной (y, z) плоскости из-за наличия начального поля H_{x0} . И при $\mathbf{H}_{\perp 0} = 0$ это слагаемое, пропорциональное квадрату случайного поля скорости, определяет ситуацию. Структура этого поля подобно полю плотности также кластеризуется.

На рисунках 1.13, 1.14 представлены результаты расчета пространственно-временной эволюции реализации энергии генерируемого магнитного поля в поперечной плоскости $E(x, t) = \mathbf{H}_{\perp}^2(x, t)$ в безразмерных переменных (см. (1.12) на с. 18) при $\mathbf{H}_{\perp 0} = 0$ для той же реализации случайного процесса $T(t)$ что и ранее, представленной на рис. 1.2, а.

Прежде всего отметим, что полная энергия генерируемого магнитного поля, сосредоточенная на отрезке $[0, \pi/2]$, быстро растет во времени (рис. 1.13 а), а общая

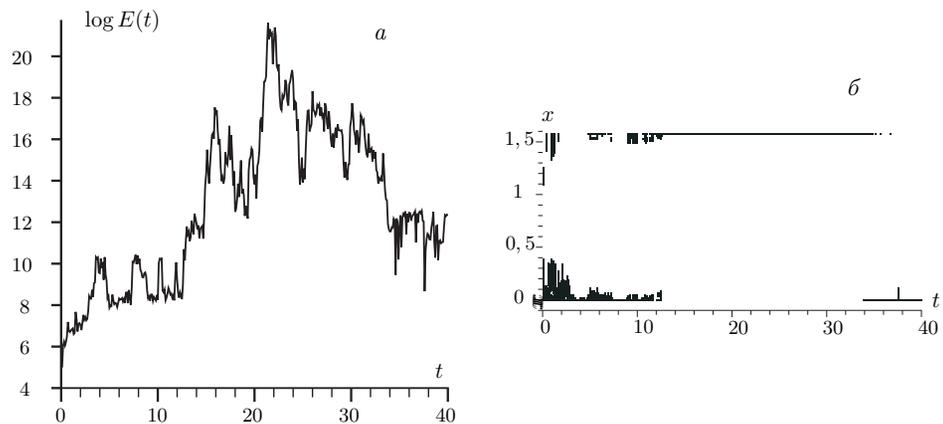


Рис. 1.13. Эволюция во времени полной энергии магнитного поля на отрезке $[0, \pi/2]$ (а) и структура кластеров на x, t плоскости (б)

пространственно-временная структура кластеризации энергии магнитного поля также приведена на этом рисунке (рис. 1.13 б). Эта структура рассчитывалась следующим образом. По оси x отложены координаты точек x_i , а по оси t отложено время (с шагом 0.1). Точки помечены либо белым маркером (те не видны), если содержат менее 1% энергии, имеющейся во всем слое при текущем значении t , и черным квадратиком, если содержат более 1% энергии, имеющейся в данный момент времени во всем слое. Всего же имеется 40000 точек (100 шагов по x и 400 по времени).

Более детальная картина эволюции кластеров во времени представлена на рис. 1.14, а, где в процентном отношении представлена доля энергии генерируемого магнитного поля, содержащаяся в кластере, ко всей энергии в слое, на рассматриваемый момент времени и на рис. 1.14, б, где видна динамика перетекания возмущений магнитной энергии от одной границы области к другой.

Для иллюстрации примера структурообразования в магнитном поле приведу выписку из интернет - страницы:

"Что же так сильно озадачило астрофизиков?"

Вопреки сформировавшимся за пятьдесят лет гипотезам, наблюдатели столкнулись на границе Солнечной системы не с линейным и постепенно убывающим магнитным полем, или магнитным *ламинаром*, а с кипящей пеной из локально намагниченных областей протяженностью сотни миллионов километров каждый - подвижной ячеистой структурой, внутри которой линии магнитного поля постоянно разрываются, рекомбинируются и образуют новые области - *магнитные "пузыри"* (см. рис. 1.15)².

²http://www.gazeta.ru/science/2011/06/17_a_3664677.shtml

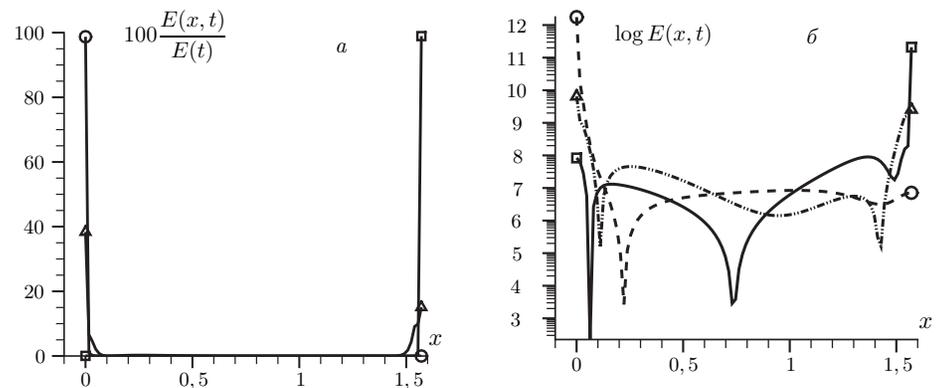


Рис. 1.14. Динамика исчезновения кластера в точке 0 и возникновения кластера в точке $\pi/2$. Кругом обозначен момент времени $t = 10, 4$, треугольником - $t = 10, 8$, квадратом - $t = 11, 8$

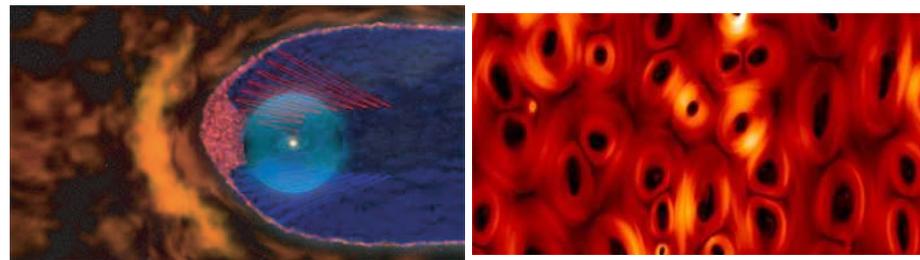


Рис. 1.15. Магнитная обстановка на границе гелиосферы, как она, скорее всего, выглядит в действительности. Условная интерпретация (слева). И система магнитных пузырей (справа). Диаметр каждого пузыря составляет порядка 100 млн километров. Компьютерная модель.// Nature

1.3.2. Квазилинейные и нелинейные уравнения с производными первого порядка

Рассмотрим теперь простейшее квазилинейное уравнение для скалярной величины $q(\mathbf{r}, t)$, которое запишем в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) q(\mathbf{r}, t) = Q(t, q), \quad q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}), \quad (1.67)$$

где, для простоты изложения, считаем функции $\mathbf{U}(t, q)$ и $Q(t, q)$ явно не зависящими от пространственной переменной \mathbf{r} .

Дополним уравнение (1.67) уравнением для поля градиента $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla q(\mathbf{r}, t)$, вытекающим из (1.67), и уравнением непрерывности для сохраняющейся величины $I(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \{ \mathbf{U}(t, q) \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \}}{\partial q} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial Q(t, q)}{\partial q} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} I(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \{ \mathbf{U}(t, q) I(\mathbf{r}, t) \} &= 0. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Из (1.68) следует, что

$$\int d\mathbf{r} I(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} I_0(\mathbf{r}). \quad (1.69)$$

С помощью характеристических кривых, определяемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения (1.67) и (1.68) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{U}(t, q), \quad \frac{d}{dt}q(t) = Q(t, q), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad q(0) = q_0(\mathbf{r}_0), \\ \frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) &= -\frac{\partial\{\mathbf{U}(t, q)\mathbf{p}(t)\}}{\partial q}\mathbf{p}(t) + \frac{\partial Q(t, q)}{\partial q}\mathbf{p}(t), \quad \mathbf{p}(0) = \frac{\partial q_0(\mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{r}_0}, \\ \frac{d}{dt}I(t) &= -\frac{\partial\{\mathbf{U}(t, q)\mathbf{p}(t)\}}{\partial q}I(t), \quad I(0) = I_0(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (1.70)$$

Таким образом, в лагранжевом описании мы имеем в качестве исходной задачи систему уравнений (1.70). При этом первые два уравнения, определяющие характеристические кривые, являются замкнутой системой уравнений.

Выражая теперь характеристический параметр \mathbf{r}_0 через \mathbf{r} и t , т.е. в виде $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)$, можно в эйлеровом описании записать решение уравнений (1.67) и (1.68) в виде

$$\begin{aligned} q(\mathbf{r}, t) &= \int d\mathbf{r}_0 q(t|\mathbf{r}_0) j(t|\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \\ I(\mathbf{r}, t) &= \int d\mathbf{r}_0 I(t|\mathbf{r}_0) j(t|\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.71)$$

Особенностью перехода от лагранжевого описания (1.70) к эйлеровому (1.71) является то обстоятельство, что теперь возникают, как правило, неоднозначности, что приводит к разрывности решения (1.71). Это связано с тем, что теперь расходимость $j(t|\mathbf{r}_0) = \det \left\| \frac{\partial}{\partial r_{0k}} r_i(t|\mathbf{r}_0) \right\|$ — определитель Якобиевой матрицы (*Якобиан*) может обращаться в нуль в некоторые моменты времени.

Величины $I(t|\mathbf{r}_0)$ и $j(t|\mathbf{r}_0)$ не являются независимыми. В самом деле, интегрируя $I(\mathbf{r}, t)$ в (1.71) по \mathbf{r} и учитывая равенство (1.69), видим, что имеется интеграл эволюции

$$j(t|\mathbf{r}_0) = \frac{I_0(\mathbf{r}_0)}{I(t|\mathbf{r}_0)}, \quad (1.72)$$

откуда следует, что обращение в нуль расходимости $j(t|\mathbf{r}_0)$ сопровождается обращением консервативной величины $I(t|\mathbf{r}_0)$ в бесконечность.

Все эти результаты, очевидно, легко обобщаются на случай, когда функции $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t, q)$ и $Q(\mathbf{r}, t, q)$ в (1.67) явно зависят от пространственной переменной \mathbf{r} , а также когда само уравнение (1.67) является векторным уравнением.

В качестве конкретного физического примера приведем уравнение для поля скорости малоинерционных частиц $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ в гидродинамическом потоке, описываемым полем скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ (см, например, [28])

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -\lambda [\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)]. \quad (1.73)$$

Мы будем рассматривать это уравнение как феноменологическое.

В общем случае решение уравнения (1.73) может быть неединственным, иметь разрывы и т.п. Однако, в асимптотическом случае малой инерционности частиц (параметр $\lambda \rightarrow \infty$), который и представляет для нас интерес, решение будет единственным на разумном интервале времени. Отметим, что линейный по полю скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ член в правой части (1.73) $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \lambda \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ является известной *формулой Стокса* для силы сопротивления, действующей на медленно движущуюся частицу. При аппроксимации частицы шаром с радиусом a , параметр $\lambda = 6\pi a\eta/m_p$, где η — коэффициент динамической вязкости, а m_p — масса частицы (см., например, [29]).

Из уравнения (1.73) вытекает, что поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ является дивергентным полем ($\text{div } \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \neq 0$) даже для бездивергентного гидродинамического потока $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ($\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$), и, как следствие, возникает кластеризация поля плотности числа частиц $n(\mathbf{r}, t)$ в бездивергентных гидродинамических потоках [30], описываемого линейным уравнением непрерывности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \right) n(\mathbf{r}, t) = 0, \quad n(\mathbf{r}, 0) = n_0(\mathbf{r}) \quad (1.74)$$

типа уравнения (1.41).

Для большого значения параметра $\lambda \rightarrow \infty$ (безинерционные частицы)

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad (1.75)$$

и кластеризация поля плотности числа частиц $n(\mathbf{r}, t)$ в бездивергентных гидродинамических потоках отсутствует.

Уравнение в частных производных первого порядка (1.73) (эйлерово описание) эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных характеристических уравнений (лагранжево описание)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{V}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (1.76)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{V}(t) = -\lambda [\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t)], \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_0(\mathbf{r}_0),$$

которые описывают диффузию частицы под действием случайной внешней силы с линейным трением и совпадают с уравнением (1.14).

Обычно, в статистическом описании, флуктуации гидродинамического поля скорости считаются достаточно малыми. Поэтому можно линеаризовать систему уравнений (1.76) и переписать ее в случае отсутствия среднего потока в виде (с нулевыми начальными условиями, для простоты)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}(t), \quad \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = -\lambda [\mathbf{v}(t) - \mathbf{f}(t)], \\ \mathbf{r}(0) &= 0, \quad \mathbf{v}(0) = 0, \end{aligned} \quad (1.77)$$

решение которой можно записать в явном виде

$$\mathbf{v}(t) = \lambda \int_0^t d\tau e^{-\lambda(t-\tau)} \mathbf{f}(\tau), \quad \mathbf{r}(t) = \int_0^t d\tau [1 - e^{-\lambda(t-\tau)}] \mathbf{f}(\tau).$$

Отметим, что замкнутое линейное уравнение первого порядка для скорости $\mathbf{v}(t)$ называется *уравнением Ланжевена*.

Вернемся теперь к уравнению (1.73). Полагая параметр $\lambda = 0$, получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{V}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{V}_0(\mathbf{r}), \quad (1.78)$$

которое называется *уравнением Римана*. Это уравнение описывает свободное распространение *римановской нелинейной волны*. Его решение удовлетворяет, очевидно, трансцендентному уравнению

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_0(\mathbf{r} - t\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)).$$

В частном случае одномерного уравнения, соответствующего в уравнении (1.67) величинам $\mathbf{U}(t, q) = q(x, t)$ и $Q(t, q) = 0$, т. е. уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + q(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \right) q(x, t) = 0, \quad q(x, 0) = q_0(x), \quad (1.79)$$

можно выписать его решение как в неявном, так и в явном виде.

Решая уравнение (1.79) методом характеристик, получаем, что

$$q(t|x_0) = q_0(x_0), \quad x(t|x_0) = x_0 + tq_0(x_0),$$

и, следовательно, решение уравнения (1.79) имеет вид трансцендентного равенства

$$q(x, t) = q_0(x - tq(x, t)). \quad (1.80)$$

Отсюда следует выражение для пространственной производной

$$p(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) = \frac{q'_0(x_0)}{1 + tq'_0(x_0)}, \quad (1.81)$$

где

$$x_0 = x - tq(x, t) \quad \text{и} \quad q'_0(x_0) = \frac{d}{dx_0} q_0(x_0).$$

При этом сама функция $p(x, t)$ описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + q(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \right) p(x, t) = -p^2(x, t), \quad p(x, 0) = p_0(x) = q'_0(x). \quad (1.82)$$

Выпишем также, для полноты картины, уравнение непрерывности для поля плотности $\rho(x, t)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + q(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho(x, t) = -p(x, t)\rho(x, t), \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad (1.83)$$

и его логарифма $\chi(x, t) = \ln \rho(x, t)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + q(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \right) \chi(x, t) = -p(x, t), \quad \chi(x, 0) = \chi_0(x), \quad (1.84)$$

связанных с уравнением Римана (1.79). При этом решение уравнения (1.83) имеет вид

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0(x_0)}{1 + tq_0(x_0)} = \frac{\rho_0(x - tq(x, t))}{1 + tq_0(x - tq(x, t))}. \quad (1.85)$$

Если $q'_0(x_0) < 0$, то за конечное время t_0 производная $\frac{\partial}{\partial x} q(x, t)$ обращается в бесконечность и решение уравнения (1.79) становится разрывным. До времени t_0 решение единственно, и его можно записать в виде квадратуры. С этой целью вычислим вариационную производную (определение и правила действия с вариационной производной см. в Очерке 2)

$$\frac{\delta q(x, t)}{\delta q_0(x_0)} = \frac{1}{1 + tq'_0(x_0)} \delta(x - tq(x, t) - x_0).$$

Аргумент дельта-функции обращается в нуль при

$$x = F(x_0, t) = x_0 + tq_0(x_0),$$

так как $q(x, t) = q_0(x_0)$, $x - tq_0(x_0) = x_0$, и, следовательно,

$$\frac{\delta q(x, t)}{\delta q_0(x_0)} = \delta(x - F(x_0, t)) = \delta(x - x_0 - tq_0(x_0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x_0) - iktq_0(x_0)}.$$

Это равенство можно рассматривать как функциональное уравнение по переменной $q_0(x_0)$. Тогда, интегрируя его в функциональном пространстве с начальным условием

$$q(x, t)|_{q_0(x_0)=0} = 0,$$

получаем квадратуру (см., например, [31])

$$q(x, t) = \frac{i}{2\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{ik(x-\xi)} [e^{-iktq_0(\xi)} - 1]$$

для решения уравнения Римана (1.79).

Упомянутую выше неоднозначность можно исключить, рассматривая *уравнение Бюргерса* с динамической вязкостью:

$$\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) + q(x, t) \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) = \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x, t), \quad q(x, 0) = q_0(x),$$

при предельном переходе $\mu \rightarrow 0$.

Рассмотрим теперь общий случай нелинейного скалярного уравнения в частных производных первого порядка, которое запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} q(\mathbf{r}, t) + H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p}) = 0, \quad q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}), \quad (1.86)$$

где $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla q(\mathbf{r}, t)$.

Это уравнение можно записать в рамках лагранжевого описания в виде системы характеристических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p}), \quad \mathbf{r}(0|\mathbf{r}_0) = \mathbf{r}_0; \\ \frac{d}{dt}\mathbf{p}(t|\mathbf{r}_0) &= -\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{p}\frac{\partial}{\partial q}\right) H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p}), \quad \mathbf{p}(0|\mathbf{r}_0) = \mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0); \\ \frac{d}{dt}q(t|\mathbf{r}_0) &= \left(\mathbf{p}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - 1\right) H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p}), \quad q(0|\mathbf{r}_0) = \mathbf{q}_0(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (1.87)$$

Дополним теперь уравнение (1.86) уравнением для консервативной величины $I(\mathbf{r}, t)$, описываемой уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} I(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \frac{\partial H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} I(\mathbf{r}, t) \right\} = 0, \quad I(\mathbf{r}, 0) = I_0(\mathbf{r}). \quad (1.88)$$

Из (1.88) следует, что

$$\int d\mathbf{r} I(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} I_0(\mathbf{r}). \quad (1.89)$$

Тогда соответствующая величина в лагранжевом описании удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} I(t|\mathbf{r}_0) = -\frac{\partial^2 H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p}} I(\mathbf{r}, t), \quad I(0|\mathbf{r}_0) = I_0(\mathbf{r}_0),$$

и, следовательно, решение уравнения (1.88) имеет вид

$$I(\mathbf{r}, t) = I(t|\mathbf{r}_0(t, \mathbf{r})) = \int d\mathbf{r}_0 I(t|\mathbf{r}_0) j(t|\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \quad (1.90)$$

где $j(t|\mathbf{r}_0) = \det \|\partial r_i(t|\mathbf{r}_0) / \partial r_{0j}\|$ — расходимость (определитель Якобиевой матрицы).

Величины $I(t|\mathbf{r}_0)$ и $j(t|\mathbf{r}_0)$ связаны между собой. Действительно, подставляя выражение для $I(\mathbf{r}, t)$ (1.90) в (1.89), видим, что имеется интеграл эволюции

$$j(t|\mathbf{r}_0) = \frac{I_0(\mathbf{r}_0)}{I(t|\mathbf{r}_0)}$$

и выражение (1.90) принимает вид

$$I(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 I_0(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}).$$

Рассмотрим теперь примеры уравнений в частных производных старшего порядка.

1.3.3. Параболическое уравнение квазиоптики (волны в случайно-неоднородных средах)

Распространение волн в среде с крупномасштабными трехмерными случайными неоднородностями будем описывать на основе *параболического уравнения квазиоптики*, справедливого для описания рассеяния гармонической волны $U(t, x, \mathbf{R}) = e^{-i\omega t} u(x, \mathbf{R})$ в среде на малые углы

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}), \quad u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}), \quad (1.91)$$

где $k = \omega/c$ — волновое число, c — скорость распространения волны, ось x выбрана в направлении первоначального распространения волны, через вектор \mathbf{R} обозначены координаты в поперечной плоскости, $\Delta_{\mathbf{R}} = \partial^2 / \partial \mathbf{R}^2$, и функция $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ — отклонение показателя преломления (или диэлектрической проницаемости) от единицы. Это уравнение нашло успешное применение во многих задачах распространения волн в атмосфере Земли и океане [32, 33].

Если ввести амплитуду и фазу волнового поля в уравнении (1.91) по формуле

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) e^{iS(x, \mathbf{R})},$$

то уравнение для интенсивности волнового поля $I(x, \mathbf{R}) = u(x, \mathbf{R}) u^*(x, \mathbf{R})$ можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \{ \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) I(x, \mathbf{R}) \} = 0, \quad I(0, \mathbf{R}) = I_0(\mathbf{R}). \quad (1.92)$$

Откуда следует, что в общем случае произвольного падающего волнового пучка сохраняется мощность волны в плоскости $x = \text{const}$:

$$E_0 = \int I(x, \mathbf{R}) d\mathbf{R} = \int I_0(\mathbf{R}) d\mathbf{R}.$$

Уравнение (1.92) по форме совпадает с уравнением (1.41) и, следовательно, его можно трактовать как уравнение переноса консервативной примеси в потенциальном поле скоростей. Однако только в *приближении геометрической оптики*, когда фаза волны $S(x, \mathbf{R})$, ее поперечный градиент $\mathbf{p}(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})$, а также матрица ее вторых производных, характеризующая *кривизну фазового фронта* $S(x, \mathbf{R}) = \text{const}$, $u_{ij}(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{k} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} S(x, \mathbf{R})$ описываются замкнутыми уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} S(x, \mathbf{R}) + \frac{k}{2} \mathbf{p}^2(x, \mathbf{R}) &= \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \right) \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) &= \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (1.93)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \right) u_{ij}(x, \mathbf{R}) + u_{ik}(x, \mathbf{R}) u_{kj}(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \varepsilon(x, \mathbf{R}),$$

эту примесь можно считать пассивной. В общем же случае, при учете дифракционных эффектов, она является активной.

Реализации поля интенсивности, согласно предыдущему разделу, должны иметь кластерный характер, которые проявляются в виде *каустических структур*. Так, на обороте обложки — форзаце — книги [32] приведена фотография поперечного сечения лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной (лабораторный эксперимент), фрагмент из которой воспроизведен на рис. 1.16. На рисунке видно возникновение каустической структуры волнового поля.

На рис. 1.17 приведена фотография бассейна также с четко выраженной каустической структурой волнового поля на его дне. Подобные структуры возникают при

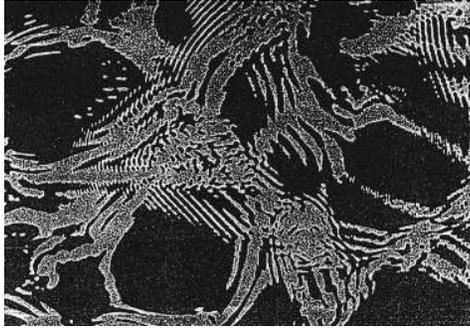


Рис. 1.16. Поперечное сечение лазерного пучка в турбулентной среде

преломлении и отражении света взволнованной водной поверхностью, что соответствует рассеянию на, так называемом, *фазовом экране*.

Отметим, что уравнение (1.91) по форме совпадает с уравнением Шредингера, где параметр x играет роль времени. Аналогичным образом нелинейное параболическое уравнение, описывающее задачу самовоздействия гармонического волнового поля в случайных многомерных средах,

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}; I(x, \mathbf{R})) u(x, \mathbf{R}), \quad u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R})$$

по форме совпадает с *нелинейным уравнением Шредингера*. Следовательно, и в этом случае должна осуществляться кластеризация энергии волнового поля, так как уравнение (1.92) формально не зависит от вида функции $\varepsilon(x, \mathbf{R}; I(x, \mathbf{R}))$.

При замене в соответствующем уравнении Шредингера мнимого времени it на время τ , мы переходим к вещественному уравнению диффузии со случайным потенциалом $z(\mathbf{r}, \tau)$ типа

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}, t) = z(\mathbf{r}, t) f(\mathbf{r}, t) + \mu_f \Delta f(\mathbf{r}, t), \quad (1.94)$$

где μ_f – динамический коэффициент диффузии для поля $f(\mathbf{r}, t)$. Это уравнение широко используется как для задач биологии, так и для задач кинетики химических и ядерных реакций (см., например, [34]).

Остановимся теперь подробнее на приближение геометрической оптики (1.93) для параболического уравнения (1.91). В этом приближении уравнение для фазы волны является *уравнением Гамильтона-Якоби*, а уравнение для поперечного градиента фазы волны является замкнутым *квазилинейным* уравнением в частных производных первого порядка и, следовательно, его можно решать методом характеристик. Уравнения для характеристических кривых (*лучей*) имеют вид

$$\frac{d}{dx} \mathbf{R}(x) = \mathbf{p}(x), \quad \frac{d}{dx} \mathbf{p}(x) = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \quad (1.95)$$

а интенсивность волнового поля и матрица вторых производных фазы волны вдоль



Рис. 1.17. Каустики в бассейне.

характеристик будут описываться уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} I(x) &= -I(x) u_{ii}(x), \\ \frac{d}{dx} u_{ij}(x) + u_{ik}(x) u_{kj}(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (1.96)$$

Уравнения (1.95) совпадают по внешнему виду с уравнениями для частицы в поле случайных внешних сил в отсутствии трения (1.14) и соответствуют Гамильтоновой системе уравнений.

Уравнения (1.95), (1.96) существенно упрощаются в двумерном случае ($R = y$) и принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} y(x) &= p(x), \quad \frac{d}{dx} p(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \varepsilon(x, y), \\ \frac{d}{dx} I(x) &= -I(x) u(x), \quad \frac{d}{dx} u(x) + u^2(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varepsilon(x, y). \end{aligned} \quad (1.97)$$

Уравнение (1.97) для величины $u(x)$ подобно уравнению (1.31), решение которого имеет сингулярный характер. Оно отличается только более сложной структурой случайного члена. Однако, очевидно, что и в этом случае решение стохастической задачи (1.97) имеет взрывной характер, т. е. на конечном расстоянии функция $u(x)$ обратится в минус бесконечность, а интенсивность — в бесконечность. Это соответствует *случайной фокусировке* волнового поля в случайно-неоднородной среде, т. е. возникновению каустик и соответствует возникновению неоднозначностей (и разрывов) для квазилинейного уравнения (1.93) для поперечного градиента фазы волнового поля.

1.3.4. Уравнение Навье–Стокса (случайные силы в гидродинамической теории турбулентности)

Рассмотрим теперь модель турбулентного движения, при котором жидкость находится в поле внешних сил $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$. Такая модель, конечно, является фиктивной, так как подобные силы не имеют реальных аналогов. Однако, если считать, что силы $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ обеспечивают заметный средний приток энергии лишь к крупномасштабным компонентам скорости, то вследствие представлений теории локально-изотропной турбулентности можно ожидать, что фиктивный характер поля $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ не скажется на статистических свойствах мелкомасштабных компонент турбулентности [35]. Поэтому мелкомасштабные свойства турбулентности могут быть правильно описаны на основе такой модели.

Движение несжимаемой жидкости под действием внешних сил описывается *уравнением Навье–Стокса*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} p(\mathbf{r}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad (1.98)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Здесь ρ_0 — плотность жидкости, ν — кинематическая вязкость жидкости, а поле давления $p(\mathbf{x}, t)$ выражается через поле скоростей в тот же момент времени с помощью соотношения

$$p(\mathbf{r}, t) = -\rho_0 \int \Delta^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial^2 (u_i(\mathbf{r}', t) u_j(\mathbf{r}', t))}{\partial r'_i \partial r'_j} d\mathbf{r}', \quad (1.99)$$

где $\Delta^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — интегральный оператор, обратный оператору Лапласа (по повторяющимся индексам производится суммирование).

Отметим, что линеаризованное уравнение (1.98)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = 0 \quad (1.100)$$

описывает задачу о вырождении турбулентности при $t \rightarrow \infty$, и ее решение можно записать в явном виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= \int_0^t d\tau e^{\nu(t-\tau)\Delta} f(\mathbf{r}, \tau) = \int_0^t d\tau e^{\nu\tau\Delta} \int d\mathbf{r}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}', t - \tau) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^t d\tau e^{\nu\tau\Delta} \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} f(\mathbf{r}', t - \tau) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^t d\tau \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{q} e^{-\nu\tau\mathbf{q}^2} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}'} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - \tau) = \\ &= \int d\mathbf{r}' \int_0^t \frac{d\tau}{(4\pi\nu\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\mathbf{r}'^2}{4\nu\tau}\right\} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - \tau). \end{aligned} \quad (1.101)$$

Линейное уравнение (1.100) является обобщением уравнения Ланжевена для скорости (1.77) на случайные поля.

При отсутствии в уравнении (1.98) эффекта вязкости и внешних случайных сил переходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \left(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} p(\mathbf{r}, t), \quad (1.102)$$

которое описывает динамику *идеальной жидкости* и называется *уравнением Эйлера*. С помощью равенства (1.60) на с. 39 это уравнение можно переписать для вихря поля скорости $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ в виде уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot} [\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)], \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, 0) = \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}), \quad (1.103)$$

или же уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\right) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \left(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, 0) = \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{r}), \quad (1.104)$$

совпадающими с уравнениями (1.54) и (1.61) на с. 39 для задачи о диффузии магнитного поля.

Такое совпадение имеет чисто формальный вид, так как для этих задач ставятся различные краевые условия и функциональные зависимости полей $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ от поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ совершенно различные.

Фурье-образ поля скорости по пространственным координатам в трехмерном случае ($\hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t) = \hat{u}_i(-\mathbf{k}, t)$)

$$\hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = \int d\mathbf{r} u_i(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad u_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

в присутствии поля внешних сил после исключения давления с помощью формулы (1.99) удовлетворяет нелинейному интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) + \frac{i}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \hat{u}_\alpha(\mathbf{k}_1, t) \hat{u}_\beta(\mathbf{k}_2, t) - \nu k^2 \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = \hat{f}_i(\mathbf{k}, t), \quad (1.105)$$

где

$$\Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \{k_\alpha \Delta_{i\beta}(\mathbf{k}) + k_\beta \Delta_{i\alpha}(\mathbf{k})\} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}),$$

$$\Delta_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (i, \alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

а $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$ — пространственная фурье-гармоника внешних сил:

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t) = \int d\mathbf{r} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Спецификой трехмерных гидродинамических движений является существование закона сохранения энергии при отсутствии внешних сил и эффектов, связанных с вязкостью. Отметим, что для движения двумерной идеальной жидкости имеется, помимо интеграла энергии, второй квадратичный по скоростям интеграл — квадрат вихря поля скорости.

Для описания стационарной во времени турбулентности удобно рассматривать пространственно-временные фурье-гармоники поля скорости:

$$\hat{u}_i(\mathbf{K}) = \int d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} dt u_i(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \omega t)}, \quad u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{u}_i(\mathbf{K}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \omega t)},$$

где через \mathbf{K} обозначен четырехмерный волновой вектор с координатами $\{\mathbf{k}, \omega\}$ и поле $\hat{u}_i^*(\mathbf{K}) = \hat{u}_i(-\mathbf{K})$ в силу вещественности поля $u_i(\mathbf{r}, t)$. Уравнение для компоненты $\hat{u}_i(\mathbf{K})$ в этом случае получаем из уравнения (1.105) после выполнения преобразования Фурье по времени:

$$(i\omega + \nu \mathbf{k}^2) \hat{u}_i(\mathbf{K}) + \frac{i}{2} \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \hat{u}_{\alpha}(\mathbf{K}_1) \hat{u}_{\beta}(\mathbf{K}) = \hat{f}_i(\mathbf{K}), \quad (1.106)$$

где

$$\Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) = \frac{1}{2\pi} \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega),$$

а $\hat{f}_i(\mathbf{K})$ — пространственно-временные фурье-гармоники внешних сил. Уравнение (1.106) теперь уже является чисто интегральным нелинейным уравнением.

Плоское движение под действием периодической силы

Рассмотрим теперь двумерное движение $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \{u(\mathbf{r}, t), v(\mathbf{r}, t)\}$ в плоскости $\mathbf{r} = \{x, y\}$ несжимаемой вязкой жидкости, возбуждаемое периодической в пространстве силой, направленной по оси x и равной $f_x(\mathbf{r}, t) = \gamma \sin py$, ($\gamma > 0$). Такое течение жидкости обычно называется *колмогоровским течением (поток)*, и ее движение описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta u + \gamma \sin py, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Здесь $u(\mathbf{r}, t)$ и $v(\mathbf{r}, t)$ — проекции скорости на оси x и y , $P(\mathbf{r}, t)$ — давление, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость.

Система уравнений Навье–Стокса и неразрывности (1.107) имеет стационарное решение, соответствующее ламинарному течению вдоль оси x при постоянном давлении, следующего вида:

$$u_{\text{ст}}(\mathbf{r}) = \frac{\gamma}{\nu p^2} \sin py, \quad v_{\text{ст}}(\mathbf{r}) = 0, \quad P_{\text{ст}}(\mathbf{r}) = \text{const}. \quad (1.108)$$

Вводя масштабы длины p^{-1} , скорости $p^{-2} \nu^{-1} \gamma$ и времени $p \nu \gamma^{-1}$ и переходя к безраз-

мерным переменным, приведем систему (1.107) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{R} \Delta u + \frac{1}{R} \sin y, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{R} \Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Стационарное решение в этих переменных имеет вид

$$u_{\text{ст}}(\mathbf{r}) = \sin y, \quad v_{\text{ст}}(\mathbf{r}) = 0, \quad P_{\text{ст}}(\mathbf{r}) = \text{const}.$$

Здесь $R = \frac{\gamma}{\nu^2 p^3}$ — число Рейнольдса. Вводя функцию тока $\psi(\mathbf{r}, t)$ с помощью соотношения

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial y} \psi(\mathbf{r}, t), \quad v(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \psi(\mathbf{r}, t),$$

получаем, что она удовлетворяет уравнению вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Delta}{R} \right) \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} = \frac{1}{R} \cos y \quad (1.110)$$

и

$$\psi_{\text{ст}}(\mathbf{r}) = -\cos y.$$

Стационарное решение (1.108), соответствующее ламинарному течению, как показано в работах [43, 44], в линейной постановке задачи неустойчиво относительно малых возмущений при определенных значениях параметра R . Эти возмущения быстро растут во времени, черпая энергию из энергии течения (1.108), благодаря чему растут напряжения Рейнольдса, описываемые нелинейными членами в (1.110), что приводит к уменьшению амплитуды ламинарного течения, пока не установится некоторое новое равновесное течение (обычно называемое «вторичным течением»).

Представим гидродинамические поля в виде

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) &= U(y, t) + \tilde{u}(\mathbf{r}, t), \quad v(\mathbf{r}, t) = \tilde{v}(\mathbf{r}, t), \\ P(\mathbf{r}, t) &= P_0 + \tilde{P}(\mathbf{r}, t), \quad \psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(y, t) + \tilde{\psi}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Здесь $U(y, t)$ — новый профиль равновесного течения, подлежащий определению наряду с равновесными напряжениями Рейнольдса, тильдой обозначены соответствующие конечные возмущения. Следуя цитированным выше работам, будем считать возмущения гармоническими по x с длиной волны $2\pi/\alpha$ ($\alpha > 0$). Новый профиль течения $U(y, t)$ есть результат усреднения функции $u(\mathbf{r}, t)$ по переменной x на расстоянии длины волны.

Легко видеть, что при $\alpha \geq 1$ ламинарное течение (1.108) единственно и устойчиво при всех R [44], а неустойчивость может проявляться только для возмущений с $\alpha < 1$.

В соответствии с линейной теорией устойчивости будем на первом этапе учитывать только нелинейное взаимодействие первой гармоники возмущений со средним потоком, пренебрегая генерацией высших гармоник и их взаимодействием как между собой, так и со средним потоком.

Представим все возмущения в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, t) &= \varphi^{(1)}(y, t)e^{i\alpha x} + \varphi^{(-1)}(y, t)e^{-i\alpha x}, \\ (\tilde{\varphi}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{u}(\mathbf{r}, t), \tilde{v}(\mathbf{r}, t), \tilde{P}(\mathbf{r}, t), \tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)),\end{aligned}$$

где величина $\varphi^{(-1)}(y, t)$ комплексно сопряжена к $\varphi^{(1)}(y, t)$. Тогда из системы (1.109) получаем систему уравнений для среднего потока $U(y, t)$ и возмущений $v^{(1)}(y, t)$ (после исключения величин $\tilde{P}(\mathbf{r}, t)$ и $\tilde{u}(\mathbf{r}, t)$) [23, 45]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}U + \frac{i}{\alpha} \left(v^{(-1)} \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial y^2} - v^{(1)} \frac{\partial^2 v^{(-1)}}{\partial y^2} \right) &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \sin y, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Delta}{R} \right) \Delta v^{(1)} + i\alpha \left[U \Delta v^{(1)} - v^{(1)} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right] &= 0.\end{aligned}\tag{1.111}$$

При этом второе уравнение системы (1.111) является обычным *уравнением Орра–Зоммерфельда*. Аналогичную систему можно получить и для функции тока.

Для исследования устойчивости ламинарного режима (1.108) следует считать во втором уравнении системы (1.111)

$$U(y) = \sin y.$$

В этом случае получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Delta}{R} \right) \Delta v^{(1)}(y, t) + i\alpha \sin y [1 + \Delta] v^{(1)}(y, t) = 0.\tag{1.112}$$

Представим возмущения $v^{(1)}(y, t)$ в виде

$$v^{(1)}(y, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n^{(1)} e^{\sigma t + iny}.\tag{1.113}$$

Подставляя (1.113) в (1.112), получаем рекуррентную систему для величин $v_n^{(1)}$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\alpha} (\alpha^2 + n^2) \left[\sigma + \frac{\alpha^2 + n^2}{R} \right] v_n^{(1)} + v_{n-1}^{(1)} [\alpha^2 - 1 + (n-1)^2] - \\ - v_{n+1}^{(1)} [\alpha^2 - 1 + (n+1)^2] = 0, \quad n = -\infty, \dots, +\infty.\end{aligned}\tag{1.114}$$

Изучение системы (1.114) [43, 44] показало, что при некоторых ограничениях на волновое число α и число R существуют вещественные положительные значения σ , т. е. решения неустойчивы. Дисперсионное уравнение для σ имеет при этом вид бесконечной цепной дроби, и критическим числом Рейнольдса является $R_{\text{кр}} = \sqrt{2}$ для

$\alpha \rightarrow 0$. Иначе говоря, наиболее неустойчивыми являются длинноволновые возмущения в направлении действующей силы. Поэтому можно считать, что в рассматриваемой задаче существует малый параметр α , что позволяет асимптотически проинтегрировать уравнение Орра–Зоммерфельда. Мы не будем подробно останавливаться на этом. Отметим только, что компоненты собственного вектора $\{v_n^{(1)}\}$ задачи (1.114) имеют разный порядок по α . Так, все компоненты вектора $\{v_n^{(1)}\}$, начиная с $n = \pm 2$ и более мелкомасштабные, будут по крайней мере порядка α^4 . Поэтому можно ограничиться при рассмотрении только наиболее существенными гармониками с $n = 0, \pm 1$, что по существу является применением *метода Галеркина* с тригонометрическими координатными функциями. В этом случае

$$U(y, t) = U(t) \sin y,$$

а уравнение для $v^{(1)}$ принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Delta}{R} \right) \Delta v^{(1)}(y, t) + i\alpha U(t) \sin y [1 + \Delta] v^{(1)}(y, t) = 0.$$

Подставляя в (1.111) разложение

$$v^{(1)}(y, t) = \sum_{n=-1}^1 v_n^{(1)}(t) e^{iny}.$$

получаем для функций

$$U(t), \quad z_0(t) = v_0^{(1)}(t), \quad z_+(t) = v_1^{(1)}(t) + v_{-1}^{(1)}(t), \quad z_-(t) = \frac{v_1^{(1)}(t) - v_{-1}^{(1)}(t)}{2}$$

систему уравнений [23, 45]:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{R} \right) U(t) &= \frac{1}{R} - \frac{4}{\alpha} z_0(t) z_-(t), \\ \left(\frac{d}{dt} + \frac{\alpha^2}{R} \right) z_0(t) &= \alpha U(t) z_-(t), \\ \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{R} \right) z_-(t) &= \frac{\alpha}{2} U(t) z_0(t), \quad \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{R} \right) z_+(t) = 0.\end{aligned}\tag{1.115}$$

Уравнение для величины $z_+(t)$ отщепляется от остальных уравнений, и, следовательно, возмущения, соответствующие величине $z_+(t)$, могут только затухать со временем. Оставшиеся три уравнения образуют простейшую трехкомпонентную систему гидродинамического типа (см. п. 1.1.3 на с. 23). Эта система уравнений, как указывалось ранее, эквивалентна динамическому описанию движения гироскопа с анизотропным трением, возбуждаемого моментом внешних сил относительно неустойчивой оси. Анализ системы (1.115) показывает, что при $R < R_{\text{кр}} = \sqrt{2}$ устанавливается ламинарный режим с $U = 1, z_i = 0$. При $R > \sqrt{2}$ этот режим становится неустойчивым, и устанавливается новый режим, соответствующий профилю среднего потока

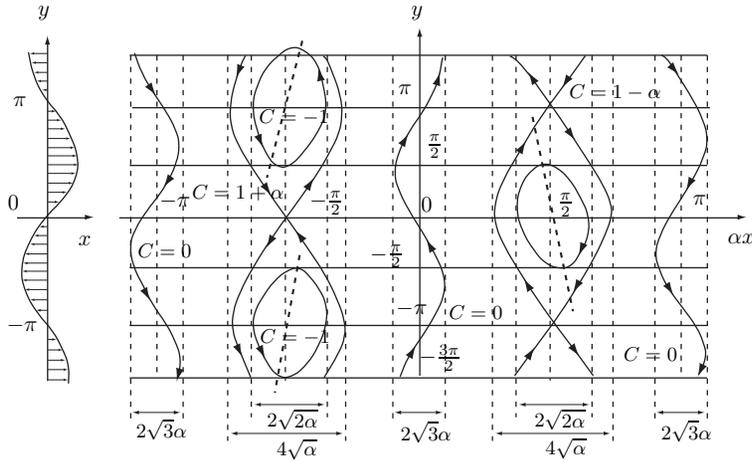


Рис. 1.18. Профиль средней скорости и линии тока вторичного течения при $R = 2R_{\text{кр}} = 2\sqrt{2}$ ($v_0^{(1)} > 0$)

и равновесным напряжениям Рейнольдса (вторичное течение):

$$U = \frac{\sqrt{2}}{R}, \quad \frac{4}{\alpha} z_0 z_- = \frac{R - \sqrt{2}}{R^2}, \quad z_+ = 0,$$

$$[v_0^{(1)}]^2 = \frac{R - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}R^2}, \quad v_1^{(1)} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} v_0^{(1)}, \quad \alpha \ll 1, \quad R \geq \sqrt{2},$$

или, переходя к размерным величинам, получаем

$$U(y) = \sqrt{2} \nu p \sin py,$$

$$\langle \tilde{u}\tilde{v} \rangle = -\frac{\gamma}{p} \frac{R - \sqrt{2}}{R} \cos py. \quad (1.116)$$

Отметим, что амплитуда установившегося равновесного среднего течения не зависит от амплитуды возбуждающей силы. Кроме того, величина $v_0^{(1)}$ может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от знаков амплитуд начальных малых возмущений.

Функция тока установившегося равновесного течения имеет вид

$$\psi_1(x, y) = -\frac{\sqrt{2}}{R} \cos y - \frac{2}{\alpha} v_0^{(1)} \left[\sqrt{2}\alpha \sin y \cos \alpha x + \sin \alpha x \right].$$

На рис. 1.18 изображены линии тока, соответствующие течению (1.116) при $R = 2R_{\text{кр}} = 2\sqrt{2}$ ($v_0^{(1)} > 0$), уравнение которых

$$\alpha \cos y + \sqrt{2}\alpha \sin y \cos \alpha x + \sin \alpha x = C.$$

На этом рисунке также дано схематическое изображение профиля среднего потока. В этом случае, в отличие от ламинарного решения (1.108), возникают системы

вихрей, периодически расположенных в пространстве, наклон больших осей которых определяется знаком производной по y профиля среднего потока.

Течение (1.116) было получено, как указывалось выше, в предположении, что нелинейное взаимодействие гармоник возмущения не существенно по сравнению с их взаимодействием со средним потоком. Это будет справедливым, если течение (1.116) устойчиво, в свою очередь, относительно малых возмущений. Проверку устойчивости можно провести обычным путем, линеаризуя уравнение для функции тока (1.110) относительно течения (1.116) [45]. При этом оказывается, что течение (1.116) устойчиво, если ограничиться гармониками того же вида, что и решение (1.116). Однако оно является неустойчивым относительно мелкошальных возмущений, и нелинейное взаимодействие бесконечно малых возмущений является здесь определяющим наряду с взаимодействием возмущений со средним потоком. При этом нельзя ограничиться конечным числом гармоник по x , а необходимо рассматривать весь бесконечный ряд гармоник по x . В то же время по оси y можно ограничиться гармониками с $n = 0, \pm 1$.

Задачи

Задача 1.1. Получить обобщение уравнения (1.115) на бесконечномерный случай, суммируя весь бесконечный ряд гармоник по x .

Решение. Представим функцию тока в виде

$$\psi(x, y, t) = \psi_{-1}(x, t)e^{-iy} + \psi_0(x, t) + \psi_1(x, t)e^{iy} \quad (1.117)$$

$$(\psi_1^*(x, t) = \psi_{-1}(x, t)),$$

где $\psi_i(x, t)$ — периодические функции по x с периодом $2\pi/\alpha$. Подставляя теперь (1.117) в уравнение (1.110), пренебрегая членами порядка α^3 во взаимодействии гармоник и членами порядка α^2 в диссипативных членах для гармоник $\psi_{\pm 1}$, после введения новых функций

$$\psi_+(x, t) = \frac{\psi_{-1} + \psi_1}{2}, \quad \psi_-(x, t) = \frac{\psi_{-1} - \psi_1}{2i}$$

и получаем искомую систему уравнений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{R} \right) \psi_+ - \psi_- \frac{\partial \psi_0}{\partial x} = -\frac{1}{2R},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{R} \right) \psi_- + \psi_+ \frac{\partial \psi_0}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi_0 + 2 \left(\psi_- \frac{\partial \psi_+}{\partial x} - \psi_+ \frac{\partial \psi_-}{\partial x} \right) = 0.$$

Для этой системы уравнений характерно отсутствие стационарных решений, периодических по x (кроме решения, соответствующего ламинарному потоку).

О черк 2

ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОТ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЙ, НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ И ПАРАМЕТРОВ

В первом Очерке мы рассмотрели ряд примеров динамических систем, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных. Для многих приложений, связанных с изучением статистических характеристик их решений, требуется знание зависимости решений этих задач от коэффициентов уравнения (вообще говоря, функциональной) и начальных условий. Эти зависимости обладают некоторыми общими свойствами, из которых два особенно важны для статистического описания. Проиллюстрируем их на примере простейшей задачи, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1). Эта задача соответствует динамике частиц в поле случайных скоростей и ее можно переписать в виде нелинейного интегрального уравнения

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{U}(\mathbf{r}(\tau), \tau) d\tau. \quad (2.1)$$

Решение уравнения (2.1) функционально зависит от векторного поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}', \tau)$ и начальных условий $\{\mathbf{r}_0, t_0\}$.

2.1. Функциональная зависимость решения задачи

2.1.1. Вариационные (функциональные) производные

Прежде всего напомним общее определение функционала. Мы говорим, что задан некоторый функционал, если установлено правило, по которому каждой функции из некоторой совокупности сопоставлено число. Примеры функционалов:

$$\text{а) } F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} d\tau a(\tau) \varphi(\tau),$$

где $a(t)$ — заданная (фиксированная) функция, а пределы t_1, t_2 могут быть как конечными, так и бесконечными. Это — линейный функционал.

$$\text{б) } F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) \varphi(\tau_1) \varphi(\tau_2),$$

где $B(t_1, t_2)$ — фиксированная заданная функция. Это — квадратичный функционал.

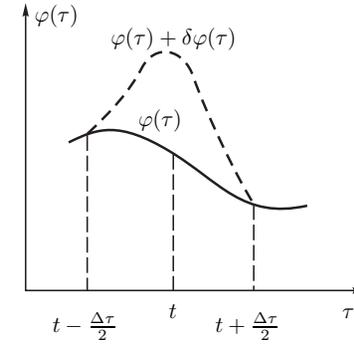


Рис. 2.1. К определению вариационной производной

$$\text{в) } F[\varphi(\tau)] = f(\Phi[\varphi(\tau)]),$$

где $f(x)$ — заданная функция, а величина $\Phi[\varphi(\tau)]$ — сама является функционалом.

Оценим разность одного и того же функционала, взятого для двух функций $\varphi(\tau)$ и $\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)$, где $\delta\varphi(\tau) \neq 0$ при $t - \frac{1}{2}\Delta\tau < \tau < t + \frac{1}{2}\Delta\tau$ (см. рис. 2.1).

Вариацией функционала называется линейная по $\delta\varphi(\tau)$ часть разности

$$\delta F[\varphi(\tau)] = \{F[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] - F[\varphi(\tau)]\}.$$

Вариационной (функциональной) производной называется предел (см., например, [35])

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\int d\tau \delta\varphi(\tau)}. \quad (2.2)$$

С целью сокращения записи, вместо обозначения $\delta F[\varphi(\tau)]/\delta\varphi(t)dt$ будем использовать $\delta F[\varphi(\tau)]/\delta\varphi(t)$.

Отметим, что если в (2.2) взять в качестве функции $\delta\varphi(\tau) = \alpha\delta(\tau - t)$, где $\delta(\tau)$ — обычная дельта-функция Дирака, то формулу (2.2) можно записать в виде, имеющем вид обычной производной:

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d}{d\alpha} F[\varphi(\tau) + \alpha\delta(\tau - t)].$$

Вариационная производная от функционала $F[\varphi(\tau)]$ является снова функционалом от $\varphi(\tau)$, зависящим еще от точки t как от параметра.

Найдем вариационные производные от функционалов а), б) и в).

В случае а) имеем

$$\delta F[\varphi(\tau)] = F[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] - F[\varphi(\tau)] = \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} d\tau a(\tau) \delta\varphi(\tau).$$

Если функция $a(t)$ непрерывна на отрезке Δt , то по теореме о среднем

$$\delta F[\varphi(\tau)] = a(t') \int_{\Delta t} d\tau \delta\varphi(\tau),$$

где точка t' принадлежит отрезку $\left[t - \frac{1}{2}\Delta t, t + \frac{1}{2}\Delta t\right]$, так что

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a(t') = a(t). \quad (2.3)$$

Аналогично в случае б) получаем

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} = \int_{t_1}^{t_2} d\tau [B(\tau, t) + B(t, \tau)] \varphi(\tau) \quad (t_1 < t < t_2).$$

Отметим, что здесь функцию $B(\tau_1, \tau_2)$ всегда можно считать симметричной функцией своих аргументов.

В случае в) имеем

$$\begin{aligned} F[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] &= f(\Phi[\varphi(\tau)]) + \frac{\partial f(\Phi[\varphi(\tau)])}{\partial\Phi} \delta\Phi[\varphi(\tau)] + \dots = \\ &= F[\varphi(\tau)] + \frac{\partial f(\Phi[\varphi(\tau)])}{\partial\Phi} \delta\Phi[\varphi(\tau)] + \dots \end{aligned}$$

и, следовательно, получаем

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(t)} f(\Phi[\varphi(\tau)]) = \frac{\partial f(\Phi[\varphi(\tau)])}{\partial\Phi} \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} \Phi[\varphi(\tau)]. \quad (2.4)$$

Рассмотрим теперь функционал $\Phi[\varphi(\tau)] = F_1[\varphi(\tau)]F_2[\varphi(\tau)]$. Для него имеем

$$\begin{aligned} \delta\Phi[\varphi(\tau)] &= \{F_1[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)]F_2[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] - F_1[\varphi(\tau)]F_2[\varphi(\tau)]\} = \\ &= F_1[\varphi(\tau)]\delta F_2[\varphi(\tau)] + F_2[\varphi(\tau)]\delta F_1[\varphi(\tau)] \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(t)} F_1[\varphi(\tau)]F_2[\varphi(\tau)] = F_1[\varphi(\tau)] \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} F_2[\varphi(\tau)] + F_2[\varphi(\tau)] \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} F_1[\varphi(\tau)]. \quad (2.5)$$

Можно формально определить и выражение для вариационной производной функционала $\varphi(\tau_0)$ по функции $\varphi(t)$ соотношением

$$\frac{\delta\varphi(\tau_0)}{\delta\varphi(t)} = \delta(\tau_0 - t). \quad (2.6)$$

Формулу (2.6) можно обосновать, рассматривая линейный функционал вида

$$F[\varphi(\tau)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \varphi(\tau) \exp\left\{-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (2.7)$$

Для него, согласно (2.3), вариационная производная имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(t)} F[\varphi(\tau)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(t - \tau_0)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (2.8)$$

Переходя теперь формально к пределу при $\sigma \rightarrow 0$ в выражениях (2.7) и (2.8), мы и получаем формулу (2.6). И при этом

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} = \frac{\partial F[\varphi(\tau)]}{\partial\varphi(\tau)} \frac{\delta\varphi(\tau)}{\delta\varphi(t)} = \frac{\partial F[\varphi(\tau)]}{\partial\varphi(\tau)} \delta(\tau - t).$$

С помощью формулы (2.6) очень удобно производить функциональное дифференцирование функционалов, явно зависящих от $\varphi(\tau)$. В качестве примера рассмотрим функционал

$$F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} d\tau L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right).$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} F[\varphi(\tau)] &= \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left[\frac{\partial L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)}{\partial\varphi(\tau)} + \frac{\partial L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)}{\partial\dot{\varphi}(\tau)} \frac{d}{d\tau} \right] \frac{\delta\varphi(\tau)}{\delta\varphi(t)} = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left[\frac{\partial L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)}{\partial\varphi(\tau)} + \frac{\partial L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)}{\partial\dot{\varphi}(\tau)} \frac{d}{d\tau} \right] \delta(\tau - t) = \\ &= \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}(t)} + \frac{\partial}{\partial\varphi(t)} \right) L\left(t, \varphi(t), \frac{d\varphi(t)}{dt}\right), \end{aligned}$$

где $\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t)$, если точка t принадлежит интервалу (t_1, t_2) .

Подобно тому, как функция может быть разложена в ряд Тейлора, функционал $F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)]$ можно разложить в функциональный ряд Тейлора по функции $\eta(\tau)$ в окрестности $\eta(\tau) \sim 0$:

$$\begin{aligned} F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)] &= F[\varphi(\tau)] + \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} \eta(t) + \\ &+ \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \frac{\delta^2 F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t_1) \delta\varphi(t_2)} \eta(t_1) \eta(t_2) + \dots \quad (2.9) \end{aligned}$$

Отметим, что операторное выражение типа

$$\begin{aligned} 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} + \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \eta(t_1) \eta(t_2) \frac{\delta^2}{\delta\varphi(t_1) \delta\varphi(t_2)} + \dots \\ = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} + \frac{1}{2!} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} \right]^2 + \dots \quad (2.10) \end{aligned}$$

можно сокращенно записать в виде оператора

$$\exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} \right\}, \quad (2.11)$$

действие которого надо понимать именно в смысле разложения (2.10). С помощью этого оператора формулу (2.9) можно переписать в виде

$$F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)] = \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} \right\} F[\varphi(\tau)], \quad (2.12)$$

что позволяет нам интерпретировать оператор (2.11) как оператор функционального сдвига.

Рассмотрим теперь функционал $F[t; \varphi(\tau)]$, зависящий от параметра t . Этот функционал можно дифференцировать по t , а также найти его вариационную производную по $\varphi(t')$. Легко видеть, что эти операции перестановочны, т. е. имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta F[t; \varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t')} = \frac{\delta}{\delta \varphi(t')} \frac{\partial F[t; \varphi(\tau)]}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Если область изменения τ не зависит от t , то равенство (2.13) очевидно. В противном случае, например, для функционалов $F[t; \varphi(\tau)]$, у которых $0 \leq \tau \leq t$, равенство (2.13) проверяется путем разложения функционала $F[t; \varphi(\tau)]$ в функциональный ряд Тейлора.

2.1.2. Принцип динамической причинности

Проварьируем уравнение (2.1) по полю $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$. Считая, что начальное условие \mathbf{r}_0 не зависит от поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, с помощью равенства (2.6), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\delta U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r}(\tau) - \mathbf{r}') \delta(\tau - t'),$$

получаем линейное уравнение для вариационной производной:

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')) \theta(t' - t_0) \theta(t - t') + \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(\tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')}, \quad (2.14)$$

где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — дельта функция Дирака, а

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t < 0 \end{cases}$$

— ступенчатая функция Хевисайда. Из уравнения (2.14) следует, что

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = 0, \text{ если } t' > t \text{ или } t' < t_0, \quad (2.15)$$

т. е. решение $\mathbf{r}(t)$ динамической задачи (2.1), рассматривая как функционал поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$, зависит только от значений $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$ при $t_0 < t' < t$. Следовательно, функция $\mathbf{r}(t)$ не меняется, если поле $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$ изменяется вне интервала (t_0, t') , т. е. для $t' < t_0$ или $t' > t$. Условие (2.15) будем называть *условием динамической причинности*.

Принимая это условие во внимание, уравнение (2.14) можно переписать в виде (при $t_0 < t' < t$)

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')) \theta(t' - t_0) \theta(t - t') + \int_{t'}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(\tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')}, \quad (2.16)$$

и, следовательно, переходя к пределу $t \rightarrow t' + 0$, получаем равенство

$$\left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t=t'+0} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')). \quad (2.17)$$

Интегральное уравнение (2.16) для вариационной производной, очевидно, эквивалентно линейному дифференциальному уравнению с начальным условием

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right) = \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(t), t)}{\partial r_k} \left(\frac{\delta r_k(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right), \quad (2.18)$$

$$\left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t=t'} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')).$$

Условие динамической причинности является общим свойством задач, описываемых дифференциальными уравнениями с начальными условиями. Краевые же задачи этим свойством не обладают. Так, для задачи (1.33), (1.34), описывающей распространение плоской волны в слое неоднородной среды, волновое поле в точке $x = u(x)$, также как и коэффициенты отражения и прохождения зависят функционально от значения функции $\varepsilon(x)$ во всем слое среды (L_0, L) . Переформулировка же этой задачи с помощью метода погружения в задачу с начальными условиями по вспомогательному параметру L , позволяет использовать свойство причинности для уравнений метода погружения.

2.2. Зависимость решения от параметров задачи

2.2.1. Зависимость решения задачи от начального условия

Обозначим теперь зависимость решения уравнения (2.1) $\mathbf{r}(t)$ от параметров \mathbf{r}_0, t_0 вертикальной чертой:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0), \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0|\mathbf{r}_0, t_0).$$

Продифференцируем уравнение (2.1) по параметрам r_{0k} и t_0 . В результате для Якобиевой матрицы $\frac{\partial}{\partial r_{0k}} r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)$ и величины $\frac{\partial}{\partial t_0} r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)$ получаем линейные урав-

нения

$$\frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0k}} = \delta_{ik} + \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_j} \frac{\partial r_j(\tau|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0k}}, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0} = -U_i(\mathbf{r}_0(t_0), t_0) + \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_j} \frac{\partial r_j(\tau|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0}.$$

Умножая теперь первое из этих уравнений на $U_k(\mathbf{r}_0(t), t)$, суммируя по индексу k и складывая его со вторым уравнением, получаем для векторной функции

$$F_i(t|\mathbf{r}_0, t_0) = \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)$$

линейное однородное уравнение

$$F_i(t|\mathbf{r}_0, t_0) = \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} F_k(\tau|\mathbf{r}_0, t_0). \quad (2.20)$$

Дифференцируя это уравнение по времени, перейдем к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} F_i(t|\mathbf{r}_0, t_0) = \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(t), t)}{\partial r_k} F_k(t|\mathbf{r}_0, t_0)$$

с начальным условием при $t = t_0 - F_i(t_0|\mathbf{r}_0, t_0) = 0$, вытекающему из уравнения (2.20), и, следовательно, $F_i(t|\mathbf{r}_0, t_0) \equiv 0$. Таким образом получаем равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0) = 0, \quad (2.21)$$

которое можно рассматривать как линейное уравнение в частных производных по переменным \mathbf{r}_0, t_0 с начальным условием при $t_0 = t$

$$\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{r}_0. \quad (2.22)$$

Теперь, переменная t входит в задачу (2.21), (2.22) как параметр.

Уравнение (2.21) решается в направлении времени обратном по отношению к задаче (1.1) и может быть названо *обратным уравнением*.

Уравнение (2.21) с начальным условием (2.22) можно переписать в виде интегрального уравнения

$$\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t d\tau \left(\mathbf{U}(\mathbf{r}_0, \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, \tau). \quad (2.23)$$

Варьируя теперь уравнение (2.23) по функции $U_j(\mathbf{r}', t')$ получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\delta r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} &= \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}') \theta(t' - t_0) \theta(t - t') \frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0, t')}{\partial r_{j0}} + \\ &+ \int_{t_0}^t d\tau \left(\mathbf{U}(\mathbf{r}_0, \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) \frac{\delta r_i(t|\mathbf{r}_0, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

откуда следует, что

$$\frac{\delta r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = 0, \quad \text{если } t' > t \text{ или } t' < t_0,$$

т. е. функция $\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0)$ также обладает свойством динамической причинности по параметру t_0 , и уравнение (2.24) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\delta r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} &= \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}') \theta(t' - t_0) \theta(t - t') \frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0, t')}{\partial r_{j0}} + \\ &+ \int_{t_0}^{t'} d\tau \left(\mathbf{U}(\mathbf{r}_0, \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) \frac{\delta r_i(t|\mathbf{r}_0, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Полагая теперь $t' \rightarrow t_0 + 0$, Получаем равенство

$$\left. \frac{\delta r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t'=t_0+0} = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0j}}. \quad (2.26)$$

2.2.2. Метод погружения для краевых задач

Рассмотрим теперь краевые задачи, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Использование *метода погружения* (обычно называемого в математической литературе *методом инвариантного погружения*) позволяет свести рассматриваемые краевые задачи к задачам эволюционного типа с начальными условиями, обладающими свойством динамической причинности по вспомогательному параметру.

Идея метода впервые была предложена в работах В. А. Амбарцумяна [36–38] (так называемый, *принцип инвариантности Амбарцумяна*) для решения уравнений линейной теории переноса излучения. В дальнейшем эта идея была взята «на вооружение» математиками для сведения краевых, вообще говоря, нелинейных задач к задачам эволюционного типа с начальными данными, более удобным для численных расчетов. По этой тематике опубликовано несколько монографий (см., например, [39–41]), в которых рассматриваются как физические аспекты метода, так и его вычислительные возможности.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)), \quad (2.27)$$

определенных на отрезке $t \in [0, T]$ с краевыми условиями

$$g\mathbf{x}(0) + h\mathbf{x}(T) = \mathbf{v}, \quad (2.28)$$

где g и h постоянные матрицы.

Для динамической задачи (2.27), (2.28) не выполняется условие динамической причинности, т. е. решение этой задачи $\mathbf{x}(t)$ в момент времени t функционально зависит

от внешних сил $\mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}(\tau))$ для всех $0 \leq \tau \leq T$. Более того, даже краевые значения $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}(T)$ являются функционалами поля $\mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}(\tau))$.

Решение задачи (2.27), (2.28) параметрически зависит от T и \mathbf{v} , т. е. $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})$. Введем функции

$$\mathbf{R}(T, \mathbf{v}) = \mathbf{x}(T; T, \mathbf{v}), \quad \mathbf{S}(T, \mathbf{v}) = \mathbf{x}(0; T, \mathbf{v}),$$

описывающие краевые значения решения уравнения (2.27).

Продифференцируем теперь уравнение (2.27) по T и \mathbf{v} . Получаем два линейных уравнения для соответствующих производных:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} &= \frac{\partial F_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial x_l(t; T, \mathbf{v})}{\partial T}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial v_k} &= \frac{\partial F_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial x_l(t; T, \mathbf{v})}{\partial v_k}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Эти уравнения имеют одинаковую структуру и, следовательно, можно ожидать, что их решения связаны линейным равенством

$$\frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} = \lambda_k(T, \mathbf{v}) \frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial v_k}, \quad (2.30)$$

если векторная величина $\lambda(T, \mathbf{v})$ такова, что выполняются краевые условия (2.28) и решение задачи единственное. Для нахождения $\lambda(T, \mathbf{v})$ положим сперва в (2.30) $t = 0$ и умножим на матрицу g ; положим затем $t = T$ и умножим на матрицу h ; сложим получившиеся равенства. С учетом (2.28) получаем

$$g \frac{\partial \mathbf{x}(0; T, \mathbf{v})}{\partial T} + h \frac{\partial \mathbf{x}(T; T, \mathbf{v})}{\partial T} \Big|_{t=T} = \lambda(T, \mathbf{v}).$$

Ввиду того, что (с учетом уравнения (2.27))

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} \Big|_{t=T} = \frac{\partial \mathbf{x}(T; T, \mathbf{v})}{\partial T} - \frac{\partial \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})}{\partial t} \Big|_{t=T} = \frac{\partial \mathbf{R}(T, \mathbf{v})}{\partial T} - \mathbf{F}(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v}))$$

для величины $\lambda(T, \mathbf{v})$ получаем окончательное выражение

$$\lambda(T, \mathbf{v}) = -h\mathbf{F}(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})). \quad (2.31)$$

Равенство (2.30) с параметром $\lambda(T, \mathbf{v})$, определенным согласно (2.31), т. е.

$$\frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} = -h_{kl} F_l(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})) \frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial v_k}, \quad (2.32)$$

можно рассматривать как линейное дифференциальное уравнение, если дополнить его соответствующим начальным условием

$$\mathbf{x}(t; T, \mathbf{v}) \Big|_{T=t} = \mathbf{R}(t, \mathbf{v})$$

и считать функцию $\mathbf{R}(T, \mathbf{v})$ известной.

Уравнение для нее можно получить, используя равенство

$$\frac{\partial \mathbf{R}(T, \mathbf{v})}{\partial T} = \frac{\partial \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})}{\partial t} \Big|_{t=T} + \frac{\partial \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} \Big|_{t=T}. \quad (2.33)$$

Правая часть (2.33) определяется правыми частями (2.27) и (2.30) при $t = T$. В результате получаем замкнутое нелинейное (квазилинейное) уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{R}(T, \mathbf{v})}{\partial T} = -h_{kl} F_l(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})) \frac{\partial \mathbf{R}(T, \mathbf{v})}{\partial v_k} + \mathbf{F}(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})). \quad (2.34)$$

Начальное условие для (2.34) вытекает из (2.28) при $T \rightarrow 0$:

$$\mathbf{R}(T, \mathbf{v}) \Big|_{T=0} = (g + h)^{-1} \mathbf{v}. \quad (2.35)$$

Полагая теперь в (2.29) $t = 0$, получаем уравнение для второй краевой величины $\mathbf{S}(T, \mathbf{v}) = \mathbf{x}(0; T, \mathbf{v})$ вида

$$\frac{\partial \mathbf{S}(T, \mathbf{v})}{\partial T} = -h_{kl} F_l(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})) \frac{\partial \mathbf{S}(T, \mathbf{v})}{\partial v_k} \quad (2.36)$$

с начальным условием, вытекающим из (2.35):

$$\mathbf{S}(T, \mathbf{v}) \Big|_{T=0} = (g + h)^{-1} \mathbf{v}.$$

Таким образом наша задача свелась к замкнутому квазилинейному уравнению (2.34) с начальным условием (2.35) и к линейному уравнению (2.30), начальное условие и коэффициенты которого определяются решением уравнения (2.34) [42].

Для рассматриваемой задачи «вход» и «выход» 0 и T симметричны. Поэтому к решению краевой задачи можно подходить не только со стороны $T \rightarrow 0$, но и, наоборот со стороны $0 \rightarrow T$. При этом функции $\mathbf{R}(T, \mathbf{v})$ и $\mathbf{S}(T, \mathbf{v})$ как бы меняются местами.

Отметим еще важное обстоятельство, уравнение (2.30) является линейным в силу того, что это по сути дела, уравнение для вариаций, несмотря на то, что исходная задача (2.27) нелинейная. За нелинейность задачи отвечает уравнение (2.34).

Если функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ линейна по \mathbf{x} , т. е. $F_i(t, \mathbf{x}) = A_{ij}(t)x_j(t)$, то краевая задача (2.27), (2.28)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A(t) \mathbf{x}(t), \quad g\mathbf{x}(0) + h\mathbf{x}(T) = \mathbf{v},$$

упрощается и решение уравнений (2.30), (2.34) и (2.36) также будут линейными функциями по \mathbf{v} :

$$\mathbf{x}(t; T, \mathbf{v}) = X(t; T) \mathbf{v}. \quad (2.37)$$

В результате приходим к замкнутому матричному уравнению Риккати для матрицы $R(T) = X(T; T)$:

$$\frac{d}{dT} R(T) = A(T)R(T) - R(T)hA(T)R(T), \quad R(0) = (g + h)^{-1}. \quad (2.38)$$

Для матрицы же $X(t, T)$ получаем линейное матричное уравнение с начальным условием

$$\frac{\partial}{\partial T} X(t; T) = -X(t; T)hA(T)R(T), \quad X(t; T) \Big|_{T=t} = R(t). \quad (2.39)$$

Отметим, что для конкретных линейных краевых волновых задач практически удобнее получать уравнения погружения непосредственно, исходя из конкретной постановки задачи.

Задачи

Задача 2.1. Уравнение Гельмгольца с несогласованной границей. Получить уравнения погружения для краевой стационарной волновой задачи

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2(x)\right)u(x) = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dx} + ik_1\right)u(x)\Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left(\frac{d}{dx} - ik_0\right)u(x)\Big|_{x=L} = -2ik_0.$$

Указание. Переписать эту краевую задачу для функций $u(x) = u(x; L)$ и $v(x; L) = \frac{\partial}{\partial x}u(x; L)$ в виде краевой системы уравнений

$$\frac{d}{dx}u(x; L) = v(x; L), \quad \frac{d}{dx}v(x; L) = -k^2(x)u(x; L),$$

$$v(L_0; L) + ik_1u(L_0; L) = 0, \quad v(L; L) - ik_0u(L; L) = -2ik_0.$$

Решение.

$$\frac{\partial}{\partial L}u(x; L) = \left\{ ik_0 + \frac{i}{2k_0} [k^2(L) - k_0^2] u(L; L) \right\} u(x; L),$$

$$u(x; L)|_{L=x} = u(x; x),$$

$$\frac{d}{dL}u(L; L) = 2ik_0 [u(L; L) - 1] + \frac{i}{2k_0} [k^2(L) - k_0^2] u(L; L)^2,$$

$$u(L_0; L_0) = \frac{2k_0}{k_0 + k_1}.$$

Задача 2.2. Уравнение Гельмгольца со согласованной границей. Получить уравнения погружения для краевой стационарной волновой задачи

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2(x)\right)u(x; L) = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dx} + ik_1\right)u(x; L)\Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left(\frac{d}{dx} - ik(L)\right)u(x; L)\Big|_{x=L} = -2ik(L).$$

Решение.

$$\frac{\partial}{\partial L}u(x; L) = \left\{ ik(L) + \frac{1}{2} \frac{k'(L)}{k(L)} [2 - u(L; L)] \right\} u(x; L),$$

$$u(x; L)|_{L=x} = u(x; x),$$

$$\frac{d}{dL}u(L; L) = ik(L) [u(L; L) - 1] + \frac{1}{2} \frac{k'(L)}{k(L)} [2 - u(L; L)] u(L; L),$$

$$u(L_0; L_0) = \frac{2k(L_0)}{k(L_0) + k_1}.$$

Задача 2.3. Получить уравнения погружения для краевой задачи

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\rho'(x)}{\rho(x)} \frac{d}{dx} + p^2 [1 + \varepsilon(x)]\right)u(x) = 0,$$

$$\left(\frac{1}{\rho(x)} \frac{d}{dx} + ip\right)u(x)\Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left(\frac{1}{\rho(x)} \frac{d}{dx} - ip\right)u(x)\Big|_{x=L} = -2ip,$$

где $\rho'(x) = \frac{d\rho(x)}{dx}$.

Решение. Уравнения погружения по параметру L имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial L}u(x; L) = \{ip\rho(L) + \varphi(L)u(L; L)\} u(x; L),$$

$$u(x; L)|_{L=x} = u(x; x);$$

$$\frac{d}{dL}u(L; L) = 2ip\rho(L) [u(L; L) - 1] + \varphi(L)u^2(L; L),$$

$$u(L; L)|_{L=L_0} = 1,$$

где функция

$$\varphi(x) = \frac{ip}{2\rho(x)} [1 + \varepsilon(x) - \rho^2(x)].$$

Замечание. Приведенная краевая задача описывает разнообразные физические процессы, такие, например, как акустические волны в среде с переменной плотностью и некоторые типы электромагнитных волн. В этом случае величина $\varepsilon(x)$ описывает неоднородности скорости распространения волны (показатель преломления или диэлектрическую проницаемость), а функция $\rho(x)$ – плотность среды (для акустических волн).

Задача 2.4. Получить уравнения погружения для матричного уравнения Гельмгольца

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \gamma(x) \frac{d}{dx} + K(x)\right)U(x) = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dx} + B\right)U(x)\Big|_{x=L} = D, \quad \left(\frac{d}{dx} + C\right)U(x)\Big|_{x=0} = 0,$$

где $\gamma(x)$, $K(x)$, и $U(x)$ переменные, а B , C , и D постоянные матрицы.

Решение. Уравнения погружения имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial L} U(x; L) = U(x; L) \Lambda(L), \quad U(x; L)|_{L=x} = U(x; x),$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} U(L; L) &= D - \left\{ BU(L; L) + U(L; L) D^{-1} B D \right\} + \\ &+ U(L; L) D^{-1} \gamma(L) D + U(L; L) D^{-1} \left\{ K(L) - \gamma(L) B + B^2 \right\} U(L; L), \\ U(0; 0) &= (B - C)^{-1} D, \end{aligned}$$

где матрица $\Lambda(L)$:

$$\Lambda(L) = D^{-1} [\gamma(L) - B] D + D^{-1} [K(L) + B^2 - \gamma(L) B] U(L; L).$$

О черк 3

ИНДИКАТОРНАЯ ФУНКЦИЯ И УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ

Современный аппарат теории случайных процессов позволяет построить замкнутое описание динамических систем, если эти системы удовлетворяют условию динамической причинности и описываются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных или интегральными уравнениями определенного типа. Переход от описания исходной, вообще говоря, нелинейной системы к эквивалентному описанию с помощью линейных уравнений в частных производных можно осуществить с помощью индикаторных функций. Однако, размерность пространства переменных при этом увеличивается. Рассмотрим такой переход на примере динамических систем, рассмотренных в первой главе.

3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пусть стохастическая задача описывается системой уравнений (1.1) на с. 14

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0. \quad (3.1)$$

Введем скалярную функцию в пространстве (\mathbf{r}, t)

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}), \quad (3.2)$$

сосредоточенную на сечении случайного процесса $\mathbf{r}(t)$ заданной плоскостью $\mathbf{r}(t) = \text{const}$, и обычно называемую *индикаторной функцией*.

Дифференцируя (3.2) по времени t с помощью уравнения (3.1), получаем равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) = -\mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} [\mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t) \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r})]. \end{aligned}$$

Используя далее «выкалывающее» свойство дельта-функции

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t) \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r})$$

получаем линейное уравнение в частных производных

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \varphi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \varphi(\mathbf{r}, t_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (3.3)$$

которое эквивалентно исходной системе и называется *уравнением Лиувилля*. Это уравнение соответствует уравнению непрерывности для движения фазовых точек в фазовом пространстве $\{\mathbf{r}\}$.

Из изложенного метода вывода уравнения Лиувилля, ясно видно, что необходимо видеть разницу между функцией $\mathbf{r}(t)$ и параметром \mathbf{r} . В связи с этим, для правильной работы с дельта-функцией необходимо выписывать аргумент функции $\mathbf{r}(t)$ во всех промежуточных выкладках (сравни запись уравнений (3.1) и (1.1)). Пренебрежение этим правилом приводит, как правило, к ошибке.

Уравнение (3.3) можно переписать в виде линейного интегрального уравнения:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \{ \mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau) \varphi(\mathbf{r}, \tau) \},$$

вариация которого по функции $U_i(\mathbf{r}', t')$ с использованием формулы (2.6) на с. 62 приводит к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} &= - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial r_i} \left\{ \frac{\delta U_i(\mathbf{r}, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \varphi(\mathbf{r}, \tau) \right\} - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau) \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right\} = \\ &= -\theta(t-t')\theta(t'-t_0) \frac{\partial}{\partial r_j} \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}, t') \} - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau) \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где, как и ранее, $\theta(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Следовательно,

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \sim \theta(t-t')\theta(t'-t_0),$$

и вариационная производная удовлетворяет условию

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = 0, \quad \text{если } t' < t_0 \text{ или } t' > t,$$

которое выражает условие динамической причинности для уравнения Лиувилля (3.3).

При условии $t_0 < t' < t$ уравнение (3.4) можно записать в виде

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = - \frac{\partial}{\partial r_j} \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}, t') \} - \int_{t'}^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau) \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right\}, \quad (3.5)$$

откуда получаем равенство

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_i(\mathbf{r}', t')} \Big|_{t=t'+0} = - \frac{\partial}{\partial r_i} \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}, t') \}. \quad (3.6)$$

Отметим, что равенство (3.6) можно получить и непосредственно из выражения (2.17) на с. 65. В самом деле, вариационная производная $\delta\varphi(\mathbf{r}, t)/\delta U_j(\mathbf{r}', t')$, в силу определения функции $\varphi(\mathbf{r}, t)$,

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = \frac{\delta}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) = - \frac{\partial}{\partial r_i} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')}, \quad (3.7)$$

и, следовательно, при $t = t' + 0$ имеем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \Big|_{t=t'+0} &= - \frac{\partial}{\partial r_i} \delta(\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}) \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \Big|_{t=t'+0} = \\ &= - \frac{\partial}{\partial r_j} \{ \delta(\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \} = - \frac{\partial}{\partial r_j} \{ \varphi(\mathbf{r}, t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \}. \end{aligned}$$

Переход от системы (3.1) к уравнению Лиувилля (3.3) сопровождается расширением фазового пространства (\mathbf{r}, t) , которое, однако, имеет конечную размерность. Отметим, что уравнение (3.3) по своей форме совпадает с уравнением переноса смеси полем скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ (1.41) на с. 34 и отличается от него только начальным условием.

Решение уравнения (3.1) и, следовательно, функция (3.2) зависят от начальных условий \mathbf{r}_0, t_0 . Так, функция $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0)$, как функция переменных \mathbf{r}_0, t_0 , описывается линейным уравнением в частных производных первого порядка (2.21). Для таких уравнений также можно перейти к уравнению для индикаторной функции (см. следующий параграф) $\varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)$, которое в данном случае имеет вид также линейного уравнения по переменным \mathbf{r}_0, t_0 :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) \varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0) = 0, \quad \varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (3.8)$$

которое может быть названо *обратным уравнением Лиувилля*. И при этом для вариационной производной индикаторной функции $\varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)$

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = \frac{\delta}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0) - \mathbf{r}) = - \frac{\partial}{\partial r_i} \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0) - \mathbf{r}) \frac{\delta r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')},$$

как следствие условия динамической причинности, согласно равенству (2.26) на с. 67, получаем выражение

$$\begin{aligned} \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \Big|_{t'=t_0+0} &= - \frac{\partial}{\partial r_i} \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0, t_0) - \mathbf{r}) \frac{\delta r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \Big|_{t'=t_0+0} = \\ &= - \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}') \frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0j}} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_i}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

С другой стороны

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0j}} = - \frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0j}} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_i},$$

и, следовательно, равенство (3.9) принимает окончательный замкнутый вид

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \Big|_{t'=t_0+0} = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0j}}. \quad (3.10)$$

3.2. Уравнения в частных производных первого порядка

Если же мы имеем исходную задачу, описываемую дифференциальными уравнениями в частных производных, то также всегда можно перейти к эквивалентному описанию с помощью линейного уравнения в вариационных производных в бесконечномерном пространстве (*уравнение Хопфа*). Для конкретного типа задач такой переход может быть упрощен. Так, если исходная динамическая система описывается уравнением в частных производных первого порядка (*линейным*, типа уравнения (1.41) на с. 34, *квазилинейным*, типа уравнения (1.67) на с. 43, или в общем случае *нелинейным* уравнением (1.86) на с. 47), то фазовое пространство для соответствующей индикаторной функции имеет конечную размерность. Это связано с эквивалентностью уравнений в частных производных первого порядка и характеристических обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим эти случаи подробнее.

3.2.1. Случай линейного уравнения

Обратное уравнение Лиувилля

Рассмотрим прежде всего вывод обратного уравнения Лиувилля для индикаторной функции

$$\varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0, t_0) - \mathbf{r}),$$

как функции параметров (\mathbf{r}_0, t_0) . Продифференцируем функцию $\varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$ по t_0 и r_{0j} . В результате, с учетом уравнения (2.21) на с. 66, получаем выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0} &= - \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_i} \frac{\partial r_i(t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_i} \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial r_i(t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial \mathbf{r}_0}, \\ \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial \mathbf{r}_0} &= - \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_i} \frac{\partial r_i(t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial \mathbf{r}_0}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Умножая теперь второе уравнение в (3.11) скалярно на $\mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0)$ и складывая с первым, приходим к замкнутому уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = 0, \quad \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (3.12)$$

которое и является обратным уравнением Лиувилля, приведенному ранее без вывода на с. 75.

Перепишем уравнение (3.12) в виде линейного интегрального уравнения:

$$\varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \int_{t_0}^t d\tau \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, \tau). \quad (3.13)$$

Следовательно, вариационная производная $\delta\varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) / \delta U_j(\mathbf{r}', t')$ описывается линейным интегральным уравнением

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}') \theta(t' - t_0) \theta(t - t') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t')}{\partial r_{0j}} + \int_{t_0}^t d\tau \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')},$$

откуда следует, что

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \sim \theta(t' - t_0) \theta(t - t'),$$

т.е. выполняется условие динамической причинности. При условии $t_0 < t' < t$ это уравнение упрощается и принимает вид:

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t')}{\partial r_{0j}} + \int_{t_0}^{t'} d\tau \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')},$$

и, следовательно, в пределе $t' = t_0 + 0$ приходим к равенству (3.10), полученному ранее другим путем.

Диффузия поля плотности в случайном поле скоростей

Рассмотрим подробнее задачу о переносе примеси случайным полем скоростей, описываемом уравнением (1.41) на с. 34, которое запишем в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}). \quad (3.14)$$

Для описания поля плотности в эйлеровом представлении, введем индикаторную функцию, аналогичную (3.2):

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho), \quad (3.15)$$

сосредоточенную на поверхности $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$ в трехмерном случае или контуре в двумерном случае. Уравнение для нее легко получить как непосредственно из уравнения (3.14), так и исходя из уравнения Лиувилля в лагранжевом описании. В самом деле, дифференцируя (3.15) по времени и используя динамическое уравнение (3.14) и «выкальывающее» свойство дельта-функции, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \varphi(\mathbf{r}, t; \rho) + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi(\mathbf{r}, t; \rho), \quad (3.16)$$

которое, однако, незамкнуто из-за наличия в правой части величины $\partial \rho(\mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{r}$, которая не выражается в явной форме через $\rho(\mathbf{r}, t)$.

С другой стороны, дифференцируя функцию (3.15) по \mathbf{r} , получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = - \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi(\mathbf{r}, t; \rho). \quad (3.17)$$

Исключая теперь последний член в равенстве (3.16) с помощью (3.17), получаем замкнутое уравнение Лиувилля в эйлеровом описании:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \varphi(\mathbf{r}, t; \rho) &= \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho \varphi(\mathbf{r}, t; \rho)], \\ \varphi(\mathbf{r}, 0; \rho) &= \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Отметим, что для простейшей модели поля скоростей (1.3) на с.15 $\mathbf{U}(x, t) = \mathbf{v}(t)f(x)$ в безразмерных переменных (1.12) на с.18 уравнение Лиувилля (3.18) принимает вид одномерного уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x(t)f(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x, t; \rho) = v_x(t)\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \rho}[\rho\varphi(x, t; \rho)], \quad (3.19)$$

$$\varphi(x, 0; \rho) = \delta(\rho_0(x) - \rho).$$

Более полное описание можно получить, рассматривая расширенную индикаторную функцию для поля плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ и его пространственного градиента $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla\rho(\mathbf{r}, t)$:

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho)\delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}). \quad (3.20)$$

Дифференцируя уравнение (3.20) по времени, получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = -\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial p_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\right]\varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}). \quad (3.21)$$

Используя теперь динамическое уравнение для поля плотности (3.14) и уравнение (1.52) на с.38 для его пространственного градиента, можно переписать уравнение (3.21) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) &= \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}\rho + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\mathbf{p}\right]\varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial p_i}\left[\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial p_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}p_i + p_k\frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} + \rho\frac{\partial^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i \partial \mathbf{r}}\right]\varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (3.22)$$

которое не замкнуто из-за члена уравнения $\partial p_i(\mathbf{r}, t)/\partial \mathbf{r}$ в правой части уравнения.

Дифференцируя теперь индикаторную функцию (3.20) по \mathbf{r} , получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = -\left[\mathbf{p}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial p_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial p_i}\right]\varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}), \quad (3.23)$$

с помощью которого получаем уже замкнутое уравнение Лиувилля для расширенной индикаторной функции

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) &= \\ &= \left[\frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial p_i}p_k + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\rho + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{p}\right) + \frac{\partial^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i \partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial p_i}\rho\right]\varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (3.24)$$

с начальным условием

$$\varphi(\mathbf{r}, 0; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho)\delta(\mathbf{p}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{p}).$$

В случае бездивергентного поля скорости ($\text{div } \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0$) уравнение Лиувилля (3.24) упрощается и принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = \frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial p_i}p_k\varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}), \quad (3.25)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, 0; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho)\delta(\mathbf{p}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{p}).$$

Диффузия магнитного поля в случайном поле скоростей

Введем индикаторную функцию магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = \delta(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H}).$$

Дифференцируя эту функцию по времени с учетом динамического уравнения (1.61) на с.39 и выкалывающего свойства дельта функции, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) &= -\frac{\partial H_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial H_i}\varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = \\ &= -\left[\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} - H_i(\mathbf{r}, t)\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}\right]\frac{\partial}{\partial H_i}\varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) + \\ &+ \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial H_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial H_i}\varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial H_i}\left[\mathbf{H}\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} - H_i\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}\right]\varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial H_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial H_i}\varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}), \end{aligned}$$

которое не замкнуто из-за последнего члена. Но, учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = -\frac{\partial H_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial H_i}\delta(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H}),$$

и, следовательно,

$$-\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial H_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial H_i}\delta(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H}),$$

получаем искомое замкнутое уравнение Лиувилля [14]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial H_i}\left[\mathbf{H}\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} - H_i\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}\right]\varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) \quad (3.26)$$

с начальным условием

$$\varphi(\mathbf{r}, 0; \mathbf{H}) = \delta(\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{H}).$$

Отметим, что для простейшей модели поля скоростей (1.17) на с.20 $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{v}(t)f(x)$ в безразмерных переменных (1.12) на с.18 уравнение Лиувилля (3.26) для однородных начальных условий принимает вид уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x, t; \mathbf{H}) &= \left[-\frac{\partial}{\partial x}f(x) + f'(x)\left(1 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}}\mathbf{H}\right)\right]v_x(t)\varphi(x, t; \mathbf{H}) - \\ &- f'(x)H_{x0}v_i(t)\frac{\partial}{\partial H_i}\varphi(x, t; \mathbf{H}), \end{aligned} \quad (3.27)$$

с начальным условием

$$\varphi(x, 0; \mathbf{H}) = \delta(\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}).$$

3.2.2. Случай квазилинейного уравнения

Рассмотрим теперь простейшее квазилинейное уравнение для скалярной величины $q(\mathbf{r}, t)$ (1.67) на с. 43:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) q(\mathbf{r}, t) = Q(t, q), \quad q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}), \quad (3.28)$$

Если теперь попытаться, по аналогии с линейной задачей, получить замкнутое уравнение для индикаторной функции $\varphi(\mathbf{r}, t; q) = \delta(q(\mathbf{r}, t) - q)$, то этого сделать не удастся. Теперь необходимо дополнить уравнение (3.28) уравнением (1.68) на с. 43 для поля градиента $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla q(\mathbf{r}, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \{ \mathbf{U}(t, q) \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \}}{\partial q} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial Q(t, q)}{\partial q} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t), \quad (3.29)$$

и рассматривать расширенную индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{r}, t; q, \mathbf{p}) = \delta(q(\mathbf{r}, t) - q) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}). \quad (3.30)$$

Дифференцируя (3.30) по времени, с помощью уравнений (3.28) и (3.29) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t; q, \mathbf{p}) &= - \left[\frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial q(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial p_k(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \varphi(\mathbf{r}, t; q, \mathbf{p}) = \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial q} [\mathbf{p} \mathbf{U}(t, q) - Q(t, q)] + \frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial p_k(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\} \varphi(\mathbf{r}, t; q, \mathbf{p}) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial p_k} \left[p_k \left(\mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{U}(t, q)}{\partial q} - \frac{\partial Q(t, q)}{\partial q} \right) \right] \varphi(\mathbf{r}, t; q, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (3.31)$$

которое, однако, не замкнуто из-за наличия в правой части члена $\partial p_k(\mathbf{r}, t)/\partial \mathbf{r}$.

Продифференцируем теперь функцию (3.30) по \mathbf{r} , в результате получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}, t; q, \mathbf{p}) = - \left[\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial p_k(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial p_k} \right] \varphi(\mathbf{r}, t; q, \mathbf{p}). \quad (3.32)$$

Из (3.32) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial p_k(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}, t; q, \mathbf{p}) = - \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial q} \right] \varphi(\mathbf{r}, t; q, \mathbf{p}),$$

и, следовательно, уравнение (3.31) можно записать в замкнутом виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \varphi(\mathbf{r}, t; q, \mathbf{p}) &= \left[\mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{U}(t, q)}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q} Q(t, q) \right] \varphi(\mathbf{r}, t; q, \mathbf{p}) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial p_k} \left[p_k \left(\mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{U}(t, q)}{\partial q} - \frac{\partial Q(t, q)}{\partial q} \right) \right] \varphi(\mathbf{r}, t; q, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (3.33)$$

которое и является искомым уравнением Лиувилля для квазилинейного уравнения (3.28) в расширенном пространстве $\{q, \mathbf{p}\}$.

Отметим, что возможно подключить к уравнениям (3.28), (3.29) и уравнение неразрывности для консервативной величины $I(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} I(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \{ \mathbf{U}(t, q) I(\mathbf{r}, t) \} = 0, \quad I(\mathbf{r}, 0) = I_0(\mathbf{r}).$$

При этом для индикаторной функции

$$\varphi(\mathbf{r}, t; q, \mathbf{p}, I) = \delta(q(\mathbf{r}, t) - q) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}) \delta(I(\mathbf{r}, t) - I)$$

также получается замкнутое уравнение в пространстве $\{q, \mathbf{p}, I\}$. Это связано с тем обстоятельством, величина, обратная к $I(\mathbf{r}, t)$, в лагранжевом описании соответствует расходимости.

Отметим, что для одномерного уравнения Римана (1.79) на с. 46 для функции $q(x, t)$, дополненного уравнениями для поля градиента $p(x, t) = \frac{\partial q(x, t)}{\partial x}$ — (1.82) и логарифма поля плотности $\chi(x, t) = \ln \rho(x, t)$ — (1.84), уравнение Лиувилля для индикаторной функции

$$\varphi(x, t; q, p, \chi) = \delta(q(x, t) - q) \delta(p(x, t) - p) \delta(\chi(x, t) - \chi)$$

принимает вид уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x, t; q, p, \chi) = \left(p + \frac{\partial}{\partial p} p^2 + p \frac{\partial}{\partial \chi} \right) \varphi(x, t; q, p, \chi) \quad (3.34)$$

с начальным условием

$$\varphi(x, 0; q, p, \chi) = \delta(q_0(x) - q) \delta(p_0(x) - p) \delta(\chi_0(x) - \chi).$$

Решение уравнения (3.34) можно представить в виде

$$\varphi(x, t; q, p, \chi) = \exp \left\{ -tq \frac{\partial}{\partial x} \right\} \tilde{\varphi}(x, t; q, p, \chi),$$

где функция $\tilde{\varphi}(x, t; q, p)$ описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - p^2 \frac{\partial}{\partial p} - p \frac{\partial}{\partial \chi} \right) \tilde{\varphi}(x, t; q, p, \chi) = 3p \tilde{\varphi}(x, t; q, p, \chi) \quad (3.35)$$

с начальным условием

$$\varphi(x, 0; q, p, \chi) = \delta(q_0(x) - q) \delta(p_0(x) - p) \delta(\chi_0(x) - \chi).$$

Решая теперь уравнение (3.35) методом характеристик, получаем выражение

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x, t; q, p, \chi) &= \\ &= \frac{1}{(1 - pt)^3} \delta(q_0(x) - q) \delta \left(p_0(x) - \frac{p}{1 - pt} \right) \delta(\chi_0(x) - \ln(1 + tp_0(x)) - \chi), \end{aligned}$$

которое можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x, t; q, p, \chi) &= \\ &= [1 + tp_0(x)] \delta(q_0(x) - q) \delta \left(\frac{p_0(x)}{1 + tp_0(x)} - p \right) \delta(\chi_0(x) - \ln(1 + tp_0(x)) - \chi). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Таким образом, получаем окончательное решение уравнения (3.34) в виде

$$\varphi(x, t; q, p, \chi) = \exp \left\{ -qt \frac{\partial}{\partial x} \right\} \times \\ \times [1 + tp_0(x)] \delta(q_0(x) - q) \delta \left(\frac{p_0(x)}{1 + tp_0(x)} - p \right) \delta(\chi_0(x) - \ln(1 + tp_0(x)) - \chi), \quad (3.37)$$

в соответствии с решениями (1.80), (1.81) и (1.85) на с. 46.

3.2.3. Общий случай нелинейного уравнения

Рассмотрим теперь общий случай нелинейного скалярного уравнения в частных производных первого порядка (1.86) на с. 47:

$$\frac{\partial}{\partial t} q(\mathbf{r}, t) + H(\mathbf{r}, q, \mathbf{p}, t) = 0, \quad q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}), \quad (3.38)$$

где $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \partial q(\mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{r}$. Для получения замкнутого уравнения Лиувилля теперь необходимо дополнить уравнение (3.38) уравнениями для векторной величины $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$ и матрицы вторых производных $U_{ik}(\mathbf{r}, t) = \partial^2 q(\mathbf{r}, t) / \partial r_i \partial r_k$.

Введем теперь расширенную индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{r}, t; q, \mathbf{p}, U, I) = \delta(q(\mathbf{r}, t) - q) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}) \delta(U(\mathbf{r}, t) - U) \delta(I(\mathbf{r}, t) - I), \quad (3.39)$$

где для общности картины, мы включили также новую консервативную переменную $I(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющую уравнению неразрывности (1.88):

$$\frac{\partial}{\partial t} I(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \frac{\partial H(\mathbf{r}, q, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}} I(\mathbf{r}, t) \right\} = 0, \quad I(\mathbf{r}, 0) = I_0(\mathbf{r}). \quad (3.40)$$

Уравнения (3.38), (3.40) описывают, например, распространение волн в неоднородных средах в геометрооптическом приближении параболического уравнения квазиоптики (уравнения (1.93) на с. 49). Дифференцируя функцию (3.39) по времени и используя динамические уравнения для функций $q(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$, $U(\mathbf{r}, t)$ и $I(\mathbf{r}, t)$, мы, вообще говоря, приходим к незамкнутому уравнению, содержащему производные функции $q(\mathbf{r}, t)$ третьего порядка по пространственной переменной \mathbf{r} . Однако, комбинация

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H(\mathbf{r}, q, \mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \varphi(\mathbf{r}, t; q, \mathbf{p}, U, I)$$

уже не будет содержать третьих производных, в результате чего мы и приходим к замкнутому уравнению Лиувилля в пространстве $\{\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p}, U, I\}$.

3.3. Уравнения в частных производных высшего порядка

Если исходная динамическая система содержит производные порядка выше первого (например, оператор Лапласа), то уже невозможно получить замкнутое уравнение для соответствующей индикаторной функции. В этом случае можно получить только

замкнутое уравнение в вариационных производных (*уравнение Хопфа*) для функционала, среднее значение по ансамблю реализации которого определяет характеристический функционал решения соответствующего стохастического динамического уравнения. Рассмотрим такой переход на примерах уравнений в частных производных, рассмотренных в главе 1.

3.3.1. Параболическое уравнение квазиоптики

В качестве первого примера рассмотрим распространение волн в случайно-неоднородной среде в рамках линейного параболического уравнения (1.91) на с. 48:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}), \quad u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}). \quad (3.41)$$

Уравнение (3.41), как задача с начальными условиями, обладает свойством динамической причинности по переменной x . Действительно, перепишем его в виде интегрального уравнения

$$u(x, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}) + \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \Delta_{\mathbf{R}} u(\xi, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) u(\xi, \mathbf{R}). \quad (3.42)$$

Функция $u(x, \mathbf{R})$ является функционалом поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, т. е.

$$u(x, \mathbf{R}) = u \left[x, \mathbf{R}; \varepsilon(\tilde{x}, \tilde{\mathbf{R}}) \right].$$

Варьируя уравнение (3.42) по функции $\varepsilon(x', \mathbf{R}')$, получаем интегральное уравнение для вариационной производной $\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')}$

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = \frac{ik}{2} \theta(x - x') \theta(x') \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') u(x', \mathbf{R}') + \\ + \frac{ik}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) \frac{\delta u(\xi, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} + \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta u(\xi, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \quad (3.43)$$

Из этого уравнения следуют условия

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = 0 \quad \text{if} \quad x < x' \quad \text{or} \quad x' < 0, \quad (3.44)$$

которые и выражают свойства динамической причинности. В следствии этого факта, можно переписать уравнение (3.43) в виде ($0 < x' < x$)

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = \frac{ik}{2} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') u(x', \mathbf{R}') + \\ + \frac{ik}{2} \int_{x'}^x d\xi \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) \frac{\delta u(\xi, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} + \frac{i}{2k} \int_{x'}^x d\xi \Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta u(\xi, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \quad (3.45)$$

откуда следует равенство

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x-0, \mathbf{R}')} = \frac{ik}{2} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') u(x, \mathbf{R}). \quad (3.46)$$

Введем в рассмотрение функционал

$$\varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] = \exp \left\{ i \int d\mathbf{R}' [u(x, \mathbf{R}') v(\mathbf{R}') + u^*(x, \mathbf{R}') v^*(\mathbf{R}')] \right\}, \quad (3.47)$$

где волновое поле $u(x, \mathbf{R})$ — решение уравнения (3.41), а $u^*(x, \mathbf{R})$ — комплексно сопряженная функция. Дифференцируя (3.47) по x и используя динамическое уравнение (3.41) и комплексно сопряженное к нему, получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] &= \\ &= -\frac{1}{2k} \int d\mathbf{R} [v(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) - v^*(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} u^*(x, \mathbf{R})] \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] - \\ &\quad - \frac{k}{2} \int d\mathbf{R} \varepsilon(x, \mathbf{R}) [v(\mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}) - v^*(\mathbf{R}) u^*(x, \mathbf{R})] \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')], \end{aligned}$$

которое можно записать в виде уравнения в вариационных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] &= \frac{ik}{2} \int d\mathbf{R} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \widehat{M}(\mathbf{R}) \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] + \\ &\quad + \frac{i}{2k} \int d\mathbf{R} \left[v(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R})} - v^*(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R})} \right] \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] \quad (3.48) \end{aligned}$$

с начальным условием

$$\varphi[0; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] = \exp \left\{ i \int d\mathbf{R}' [u_0(\mathbf{R}') v(\mathbf{R}') + u_0^*(\mathbf{R}') v^*(\mathbf{R}')] \right\},$$

и эрмитовым оператором

$$\widehat{M}(\mathbf{R}) = v(\mathbf{R}) \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R})} - v^*(\mathbf{R}) \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R})}.$$

Уравнение (3.48) эквивалентно исходному уравнению (3.41).

Перепишем задачу (3.48) с начальным условием в виде интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \varphi[x; v(\tilde{\mathbf{R}}), v^*(\tilde{\mathbf{R}})] &= \varphi[0; v(\tilde{\mathbf{R}}), v^*(\tilde{\mathbf{R}})] + \frac{ik}{2} \int_0^x d\xi \int d\mathbf{R} \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) \widehat{M}(\mathbf{R}) \varphi[\xi; v(\tilde{\mathbf{R}}), v^*(\tilde{\mathbf{R}})] + \\ &\quad + \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \int d\mathbf{R} \left[v(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R})} - v^*(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R})} \right] \varphi[\xi; v(\tilde{\mathbf{R}}), v^*(\tilde{\mathbf{R}})] \end{aligned}$$

и проварируем его по функции $\varepsilon(x', \mathbf{R}')$. Тогда для вариационной производной $\frac{\delta \varphi[x; v(\tilde{\mathbf{R}}), v^*(\tilde{\mathbf{R}})]}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')}$ получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\delta \varphi[x; v(\tilde{\mathbf{R}}), v^*(\tilde{\mathbf{R}})]}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} &= \theta(x-x') \theta(x') \frac{ik}{2} \widehat{M}(\mathbf{R}') \varphi[x'; v(\tilde{\mathbf{R}}), v^*(\tilde{\mathbf{R}})] + \\ &\quad + \frac{ik}{2} \int_0^x d\xi \int d\mathbf{R} \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) \widehat{M}(\mathbf{R}) \frac{\delta \varphi[\xi; v(\tilde{\mathbf{R}}), v^*(\tilde{\mathbf{R}})]}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} + \\ &\quad + \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \int d\mathbf{R} \left[v(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R})} - v^*(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R})} \right] \frac{\delta \varphi[\xi; v(\tilde{\mathbf{R}}), v^*(\tilde{\mathbf{R}})]}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \end{aligned}$$

В силу условия динамической причинности его можно переписать в виде уравнения (при $0 < x' < x$)

$$\begin{aligned} \frac{\delta \varphi[x; v(\tilde{\mathbf{R}}), v^*(\tilde{\mathbf{R}})]}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} &= \frac{ik}{2} \widehat{M}(\mathbf{R}') \varphi[x'; v(\tilde{\mathbf{R}}), v^*(\tilde{\mathbf{R}})] + \\ &\quad + \frac{ik}{2} \int_{x'}^x d\xi \int d\mathbf{R} \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) \widehat{M}(\mathbf{R}) \frac{\delta \varphi[\xi; v(\tilde{\mathbf{R}}), v^*(\tilde{\mathbf{R}})]}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} + \\ &\quad + \frac{i}{2k} \int_{x'}^x d\xi \int d\mathbf{R} \left[v(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R})} - v^*(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R})} \right] \frac{\delta \varphi[\xi; v(\tilde{\mathbf{R}}), v^*(\tilde{\mathbf{R}})]}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \end{aligned}$$

и его следствием является равенство

$$\frac{\delta}{\delta \varepsilon(x-0, \mathbf{R})} \varphi[x; v(\tilde{\mathbf{R}}), v^*(\tilde{\mathbf{R}})] = \frac{ik}{2} \widehat{M}(\mathbf{R}) \varphi[x; v(\tilde{\mathbf{R}}), v^*(\tilde{\mathbf{R}})]. \quad (3.49)$$

3.3.2. Случайные силы в гидродинамической теории турбулентности

Рассмотрим теперь интегро-дифференциальное уравнение (1.105) на с. 53 для фурье-гармоник $\hat{u}(\mathbf{k}, t)$ решения уравнения Навье–Стокса (1.98):

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) + \frac{i}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \hat{u}_\alpha(\mathbf{k}_1, t) \hat{u}_\beta(\mathbf{k}_2, t) - \nu k^2 \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = \hat{f}_i(\mathbf{k}, t), \quad (3.50)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_i^{\alpha\beta} &= (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{1}{(2\pi)^3} \{k_\alpha \Delta_{i\beta}(\mathbf{k}) + k_\beta \Delta_{i\alpha}(\mathbf{k})\} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}), \\ \Delta_{ij} &= (\mathbf{k}) \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}, \end{aligned}$$

а $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$ — пространственная фурье-гармоника внешних сил.

Для функции $\hat{u}_i(\mathbf{k}, t)$ выполняется принцип динамической причинности, т. е. вариационная производная функции $\hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = \hat{u}_i[\mathbf{k}, t; \hat{f}_\alpha(\tilde{\mathbf{k}}, \tilde{t})]$, рассматриваемой как функционал поля $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$, по полю $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}', t')$

$$\frac{\delta \hat{u}_i(\mathbf{k}, t)}{\delta \hat{f}_j(\mathbf{k}', t')} = 0, \quad \text{если } t' > t \quad \text{или} \quad t' < 0$$

и при этом

$$\frac{\delta \hat{u}_i(\mathbf{k}, t)}{\delta \hat{f}_j(\mathbf{k}', t-0)} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3.51)$$

Введем функционал

$$\varphi[t; \mathbf{z}] = \varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] = \exp \left\{ i \int d\mathbf{k}' \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t) \mathbf{z}(\mathbf{k}') \right\}. \quad (3.52)$$

Дифференцируя этот функционал по времени t и используя динамическое уравнение (3.50), получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi[t; \mathbf{z}] &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \hat{u}_\alpha(\mathbf{k}_1, t) \hat{u}_\beta(\mathbf{k}_2, t) \varphi[t; \mathbf{z}] - \\ &\quad - i \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \left\{ \nu k^2 \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) - \hat{f}_i(\mathbf{k}, t) \right\} \varphi[t; \mathbf{z}], \end{aligned}$$

которое можно записать в виде линейного уравнения Хопфа в функциональном пространстве с вариационными производными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi[t; \mathbf{z}] &= -\frac{1}{2} \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{\delta^2 \varphi[t; \mathbf{z}]}{\delta z_\alpha(\mathbf{k}_1) \delta z_\beta(\mathbf{k}_2)} - \\ &\quad - \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \left\{ \nu k^2 \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k})} - i \hat{f}_i(\mathbf{k}, t) \right\} \varphi[t; \mathbf{z}] \quad (3.53) \end{aligned}$$

с заданным начальным условием при $t = 0$.

Следовательно для уравнения (3.53) выполняется условие динамической причинности, и как следствие этого условия выполняется равенство

$$\frac{\delta}{\delta \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t-0)} \varphi[t; \mathbf{z}] = i \mathbf{z}(\mathbf{k}) \varphi[t; \mathbf{z}]. \quad (3.54)$$

Аналогичным образом для пространственно-временной гармоники поля скоростей $\hat{u}_i(\mathbf{K})$, где через \mathbf{K} обозначен четырехмерный волновой вектор с координатами $\{\mathbf{k}, \omega\}$, ($\hat{u}_i^*(\mathbf{K}) = \hat{u}_i(-\mathbf{K})$ в силу вещественности поля $u_i(\mathbf{r}, t)$), мы имеем интегральное нелинейное уравнение (1.106) на с. 54:

$$\begin{aligned} (i\omega + \nu \mathbf{k}^2) \hat{u}_i(\mathbf{K}) + \frac{i}{2} \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \hat{u}_\alpha(\mathbf{K}_1) \hat{u}_\beta(\mathbf{K}) &= \hat{f}_i(\mathbf{K}), \\ \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) &= \frac{1}{2\pi} \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega), \quad (3.55) \end{aligned}$$

где $\hat{f}_i(\mathbf{K})$ — пространственно-временные фурье-гармоники внешних сил. В этом случае для функционала

$$\varphi[\mathbf{z}] = \varphi[\mathbf{z}(\mathbf{K}')] = \exp \left\{ i \int d^4 \mathbf{K}' \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{K}') \mathbf{z}(\mathbf{K}') \right\} \quad (3.56)$$

мы приходим к линейному уравнению с вариационными производными вида

$$\begin{aligned} (i\omega + \nu \mathbf{k}^2) \frac{\delta \varphi[\mathbf{z}]}{\delta z_i(\mathbf{K})} &= -\frac{1}{2} \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \frac{\delta \varphi[\mathbf{z}]}{\delta z_\alpha(\mathbf{K}_1) \delta z_\beta(\mathbf{K}_2)} + \\ &\quad + i \hat{f}_i(\mathbf{K}) \varphi[\mathbf{z}]. \quad (3.57) \end{aligned}$$

Задачи

Задача 3.1. Получить уравнение Лиувилля для гамильтоновой системы уравнений (1.16) на с. 20.

Решение. Индикаторная функция $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}(t) - \mathbf{v})$ удовлетворяет уравнению Лиувилля (уравнению непрерывности в $\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}$ пространстве)

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial r_k} \frac{\partial H(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial v_k} + \frac{\partial}{\partial v_k} \frac{\partial H(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial r_k} \right\} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),$$

которое можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = \{H(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\}, \quad (3.58)$$

где

$$\{H, \varphi\} = \left(\frac{\partial H}{\partial r_k} \frac{\partial \varphi}{\partial v_k} - \frac{\partial H}{\partial v_k} \frac{\partial \varphi}{\partial r_k} \right)$$

скобка Пуассона для функций $H(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$.

Задача 3.2. Установить связь между эйлеровой и лагранжевой индикаторными функциями для линейной задачи (3.14) на с. 77.

Решение.

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \int d\mathbf{r}_0 \int_0^\infty dj \, j \varphi_{\text{Lag}}(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0).$$

Задача 3.3. Получить уравнение (3.18) на с. 77 исходя из лагранжевого описания динамической системы (1.44), (1.45) на с. 34.

Часть II

**СТОХАСТИЧЕСКИЕ
УРАВНЕНИЯ**

О черк 4

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ПРОЦЕССЫ И ПОЛЯ

Прежде чем перейти к статистическому описанию рассмотренных задач обсудим основные понятия теории случайных величин, процессов и полей.

В данной главе приведены основные свойства случайных величин, процессов и полей, которые используются при анализе динамических систем с флуктуирующими параметрами, мало освещенные или совсем не освещенные в учебной литературе.

4.1. Случайные величины и их характеристики

Вероятность нахождения случайной величины ξ находиться в интервале $-\infty < \xi < z$ описывается монотонной функцией

$$F(z) = P(-\infty < \xi < z) = \langle \theta(z - \xi) \rangle_{\xi}, \quad F(\infty) = 1, \quad (4.1)$$

где

$$\theta(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z > 0 \\ 0, & \text{если } z < 0, \end{cases}$$

— ступенчатая функция Хевисайда, а через $\langle \dots \rangle_{\xi}$ обозначена операция усреднения по ансамблю реализаций случайной величины ξ . Эта функция называется *функцией распределения вероятностей* или *интегральной функцией распределения*. Определение (4.1) отражает практический метод нахождения вероятности, как предел отношения

$$P(-\infty < \xi < z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N},$$

где n — целое число выпадания события $\xi < z$ в N независимых испытаниях. Следовательно вероятность случайной величины ξ находиться в интервале $z < \xi < z + dz$, где dz — бесконечно малая величина, можно записать в виде

$$P(z < \xi < z + dz) = P(z)dz,$$

где функция $P(z)$ называется *плотностью вероятностей* и описывается формулой

$$P(z) = \frac{d}{dz} P(-\infty < \xi < z) = \langle \delta(z - \xi) \rangle_{\xi}, \quad (4.2)$$

где $\delta(z)$ — *дельта функция Дирака*. Через плотность вероятностей $P(z)$ интегральная функция распределения вероятностей описывается формулой

$$F(z) = P(-\infty < \xi < z) = \int_{-\infty}^z d\xi P(\xi) \quad (4.3)$$

и, следовательно,

$$P(z) > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dz P(z) = 1.$$

Умножая теперь равенство (4.2) на произвольную функцию $f(z)$ и интегрируя по всем значениям z , получаем выражение для среднего значения произвольной функции от случайной величины ξ в виде равенства

$$\langle f(\xi) \rangle_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} dz P(z) f(z). \quad (4.4)$$

Важной величиной, полностью описывающей все статистические характеристики случайной величины ξ , является ее *характеристическая функция*, определяемая равенством

$$\Phi(v) = \langle e^{iv\xi} \rangle_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{ivz} P(z).$$

Зная характеристическую функцию, можно получить как плотность вероятностей (преобразованием Фурье)

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \Phi(v) e^{-ivx},$$

так и *моменты*

$$M_n = \langle \xi^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz P(z) z^n = \left(\frac{d}{idv} \right)^n \Phi(v) \Big|_{v=0},$$

кумулянты (или *семинварианты*)

$$K_n = \left(\frac{d}{idv} \right)^n \Theta(v) \Big|_{v=0},$$

где $\Theta(v) = \ln \Phi(v)$, и другие статистические характеристики. Через моменты и кумулянты случайной величины ξ функции $\Theta(v)$ и $\Phi(v)$ выражаются с помощью рядов Тейлора

$$\Phi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} M_n v^n, \quad \Theta(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_n v^n. \quad (4.5)$$

Для многомерных случайных величин $\xi = \{z_1, \dots, z_n\}$ полное статистическое описание содержится в характеристической функции

$$\Phi(\mathbf{v}) = \langle e^{i\mathbf{v}\xi} \rangle_{\xi}, \quad \mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}. \quad (4.6)$$

Соответствующая совместная плотность вероятностей для величин ξ_1, \dots, ξ_n является преобразованием Фурье от $\Phi(\mathbf{v})$, т. е.

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\mathbf{v} \Phi(\mathbf{v}) e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}. \quad (4.7)$$

Подставляя функцию $\Phi(\mathbf{v})$ из (4.6) в (4.7) и выполняя интегрирование по \mathbf{v} , получаем очевидное равенство:

$$P(\mathbf{x}) = \langle \delta(v - \mathbf{x}) \rangle_{\xi} = \langle \delta(\xi_1 - x_1) \dots \delta(\xi_n - x_n) \rangle, \quad (4.8)$$

которое можно принять за определение плотности вероятностей случайной векторной величины ξ .

Моменты и кумулянты случайной величины ξ при этом определяются равенствами

$$M_{i_1, \dots, i_n} = \frac{\partial^n}{i^n \partial v_{i_1} \dots \partial v_{i_n}} \Phi(\mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=0}, \quad K_{i_1, \dots, i_n} = \frac{\partial^n}{i^n \partial v_{i_1} \dots \partial v_{i_n}} \Theta(\mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=0},$$

где $\Theta(\mathbf{v}) = \ln \Phi(\mathbf{v})$, а сами функции $\Theta(\mathbf{v})$ и $\Phi(\mathbf{v})$ выражаются через M_{i_1, \dots, i_n} и K_{i_1, \dots, i_n} с помощью рядов Тейлора:

$$\Phi(\mathbf{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} M_{i_1, \dots, i_n} v_{i_1} \dots v_{i_n}, \quad \Theta(\mathbf{v}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{i_1, \dots, i_n} v_{i_1} \dots v_{i_n}. \quad (4.9)$$

Отметим, что если случайная величина ξ может принимать лишь дискретные значения ξ_i ($i = 1, 2, \dots$) с вероятностями p_i , то в этом случае аналогом формулы (4.8) является формула

$$P_k = \langle \delta_{z, \xi_k} \rangle,$$

где $\delta_{i,k} = 1$, если $i = k$ и 0 в противном случае (*символ Кронекера*).

Рассмотрим теперь статистическое среднее $\langle \xi f(\xi) \rangle_{\xi}$, где $f(z)$ — произвольная детерминированная функция, такая, что написанная средняя величина существует. Для ее вычисления воспользуемся приемом, который далее будет широко использоваться. Вместо $f(\xi)$ введем функцию $f(\xi + \eta)$, где η — произвольная детерминированная величина. Разложим $f(\xi + \eta)$ в ряд Тейлора по ξ , т. е. представим ее в виде

$$f(\xi + \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\eta) \xi^n = e^{\xi \frac{d}{d\eta}} f(\eta),$$

где введен оператор сдвига по η . Далее можно написать равенство

$$\begin{aligned} \langle \xi f(\xi + \eta) \rangle_{\xi} &= \left\langle \xi \exp \left\{ \xi \frac{d}{d\eta} \right\} \right\rangle_{\xi} f(\eta) = \\ &= \frac{\left\langle \xi \exp \left\{ \xi \frac{d}{d\eta} \right\} \right\rangle_{\xi}}{\left\langle \exp \left\{ \xi \frac{d}{d\eta} \right\} \right\rangle_{\xi}} \left\langle \exp \left\{ \xi \frac{d}{d\eta} \right\} \right\rangle_{\xi} f(\eta) = \Omega \left(\frac{d}{id\eta} \right) \langle f(\xi + \eta) \rangle_{\xi}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где функция

$$\Omega(v) = \frac{\langle \xi e^{i\xi v} \rangle_{\xi}}{\langle e^{i\xi v} \rangle_{\xi}} = \frac{d}{idv} \ln \Phi(v) = \frac{d}{idv} \Theta(v),$$

а $\Phi(v)$ — характеристическая функция случайной величины ξ . Используя теперь для функции $\Theta(v)$ разложение в ряд Тейлора (4.5), для функции $\Omega(v)$ получаем разложение в виде ряда:

$$\Omega(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{n+1} v^n. \quad (4.11)$$

Учитывая, что переменная η в правой части (4.10) входит только в комбинации $\xi + \eta$, можно дифференцирование по η заменить на дифференцирование по ξ (при этом оператор $\Omega(d/id\xi)$ следует занести под знак усреднения) и положить $\eta = 0$. В результате получаем равенство

$$\langle \xi f(\xi) \rangle_{\xi} = \left\langle \Omega \left(\frac{d}{id\xi} \right) f(\xi) \right\rangle_{\xi},$$

которое, используя разложение (4.11) для $\Omega(v)$, можно переписать в виде ряда по кумулянтам K_n :

$$\langle \xi f(\xi) \rangle_{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} K_{n+1} \left\langle \frac{d^n f(\xi)}{d\xi^n} \right\rangle_{\xi}. \quad (4.12)$$

Отметим, что если в формуле (4.12) положить $f(\xi) = \xi^{n-1}$, то мы получаем рекуррентную связь между моментами и кумулянтами случайной величины ξ в виде

$$M_n = \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} K_k M_{n-k} \quad (M_0 = 1, \quad n = 1, 2, \dots). \quad (4.13)$$

В качестве примеров использования полученных выше формул, рассмотрим случайные величины ξ двух типов.

1. Величина ξ — гауссова случайная величина с плотностью вероятностей

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Для нее имеем

$$\Phi(v) = \exp \left\{ -\frac{v^2 \sigma^2}{2} \right\}, \quad \Theta(v) = -\frac{v^2 \sigma^2}{2}$$

и, следовательно,

$$M_1 = K_1 = \langle \xi \rangle = 0, \quad M_2 = K_2 = \sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle, \quad K_{n>2} = 0.$$

Рекуррентное равенство (4.13) в этом случае принимает вид

$$M_n = (n-1)\sigma^2 M_{n-2}, \quad n = 2, \dots, \quad (4.14)$$

откуда следует, что

$$M_{2n+1} = 0, \quad M_{2n} = (2n-1)!! \sigma^{2n}.$$

Для среднего значения (4.12) в этом случае получаем выражение

$$\langle \xi f(\xi) \rangle_{\xi} = \sigma^2 \left\langle \frac{df(\xi)}{d\xi} \right\rangle_{\xi}. \quad (4.15)$$

Если среднее значение случайной величины ξ отлично от нуля, т.е. $\langle \xi \rangle \neq 0$, то ее плотность вероятностей описывается выражением

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(\xi - \langle \xi \rangle)^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (4.16)$$

В этом случае для характеристической функции получаем равенство

$$\Phi(v) = \exp \left\{ iv \langle \xi \rangle - \frac{v^2 \sigma^2}{2} \right\}, \quad \Theta(v) = iv \langle \xi \rangle - \frac{v^2 \sigma^2}{2},$$

и, следовательно,

$$M_1 = K_1 = \langle \xi \rangle, \quad M_2 = \langle \xi \rangle^2 + \sigma^2, \quad K_2 = \sigma^2, \quad K_{n>2} = 0.$$

Соответствующая интегральная функция вероятностей (4.3) в этом случае описывается выражением

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^z d\xi \exp \left\{ -\frac{(\xi - \langle \xi \rangle)^2}{2\sigma^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{z - \langle \xi \rangle}{\sigma}} dy \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} = \Pr \left(\frac{z - \langle \xi \rangle}{\sigma} \right), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где функция

$$\Pr(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z dx \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} \quad (4.18)$$

называется *интегралом вероятностей*. При этом очевидно, что

$$\Pr(\infty) = 1 \quad \text{и} \quad \Pr(0) = \frac{1}{2}. \quad (4.19)$$

Отметим, что для отрицательных значений z ($z < 0$) эту функцию можно переписать в виде

$$\Pr(-|z|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|z|}^{\infty} dx \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} = 1 - \Pr(|z|). \quad (4.20)$$

Исходя из выражений (4.18) и (4.20) легко написать асимптотику интеграла вероятностей при $z \rightarrow \pm\infty$, а именно

$$\Pr(z)_{z \rightarrow \infty} \approx 1 - \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\}, \quad \Pr(z)_{z \rightarrow -\infty} \approx \frac{1}{|z|\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\}. \quad (4.21)$$

Если же величина является случайным гауссовым вектором с компонентами ξ_i ($\langle \xi_i \rangle = 0$, $i = 1, \dots, n$), то характеристическая функция описывается равенством

$$\Phi(\mathbf{v}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} B_{ij} v_i v_j \right\}, \quad \Theta(\mathbf{v}) = -\frac{1}{2} B_{ij} v_i v_j,$$

где матрица $B_{ij} = \langle \xi_i \xi_j \rangle$, и по повторяющимся индексам предполагается суммирование. В этом случае вместо (4.15) легко получить равенство

$$\langle \xi f(\xi) \rangle_{\xi} = B \left\langle \frac{df(\xi)}{d\xi} \right\rangle_{\xi}. \quad (4.22)$$

2. Величина $\xi \equiv n$ — целочисленная случайная величина, распределенная по закону Пуассона:

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}},$$

где \bar{n} — среднее значение величины n . Для нее имеем

$$\Phi(v) = \exp \left\{ \bar{n} (e^{iv} - 1) \right\}, \quad \Theta(v) = \bar{n} (e^{iv} - 1).$$

Для такой случайной величины рекуррентное равенство (4.13) и равенство (4.12) принимают вид

$$M_l = \bar{n} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(l-1)!}{k!(l-1-k)!} M_k \equiv \bar{n} \langle (n+1)^{l-1} \rangle, \quad (4.23)$$

$$\langle n f(n) \rangle = \bar{n} \langle f(n+1) \rangle.$$

4.2. Случайные процессы, поля и их характеристики

4.2.1. Общие замечания

Общим свойством для всех случайных функций $z(t)$ (случайных процессов) является то, что их отдельные реализации содержат выбросы как в сторону больших значений, так и в сторону меньших значений относительно некоторой детерминированной кривой, которую будем называть *кривой типичной реализации* (см. раздел 4.2.2). Такое свойство случайных процессов называется *перемежаемостью*.

Все статистические характеристики случайного процесса $z(t)$ в фиксированный момент времени t описываются одновременной плотностью вероятностей

$$P(z, t) = \langle \delta(z(t) - z) \rangle, \quad (4.24)$$

параметрически зависящей от времени, с помощью равенства

$$\langle f(z(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) P(z, t).$$

Интегральная функция распределения для этого процесса, определяющая вероятность того, что в момент времени t процесс $z(t) < Z$, вычисляется по формуле

$$F(t, Z) = P(z(t) < Z) = \int_{-\infty}^Z dz P(z, t)$$

и, следовательно,

$$F(t, Z) = \langle \theta(Z - z(t)) \rangle, \quad F(t, \infty) = 1, \quad (4.25)$$

где $\theta(z)$ — функция Хевисайда, равная нулю при $z < 0$ и единице при $z > 0$.

Отметим, что сингулярная дельта-функция Дирака, стоящая под знаком усреднения в (4.24)

$$\varphi(z, t) = \delta(z(t) - z),$$

называется *индикаторной функцией*.

Аналогичным образом определяется двухвременная плотность вероятностей

$$P(z_1, t_1; z_2, t_2) = \langle \varphi(z_1, t_1; z_2, t_2) \rangle$$

и, вообще, n -точечная плотность вероятностей

$$P(z_1, t_1; \dots; z_n, t_n) = \langle \varphi(z_1, t_1; \dots; z_n, t_n) \rangle,$$

где n -точечная индикаторная функция

$$\varphi(z_1, t_1; \dots; z_n, t_n) = \delta(z(t_1) - z_1) \dots \delta(z(t_n) - z_n).$$

Процесс $z(t)$ называется *стационарным*, если все его статистические характеристики инвариантны относительно сдвига во времени на произвольную величину τ , т. е.

$$P(z_1, t_1 + \tau; \dots; z_n, t_n + \tau) = P(z_1, t_1; \dots; z_n, t_n). \quad (4.26)$$

В частности, одновременная плотность вероятностей вообще не зависит от времени, а корреляционная функция зависит от модуля разности времен:

$$B_z(t_1, t_2) = \langle z(t_1)z(t_2) \rangle = B_z(|t_1 - t_2|).$$

Временной масштаб τ_0 , характеризующий корреляционную функцию $B_z(t)$, называется *временным радиусом корреляции* процесса $z(t)$. Этот масштаб можно определить, например, с помощью равенства:

$$\int_0^{\infty} \langle z(t + \tau)z(t) \rangle d\tau = \tau_0 \langle z^2(t) \rangle. \quad (4.27)$$

Отметим, что для стационарного процесса фурье-образ корреляционной функции называется *временной спектральной функцией* (или просто *временным спектром*):

$$\Phi_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt B_z(t) e^{i\omega t}.$$

Аналогичным образом определяются как одноточечная плотность вероятностей для случайного поля $f(\mathbf{x}, t)$:

$$P(\mathbf{x}, t; f) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t; f) \rangle, \quad (4.28)$$

так и многоточечная плотность вероятностей

$$P(\mathbf{x}_1, t_1, f_1; \dots; \mathbf{x}_n, t_n, f_n) = \langle \varphi(\mathbf{x}_1, t_1, f_1; \dots; \mathbf{x}_n, t_n, f_n) \rangle, \quad (4.29)$$

где индикаторные функции

$$\varphi(\mathbf{x}, t; f) = \delta(f(\mathbf{x}, t) - f), \quad (4.30)$$

$$\varphi(\mathbf{x}_1, t_1, f_1; \dots; \mathbf{x}_n, t_n, f_n) = \delta(f(\mathbf{x}_1, t_1) - f_1) \dots \delta(f(\mathbf{x}_n, t_n) - f_n).$$

Здесь для определенности через \mathbf{x} и t обозначены пространственные и временная координаты, хотя в физических задачах роль временной координаты в ряде случаев может играть и одна выделенная пространственная координата.

Случайное поле $f(\mathbf{x}, t)$ называется *пространственно однородным*, если все его статистические характеристики инвариантны относительно сдвига в пространстве на произвольный вектор \mathbf{a} , т. е.

$$P(\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}, t_1, f_1; \dots; \mathbf{x}_n + \mathbf{a}, t_n, f_n) = P(\mathbf{x}_1, t_1, f_1; \dots; \mathbf{x}_n, t_n, f_n).$$

В этом случае одноточечная плотность вероятностей $P(\mathbf{x}, t; f) = P(t; f)$ не зависит от \mathbf{x} , а пространственная корреляционная функция

$$B_f(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = \langle f(\mathbf{x}_1, t_1)f(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle = B_f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1, t_2).$$

Если к тому же случайное поле $f(\mathbf{x}, t)$ инвариантно и относительно поворота всех векторов \mathbf{x}_i на произвольный угол, т. е. относительно поворота системы координат, то случайное поле $f(\mathbf{x}, t)$ называется *однородным и изотропным случайным полем*. В этом случае корреляционная функция

$$B_f(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = \langle f(\mathbf{x}_1, t_1)f(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle = B_f(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, t_1, t_2).$$

Соответствующее преобразование Фурье от корреляционной функции по пространственной переменной определяет пространственную спектральную функцию

$$\Phi_f(\mathbf{k}, t) = \int d\mathbf{x} B_f(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}},$$

а преобразование Фурье от корреляционной функции стационарного во времени и однородного в пространстве случайного поля $f(\mathbf{x}, t)$ определяет пространственно-временную спектральную функцию поля $f(\mathbf{x}, t)$:

$$\Phi_f(\mathbf{k}, \omega) = \int d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} dt B_f(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \omega t)}.$$

Для изотропного случайного поля $f(\mathbf{x}, t)$ пространственная спектральная функция также изотропна в \mathbf{k} -пространстве, т. е.

$$\Phi_f(\mathbf{k}, \omega) = \Phi_f(k, \omega).$$

Для полного статистического описания случайной функции $z(t)$ достаточно знать ее характеристический функционал

$$\Phi[v(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau v(\tau) z(\tau) \right\} \right\rangle,$$

где функция $v(t)$ — произвольная (достаточно «хорошая») функция. Зная функционал $\Phi[v(\tau)]$ можно найти такие характеристики случайной функции $z(t)$, как ее среднее значение $\langle z(t) \rangle$, корреляционную функцию $\langle z(t_1)z(t_2) \rangle$, n -точечную моментную функцию $\langle z(t_1) \dots z(t_n) \rangle$ и т. д.

В самом деле, раскладывая характеристический функционал $\Phi[v(\tau)]$ в функциональный ряд Тейлора, получаем для него выражение через моментные функции процесса $z(t)$:

$$\Phi[v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n M_n(t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n),$$

$$M_n(t_1, \dots, t_n) = \langle z(t_1) \dots z(t_n) \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(t_1) \dots \delta v(t_n)} \Phi[v(\tau)] \Big|_{v=0}.$$

Таким образом, моментные функции случайного процесса $z(t)$ определяются через вариационные производные характеристического функционала.

Представим теперь $\Phi[v(\tau)]$ в виде $\Phi[v(\tau)] = \exp\{\Theta[v(\tau)]\}$. Функционал $\Theta[v(\tau)]$ также можно разложить в функциональный ряд Тейлора:

$$\Theta[v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_n(t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n), \quad (4.31)$$

где функция

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(t_1) \dots \delta v(t_n)} \Theta[v(\tau)] \Big|_{v=0}$$

называется *кумулянтной функцией* n -го порядка случайного процесса $z(t)$.

Аналогичным образом определяется и характеристический функционал случайного скалярного поля $f(\mathbf{x}, t)$:

$$\Phi[v(\mathbf{x}', \tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} dt v(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) \right\} \right\rangle = \exp \{ \Theta[v(\mathbf{x}', \tau)] \},$$

а также моментные и кумулянтные функции n -го порядка:

$$M_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \delta v(\mathbf{x}_n, t_n)} \Phi[v(\mathbf{x}', \tau)] \Big|_{v=0},$$

$$K_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \delta v(\mathbf{x}_n, t_n)} \Theta[v(\mathbf{x}', \tau)] \Big|_{v=0}.$$

Если $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — векторное случайное поле, то следует считать $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ векторной функцией.

Как отмечалось выше, полное описание случайных процессов и полей содержится в их характеристических функционалах. Однако, даже знание односточечных плотностей вероятностей случайных процессов и полей дает определенную информацию о эволюции случайных процессов во всем интервале времен и структуре случайных полей в пространстве. Эту информацию можно получить на основе идей статистической топографии случайных процессов и полей.

4.2.2. Статистическая топография случайных процессов и полей

Случайные процессы

Прежде всего обсудим понятие *кривой типичной реализации случайного процесса* $z(t)$, которое характеризует основные особенности поведения отдельной реализации процесса в целом на всем интервале времен.

Кривая типичной реализации случайного процесса. Назовем кривой типичной реализации случайного процесса $z(t)$ детерминированную кривую $z^*(t)$, которая является *медианой интегральной функции распределения* (4.25) и определяется как решение алгебраического уравнения

$$F(t, z^*(t)) = \int_{-\infty}^{z^*(t)} dz P(z, t) = \frac{1}{2}. \quad (4.32)$$

Это означает, с одной стороны, что для любого момента времени t вероятности

$$P\{z(t) > z^*(t)\} = P\{z(t) < z^*(t)\} = 1/2.$$

С другой стороны медиана имеет специфическое свойство, заключающееся в том, что для любого интервала времени (t_1, t_2) случайный процесс $z(t)$ как-бы «обвивает» кривую $z^*(t)$ таким образом, что среднее время, в течении которого выполняется неравенство $z(t) > z^*(t)$, совпадает со средним временем в течении которого выполняется обратное неравенство $z(t) < z^*(t)$ (рис. 4.1), т. е.

$$\langle T_{z(t) > z^*(t)} \rangle = \langle T_{z(t) < z^*(t)} \rangle = \frac{1}{2} (t_2 - t_1). \quad (4.33)$$

В самом деле, интегрируя равенство (4.32) по времени в интервале (t_1, t_2) , получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt F(t, z^*(t)) = \frac{1}{2} (t_2 - t_1). \quad (4.34)$$

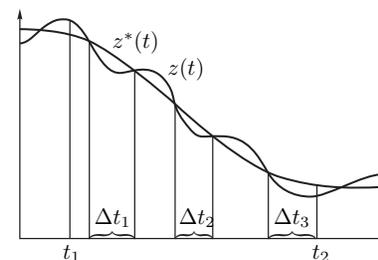


Рис. 4.1. К определению кривой типичной реализации случайного процесса

С другой стороны, в силу определения интегральной функции распределения (4.25), интеграл в левой части (4.34) равен

$$\int_{t_1}^{t_2} dt F(t, z^*(t)) = \langle T(t_1, t_2) \rangle, \quad (4.35)$$

где $T(t_1, t_2) = \sum_1^N \Delta t_k$ — общее время из интервала (t_1, t_2) , в течении которого реализация процесса $z(t)$ лежит выше кривой $z^*(t)$. Сопоставляя (4.34) с (4.35), и получаем равенство (4.33).

Кривая $z^*(t)$ может, естественно, существенно отличаться от любой конкретной реализации процесса $z(t)$ и не описывает величину возможных выбросов. Таким образом, кривая типичной реализации $z^*(t)$ случайного процесса $z(t)$, полученная с помощью одновременной плотности вероятностей, определена тем не менее на всем интервале времени $t \in (0, \infty)$ и является той детерминированной кривой, относительно которой осуществляется перемежаемость.

Для конкретных типов случайных процессов можно получить дополнительную информацию, характеризующую уже выбросы относительно этой кривой.

Статистика числа точек пересечения процесса с прямой. Одноточечная плотность вероятностей (4.24) для случайного процесса $z(t)$ является результатом усреднения сингулярной индикаторной функции по ансамблю реализаций случайного процесса $z(t)$. Эта функция сосредоточена на точках пересечения процесса $z(t)$ прямой $z = \text{const}$, определяемых как корни алгебраического уравнения

$$z(t_n) = z \quad (n = 0, 1, \dots, \infty),$$

и, следовательно, ее можно переписать в виде

$$\varphi(z, t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{|p(t_k)|} \delta(t - t_k),$$

где $p(t) = \frac{d}{dt} z(t)$.

Число таких точек само является случайной величиной, которая, очевидно, описывается формулой

$$n(t, z) = \int_{-\infty}^t d\tau |p(\tau)| \varphi(\tau; z). \quad (4.36)$$

Следовательно, среднее значение числа точек пересечения процесса $z(t)$ прямой $z = \text{const}$ описывается корреляцией временной производной процесса $z(t)$ с ее индикаторной функцией или совместной одновременной плотностью вероятностей процесса $z(t)$ и ее временной производной $\frac{d}{dt} z(t)$.

Аналогичным образом легко определить и некоторые элементы статистики, связанной с точками максимума (минимума) и т. п. случайного процесса $z(t)$.

Случайные поля

В статистической топографии случайных полей основным объектом изучения, как и в обычной топографии горных массивов, является система контуров — линий уровня (в двумерном случае) или поверхностей (в трехмерном случае) постоянных значений, определяемых равенством $f(\mathbf{r}, t) = f = \text{const}$.

Для анализа системы контуров (для простоты в данном разделе, будем говорить о двумерном случае ($\mathbf{r} = \mathbf{R}$)) удобно ввести сингулярную индикаторную функцию (4.30), сосредоточенную на них.

Через функцию (4.30) выражаются, например, такие величины как общая площадь областей, ограниченных линиями уровня, где $f(\mathbf{R}, t) > f$:

$$S(t; f) = \int \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) d\mathbf{R} = \int_f^\infty df' \int d\mathbf{R} \varphi(\mathbf{R}, t; f'),$$

и общая «масса» поля, заключенная в этих областях:

$$M(t; f) = \int f(\mathbf{R}, t) \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) d\mathbf{R} = \int_f^\infty f' df' \int d\mathbf{R} \varphi(\mathbf{R}, t; f').$$

Как указывалось выше, среднее значение индикаторной функции (4.30) по ансамблю реализаций определяет одновременную во времени и одноточечную в пространстве плотность вероятностей

$$P(\mathbf{R}, t; f) = \langle \varphi(\mathbf{R}, t; f) \rangle = \langle \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \rangle,$$

и, следовательно, средние по ансамблю реализаций значения всех выражений непосредственно определяются этой плотностью вероятностей.

Дополнительную информацию о детальной структуре поля $f(\mathbf{R}, t)$ можно получить, включив в рассмотрение его пространственный градиент $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) = \nabla f(\mathbf{R}, t)$. Так, например, величина

$$l(t; f) = \int d\mathbf{R} |\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)| \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) = \oint dl \quad (4.37)$$

описывает общую длину контуров и является обобщением формулы (4.36) на случайные поля.

Подынтегральное выражение в (4.37) описывается расширенной индикаторной функцией

$$\varphi(\mathbf{R}, t; f, \mathbf{p}) = \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{p}), \quad (4.38)$$

и среднее значение формулы (4.37) связано с совместной одновременной плотностью вероятностей полей $f(\mathbf{R}, t)$ и его градиента $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)$, определяемой путем усреднения индикаторной функции (4.38) по ансамблю реализаций, т. е. функцией

$$P(\mathbf{R}, t; f, \mathbf{p}) = \langle \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{p}) \rangle.$$

Включение в рассмотрение пространственных производных второго порядка позволяет оценить общее число контуров $f(\mathbf{R}, t) = f = \text{const}$ с помощью приближенной (с точностью до незамкнутых линий) формулы:

$$N(t; f) = N_{\text{in}}(t; f) - N_{\text{out}}(t; f) = \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{R} \kappa(t, \mathbf{R}; f) |\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)| \delta(f(\mathbf{R}, t) - f),$$

где $N_{\text{in}}(t; f)$, $N_{\text{out}}(t; f)$ — числа контуров, для которых вектор \mathbf{p} направлен по внутренней и внешней нормали, соответственно, а $\kappa(t, \mathbf{R}; f)$ — кривизна линии уровня.

4.2.3. Об условиях возникновения стохастического структурообразования

Обсудим теперь, условия возникновения стохастического структурообразования. Ясно, что для *положительного поля* $f(\mathbf{R}, t)$ в общем случае условием ее кластеризации с вероятностью единица, т.е. почти для всех ее реализаций, является одновременная тенденция выполнения асимптотических равенств при $t \rightarrow \infty$

$$\langle S(t; f) \rangle \rightarrow 0, \quad \langle M(t; f) \rangle \rightarrow \int d\mathbf{R} \langle f(\mathbf{R}, t) \rangle.$$

Отсутствию же структурообразования соответствует одновременная тенденция выполнения асимптотических равенств при $t \rightarrow \infty$

$$\langle S(t; f) \rangle \rightarrow \infty, \quad \langle M(t; f) \rangle \rightarrow \int d\mathbf{R} \langle f(\mathbf{R}, t) \rangle.$$

Для пространственно однородного поля $f(\mathbf{R}, t)$ одноточечная плотность вероятностей $P(\mathbf{R}, t; f)$ не зависит от \mathbf{R} . В этом случае статистические средние всех выражений (без интегрирования по \mathbf{R}) будут описывать удельные (приходящиеся на единицу площади) значения этих величин.

Так, удельная средняя площадь $\langle s_{\text{hom}}(t; f) \rangle$, на которой случайное поле $f(\mathbf{R}, t)$ превышает заданный уровень f , совпадает с вероятностью события в любой точке пространства $f(\mathbf{R}, t) > f$: $\langle s_{\text{hom}}(t; f) \rangle = \langle \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) \rangle = \mathbf{P}\{f(\mathbf{R}, t) > f\}$ и средняя удельная площадь является геометрической интерпретацией вероятности события $f(\mathbf{R}, t) > f$, не зависящей, естественно, от точки \mathbf{R} . Следовательно условия кластеризации для *однородного* случая сводятся к тенденции выполнения асимптотических равенств при $t \rightarrow \infty$

$$\langle s_{\text{hom}}(t; f) \rangle = \mathbf{P}\{f(\mathbf{r}, t) > f\} \rightarrow 0,$$

$$\langle m_{\text{hom}}(t; f) \rangle \rightarrow \langle f(t) \rangle.$$

Отсутствие же кластеризации соответствует тенденции выполнения асимптотических равенств при $t \rightarrow \infty$

$$\langle s_{\text{hom}}(t; f) \rangle = \mathbf{P}\{f(\mathbf{r}, t) > f\} \rightarrow 1,$$

$$\langle m_{\text{hom}}(t; f) \rangle \rightarrow \langle f(t) \rangle.$$

Таким образом, кластеризация в пространственно-однородной стохастической задаче есть физическое явление (происходящее с вероятностью единица, т.е. почти

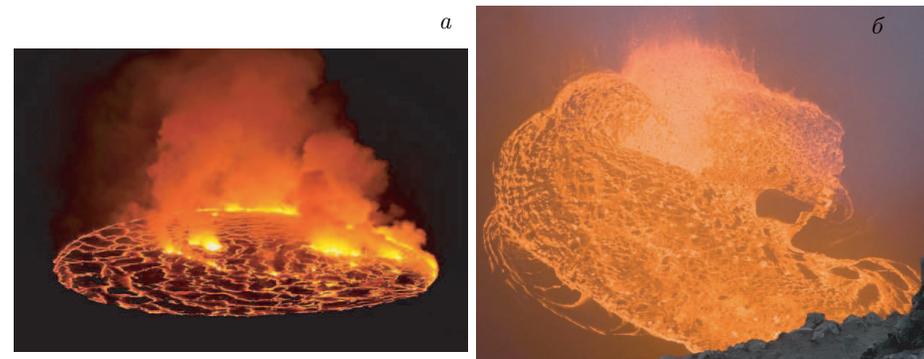


Рис. 4.2. Озеро кипящей лавы (самое большое в мире), бурлящее в глубинах кратера вулкана Нирагонго, в самом сердце района Великих Африканских озер (а), и кратер вулкана Килауэа в Гавайском вулканическом национальном парке (б).

для всех реализаций случайного положительного поля), порожденное редким событием, вероятность которого стремится к нулю.

При наличии кластеризации поле в большей части пространства просто отсутствует!

Приведенный критерий "идеальной" кластеризации (по аналогии с идеальной гидродинамикой) описывает динамику образования кластеров для динамических систем, описываемых, вообще говоря, уравнениями в частных производных первого порядка. Эта *идеальная* структура образуется в виде очень *тонкой ленты* (в двумерном случае) или очень *тонких трубок* (в трехмерном случае).

Для *реальных* же физических систем, в дальнейшем начинают проявляться различные дополнительные факторы, связанные с генерацией пространственных производных случайного поля типа пространственной диффузии или дифракции, которые *деформируют*, но *не ликвидируют* эту картину кластеризации. В частности, возможна ситуация, когда соответствующая плотность вероятностей выходит на стационарный режим $P(\mathbf{R}; f)$ при $t \rightarrow \infty$. В этом случае функционалы типа $\langle S(f) \rangle = \int f df' \int d\mathbf{R} P(\mathbf{R}; f')$ и $\langle M(f) \rangle = \int f df' \int d\mathbf{R} P(\mathbf{R}; f')$ уже не описывают дальнейшую деформацию кластерной картины. И необходимо изучать временную эволюцию функционалов, связанных с пространственными производными поля $f(\mathbf{R}, t)$, типа общей длины контуров и число контуров.

В качестве примера "идеальной" и "деформируемой" кластеризации в природе можно указать на озера лавы в кратерах вулканов¹ на рисунках 4.2. Далее, в Очерке 13 – О волнах в случайных средах будут продемонстрированы подобные картинки, полученные как в лабораторных экспериментах, так и при численном моделировании.

При этом в силу однородности и в ряде случаев изотропности может оказаться, что

¹<http://bigpicture.ru/?p=128340>,
<http://pacificislandparks.com/2010/01/20/more-amazing-lava-lake-photos/>

пространственные производные поля $f(\mathbf{R}, t)$ не коррелируют с самим полем $f(\mathbf{R}, t)$. И задача вычисления средних значений описанных функционалов может существенно упроститься и свестись к вычислению соответствующих моментных функций производных поля $f(\mathbf{R}, t)$. При этом все рассмотренные выше статистические характеристики являются интегральными, характеризующими динамику стохастических систем в целом во всем пространстве.

Для анализа одноточечных статистических характеристик в этом случае удобно учитывать, что случайное поле $f(\mathbf{R}, t)$ статистически эквивалентно некоему случайному процессу $z(t)$ с теми же статистическими характеристиками.

Рассмотрим теперь несколько примеров случайных процессов и полей.

4.2.4. Гауссов случайный процесс

Прежде всего обсудим случай непрерывного процесса — гауссова случайного процесса $z(t)$ со средним значением равным нулю ($\langle z(t) \rangle = 0$) и корреляционной функцией $B(t_1, t_2) = \langle z(t_1)z(t_2) \rangle$. Его характеристический функционал имеет вид

$$\Phi[v(\tau)] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 B(t_1, t_2) v(t_1) v(t_2) \right\}. \quad (4.39)$$

Для этого процесса единственной отличной от нуля кумулянтной функцией является его корреляционная функция $K_2(t_1, t_2) = B(t_1, t_2)$ и, следовательно,

$$\Theta[v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 B(t_1, t_2) v(t_1) v(t_2). \quad (4.40)$$

Рассмотрим n -ю вариационную производную от $\Phi[v(\tau)]$. Для нее получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \frac{\delta^n}{\delta v(t_1) \dots \delta v(t_n)} \Phi[v(\tau)] &= \frac{\delta^{n-1}}{\delta v(t_2) \dots \delta v(t_n)} \frac{\delta \Theta[v(\tau)]}{\delta v(t_1)} \Phi[v(\tau)] = \\ &= \frac{\delta^2 \Theta[v(\tau)]}{\delta v(t_1) \delta v(t_2)} \frac{\delta^{n-2}}{\delta v(t_3) \dots \delta v(t_n)} \Phi[v(\tau)] + \frac{\delta^{n-2}}{\delta v(t_3) \dots \delta v(t_n)} \frac{\delta \Theta[v(\tau)]}{\delta v(t_1)} \frac{\delta \Phi[v(\tau)]}{\delta v(t_2)}. \end{aligned}$$

Полагая теперь $v = 0$, получаем для моментных функций гауссова процесса $z(t)$ рекуррентное равенство

$$M_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{k=2}^n B(t_1, t_2) M_{n-2}(t_2, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n). \quad (4.41)$$

Отсюда следует, что для гауссова процесса со средним значением, равным нулю, все моментные функции нечетного порядка равны нулю, а моментные функции четного порядка определяются суммой, в которой процессы $z(t_i)z(t_k)$ усредняются попарно всевозможными способами.

Если функция $v(\tau)$ в формуле (4.40) отлична от нуля только в интервале $0 < \tau < t$, то характеристический функционал

$$\Phi[t; v(\tau)] = \left\langle e^{i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau)} \right\rangle = \exp \left\{ -\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2) \right\} \quad (4.42)$$

зависит также и от времени t , и в этом случае функционал $\Phi[t; v(\tau)]$, как функция параметра t , удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = -v(t) \int_0^t dt_1 B(t, t_1) v(t_1) \Phi[t; v(\tau)], \quad \Phi[0; v(\tau)] = 1. \quad (4.43)$$

Чтобы получить временную характеристическую функцию в момент времени t для гауссова случайного процесса положим в (4.39) функцию $v(\tau)$ в виде

$$v(\tau) = v \delta(\tau - t).$$

В результате получаем

$$\Phi(v, t) = \left\langle e^{ivz(t)} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz P(z, t) e^{ivz} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2(t) v^2 \right\}, \quad (4.44)$$

где $\sigma^2(t) = B(t, t)$. Временную плотность вероятностей гауссова случайного процесса получим, выполняя обратное преобразование Фурье от (4.44)

$$P(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \Phi(v, t) e^{-ivz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma^2(t)} \right\}. \quad (4.45)$$

Отметим, что для стационарного во времени случайного процесса $z(t)$ величина дисперсии $\sigma^2(t)$ не зависит от времени t , т. е. $\sigma^2(t) = \sigma^2 = \text{const}$.

Функция $P(z, t)$ симметрична по z относительно точки $z = 0$, т. е.

$$P(z, t) = P(-z, t).$$

При наличии среднего значения для гауссова случайного процесса $z(t) - \langle z(t) \rangle$, вместо (4.45) получаем выражение

$$P(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{(z - \langle z(t) \rangle)^2}{2\sigma^2(t)} \right\}, \quad (4.46)$$

и интегральная функция распределения вероятностей запишется в виде

$$F(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_{-\infty}^z dz \exp \left\{ -\frac{(z - \langle z(t) \rangle)^2}{2\sigma^2(t)} \right\} = \text{Pr} \left(\frac{z - \langle z(t) \rangle}{\sigma(t)} \right),$$

где интеграл вероятностей $\text{Pr}(z)$ определяется равенством (4.18) на с. 94.

Кривая типичной реализации (4.32) для гауссова случайного процесса $z(t)$ в этом случае совпадает со средним значением процесса $z(t)$, т. е.

$$z^*(t) = \langle z(t) \rangle, \quad (4.47)$$

в силу равенства (4.19) на с. 94.

4.2.5. Гауссово векторное случайное поле

Рассмотрим теперь основные пространственно-временные статистические характеристики гауссова векторного случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ с нулевым средним значением и корреляционным тензором

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle.$$

Это векторное поле будем для определенности отождествлять с полем скоростей.

Случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ предполагается в общем случае дивергентным ($\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$) гауссовым полем статистически однородным, обладающим сферической симметрией, но не имеющее отражательной симметрии в пространстве, и стационарным во времени с корреляционным и спектральным тензорами ($\tau = t - t_1$)

$$B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \tau) = \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle = \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)},$$

$$E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{r} B_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

где параметр d – размерность пространства. В силу предполагаемых условий симметрии, корреляционный тензор $B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \tau)$ имеет векторную структуру [27] ($\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}$)

$$B_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = B_{ij}^{\text{iso}}(\mathbf{r}, \tau) + C(r, \tau) \varepsilon_{ijk} r_k, \quad (4.48)$$

где изотропная часть корреляционного тензора

$$B_{ij}^{\text{iso}}(\mathbf{r}, \tau) = A(r, \tau) r_i r_j + B(r, \tau) \delta_{ij},$$

где ε_{ijk} – псевдотензор, описанный в разделе 1.3.1 на с. 38. Через этот тензор определяется, например, *поле вихря скорости*

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = [\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)], \quad (4.49)$$

компоненты которого имеют вид

$$\omega_i(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_j}.$$

Отметим, что в двумерном случае вектор $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)$ имеет только одну компоненту, ортогональную полю скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, и в этом случае величина, называемая *спиральностью поля скорости*

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Для корреляционного тензора поля вихря и его спектра с помощью выражения (1.55) на с. 39 можно получить равенства [27]

$$\begin{aligned} \langle \omega_i(\mathbf{r}, t) \omega_j(\mathbf{r}', t') \rangle = & -\delta_{ij} \Delta_{\mathbf{r}} B_{ll}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') + \frac{\partial^2 B_{ll}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')}{\partial r_i \partial r_j} + \\ & + \Delta_{\mathbf{r}} B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \end{aligned}$$

$$\Omega_{ij}(\mathbf{k}, t - t') = (\delta_{ij} \mathbf{k}^2 - k_i k_j) E_{ll}(\mathbf{k}, t - t') - \mathbf{k}^2 E_{ij}(\mathbf{k}, t - t'),$$

сворачивая которые по индексам i и j , и полагая $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, получаем выражения для корреляционной и спектральной функций поля вихря

$$\langle \omega_i(\mathbf{r}, t) \omega_i(\mathbf{r}, t') \rangle = -\Delta_{\mathbf{r}} B_{ll}(\mathbf{0}, t - t') = -\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t') \rangle, \quad (4.50)$$

$$\Omega_{ii}(\mathbf{k}, t - t') = \mathbf{k}^2 E_{ii}(\mathbf{k}, t - t').$$

Отметим, что в случае отсутствия отражательной симметрии в трехмерном случае, аналогично вычислению дисперсии и спектра поля вихря, можно вычислить и среднее значение спиральности поля скорости

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t).$$

Так, для статистически средней величины $\langle \omega_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}, t) \rangle$ с учетом равенства (1.56) на с. 39 получаем выражение

$$\begin{aligned} \langle \omega_i(\mathbf{r}, t) u_p(\mathbf{r}', t) \rangle_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} &= \varepsilon_{ijk} \left\langle \frac{\partial u_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_j} u_p(\mathbf{r}', t) \right\rangle_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} B_{kp}(\mathbf{r}, 0)_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} = \\ &= \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_j} C(r, 0) \varepsilon_{kpm} r_m = C(0, 0) \varepsilon_{ijm} \varepsilon_{mpj} = 2C(0, 0) \delta_{ip} \end{aligned}$$

и, следовательно для среднего значения спиральности гауссового случайного поля в трехмерном случае получаем

$$\langle \chi(\mathbf{r}, t) \rangle = 6C(0, 0). \quad (4.51)$$

Изотропной части корреляционного тензора соответствует пространственный спектральный тензор вида

$$E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = E_{ij}^{\text{s}}(\mathbf{k}, \tau) + E_{ij}^{\text{p}}(\mathbf{k}, \tau),$$

где спектральные составляющие тензора поля скоростей имеют структуру

$$E_{ij}^{\text{s}}(\mathbf{k}, \tau) = E^{\text{s}}(k, \tau) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad E_{ij}^{\text{p}}(\mathbf{k}, \tau) = E^{\text{p}}(k, \tau) \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

Здесь через $E^{\text{s}}(k, \tau)$ и $E^{\text{p}}(k, \tau)$ обозначены соответственно соленоидальная и потенциальная компоненты спектральной плотности поля скоростей.

Определим теперь функцию $B_{ij}(\mathbf{r})$ как интеграл по времени от корреляционной функции (4.48), т. е.

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = \int_0^{\infty} d\tau B_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = B_{ij}^{\text{iso}}(\mathbf{r}) + C(r) \varepsilon_{ijk} r_k, \quad (4.52)$$

тогда величина $B_{ij}(\mathbf{0}) = D_0 \delta_{ij}$ и, следовательно, величина

$$B_{ii}(\mathbf{0}) = D_0 d = \tau_0 \sigma_{\mathbf{u}}^2 = \int d\mathbf{k} [(d-1) E^{\text{s}}(k) + E^{\text{p}}(k)] \quad (4.53)$$

определяет временной радиус корреляции поля скоростей – τ_0 , где $\sigma_{\mathbf{u}}^2 = B_{ii}(\mathbf{0}, 0) = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ – его дисперсия, а величины

$$E^S(k) = \int_0^\infty d\tau E^S(k, \tau), \quad E^P(k) = \int_0^\infty d\tau E^P(k, \tau). \quad (4.54)$$

Для корреляционной функции (4.52) вычисления, связанные с пространственными производными поля скоростей, существенно упрощаются. Так в этом случае имеет место

$$\frac{\partial B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_k} = C(0)\varepsilon_{ijk}, \quad (4.55)$$

$$-\frac{\partial^2 B_{ij}(0)}{\partial r_k \partial r_l} = \frac{D^S}{d(d+2)} [(d+1)\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}] + \frac{D^P}{d(d+2)} [\delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}], \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_j} = -2\alpha (\varepsilon_{kpj}\delta_{nm} + \varepsilon_{kpm}\delta_{nj} + \varepsilon_{kpn}\delta_{mj}), \quad (4.57)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial \mathbf{r}^2 \partial r_j} = -2\alpha(d+2)\varepsilon_{kpj},$$

где параметры

$$D^S = \int d\mathbf{k} k^2 E^S(k) = \frac{1}{d-1} \int_0^\infty d\tau \langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t + \tau) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (4.58)$$

$$D^P = \int d\mathbf{k} k^2 E^P(k) = \int_0^\infty d\tau \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle,$$

$$C(r) = C(0) - \alpha r^2,$$

а $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)$ – вихрь поля скорости.

4.2.6. Логарифмически нормальный случайный процесс

Отметим, что для, так называемого *логарифмически нормального (логнормального)* случайного процесса $y(t) = e^{z(t)}$, логарифм которого $\ln y(t) = z(t)$ является гауссовым случайным процессом с параметрами $\langle z(t) \rangle$ и $\sigma_z^2(t)$, одновременная плотность вероятностей $P(y, t)$ имеет вид

$$P(y, t) = \frac{1}{y} P(z = \ln y, t) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [e^{-\langle z(t) \rangle} y]}{2\sigma^2(t)} \right\},$$

и, следовательно, интегральная функция распределений вероятностей имеет вид

$$F(y, t) = \int_{-\infty}^y dy' P(y', t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_{-\infty}^y \frac{dy'}{y'} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [e^{-\langle z(t) \rangle} y']}{2\sigma^2(t)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_{-\infty}^{\ln [e^{-\langle z(t) \rangle} y]} dz \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma^2(t)} \right\} = \Pr \left(\frac{\ln [e^{-\langle z(t) \rangle} y]}{\sigma(t)} \right),$$

где интеграл вероятностей $\Pr(z)$ определяется равенством (4.18) на с. 94.

При условии, что $e^{-\langle z(t) \rangle} y^*(t) = 1$, в силу равенства (4.19) на с. 94, интегральная функция распределений вероятностей обращается в $1/2$, т. е. кривая типичной реализации для логнормального случайного процесса $y(t)$ определяется равенством

$$y^*(t) = e^{\langle z(t) \rangle} = e^{\langle \ln y(t) \rangle}. \quad (4.59)$$

Отметим, что если мы знаем поведение моментных функций случайного процесса $y(t)$ во времени, т. е. функции $\langle y^n(t) \rangle$ ($n = 1, 2, \dots$), то тем самым мы знаем и статистические характеристики случайного процесса $z(t) = \ln y(t)$. В самом деле

$$\langle y^n(t) \rangle = \langle e^{n \ln y(t)} \rangle = \exp \left\{ n \langle \ln y(t) \rangle + \frac{n^2}{2} \sigma_{\ln y}^2(t) \right\}$$

и, следовательно,

$$\langle \ln y(t) \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \langle y^n(t) \rangle, \quad \sigma_{\ln y}^2(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} \ln \langle y^n(t) \rangle. \quad (4.60)$$

В дальнейшем при анализе статистической топографии случайных процессов и полей, наряду с интегральной функцией распределения вероятностей, нам понадобятся функции вида

$$V(y, t) = \int_y^\infty dy' P(y', t) \quad \text{и} \quad Y(y, t) = \int_y^\infty y' dy' P(y', t),$$

тесно связанные с интегралом вероятностей $\Pr(z)$.

Для функции $V(y, t)$ имеем выражение

$$V(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_y^\infty \frac{dy'}{y'} \exp \left\{ -\frac{(\ln y' - \langle z(t) \rangle)^2}{2\sigma^2(t)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln y - \langle z(t) \rangle}{\sigma(t)}}^\infty dz \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\} = \Pr \left(-\frac{\ln y - \langle z(t) \rangle}{\sigma(t)} \right) = \Pr \left\{ \frac{1}{\sigma(t)} \ln \left(\frac{1}{y} e^{\langle z(t) \rangle} \right) \right\}. \quad (4.61)$$

Для функции же $Y(y, t)$ получаем выражение

$$\begin{aligned} Y(y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_y^\infty dy' \exp \left\{ -\frac{(\ln y' - \langle z(t) \rangle)^2}{2\sigma^2(t)} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\langle z(t) \rangle + \sigma^2(t)/2} \int_{\frac{\ln y - \langle z(t) \rangle - \sigma^2(t)}{\sigma(t)}}^\infty dz \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\} = \\ &= e^{\langle z(t) \rangle + \sigma^2(t)/2} \Pr \left(-\frac{\ln y - \langle z(t) \rangle - \sigma^2(t)}{\sigma(t)} \right) = \\ &= e^{\langle z(t) \rangle + \sigma^2(t)/2} \Pr \left\{ \frac{1}{\sigma(t)} \ln \left(\frac{1}{y} e^{\langle z(t) \rangle + \sigma^2(t)} \right) \right\}. \quad (4.62) \end{aligned}$$

Отметим, что в случае когда случайный процесс $\tilde{y}(t) = y_0 y(t)$ т. е.

$$\tilde{y}(t) = y_0 e^{z(t)},$$

то, очевидно, что вместо формул (4.61), (4.62) мы получим выражения

$$\begin{aligned} \tilde{V}(y, t) &= \Pr \left\{ \frac{1}{\sigma(t)} \ln \left(\frac{y_0}{y} e^{\langle z(t) \rangle} \right) \right\}, \\ \tilde{Y}(y, t) &= y_0 e^{\langle z(t) \rangle + \sigma^2(t)/2} \Pr \left\{ \frac{1}{\sigma(t)} \ln \left(\frac{y_0}{y} e^{\langle z(t) \rangle + \sigma^2(t)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

4.2.7. Разрывные случайные процессы

Перейдем теперь к примерам разрывных процессов. Разрывные процессы — это такие случайные функции, у которых изменение поведения во времени происходит в дискретные моменты времени t_1, t_2, \dots , заданные статистическим образом. Прежде всего для описания разрывных процессов требуется знание статистики этих моментов времени или знание статистики числа $n(0, t)$ попадания точек t_i на интервал времени $(0, t)$. При этом имеет место равенство

$$n(0, t) = n(0, t') + n(t', t), \quad 0 \leq t' \leq t.$$

Сама величина $n(0, t)$ является случайным процессом, возможная реализация которого изображена на рис. 4.3.

Совокупность точек разрыва t_1, t_2, \dots процесса $z(t)$ называется *потоком точек*. Ниже мы будем рассматривать *пуассоновский стационарный поток точек*, у которого вероятность выпадения n точек на интервале (t_1, t_2) определяется *формулой Пуассона*

$$P_{n(t_1, t_2)=n} = \frac{[\overline{n(t_1, t_2)}]^n}{n!} e^{-\overline{n(t_1, t_2)}} \quad (4.64)$$

со средним значением числа точек на (t_1, t_2)

$$\overline{n(t_1, t_2)} = \nu |t_1 - t_2|,$$

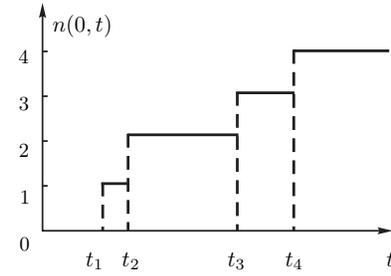


Рис. 4.3. Одна из возможных реализаций процесса $n(0, t)$

где ν — среднее число точек, приходящихся на единицу времени. При этом число точек, выпадающих на неперекрывающихся интервалах, статистически независимы, а моменты времени выпадения точек на интервале (t_1, t_2) при условии, что их выпало n штук, также статистически независимы и равномерно распределены на интервале (t_1, t_2) . Длина интервала между соседними скачками имеет экспоненциальное распределение.

Пуассоновский поток точек — марковский процесс.

Рассмотрим теперь случайные процессы, точки разрыва которых являются пуассоновскими потоками точек. В физических модельных задачах в настоящее время в основном используются процессы трех типов: *пуассоновский процесс*, *телеграфный процесс* и *обобщенный телеграфный процесс*. Этим процессам мы и уделим основное внимание.

Пуассоновский (импульсный) случайный процесс

Пуассоновским (импульсным) случайным процессом $z(t)$ называется процесс, описываемый формулой

$$z(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i g(t - t_i), \quad (4.65)$$

где случайные величины ξ_i статистически независимы с плотностью вероятностей $p(\xi)$, а случайные точки t_k равномерно распределены на интервале $(0, T)$, так что число их n распределено по закону Пуассона с параметром $\bar{n} = \nu T$. Функция $g(t)$, описывающая форму импульса, — детерминированная функция ($g(t) = 0$ при $t < 0$).

Для пуассоновского случайного процесса $z(t)$ характеристический функционал имеет вид

$$\Phi[t; v(\tau)] = \exp \left\{ \nu \int_0^t dt' \left[W \left(\int_{t'}^t d\tau v(\tau) g(t - t') \right) - 1 \right] \right\}, \quad (4.66)$$

где

$$W(v) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) e^{i\xi v}$$

— характеристическая функция случайной величины ξ . Следовательно, функционал

$$\Theta[t; v(\tau)] = \nu \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) \left\{ \exp \left[i\xi \int_{t'}^t d\tau v(\tau) g(t-t') \right] - 1 \right\} \quad (4.67)$$

и кумулянтные функции имеют вид

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \nu \langle \xi^n \rangle \int_0^{\min\{t_1, \dots, t_n\}} dt' g(t-t') \dots g(t_n-t').$$

Рассмотрим два важных для приложений случая пуассоновского процесса.

1. Пусть $g(t) = \theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ т. е. $z(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i \theta(t-t_i)$. В этом случае

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \nu \langle \xi^n \rangle \min\{t_1, \dots, t_n\}.$$

Если при этом $\xi = 1$, то процесс $z(t) \equiv n(0, t)$ и для него

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \nu \min\{t_1, \dots, t_n\},$$

$$\Theta[t; v(\tau)] = \nu \int_0^t dt' \left\{ \exp \left[i \int_{t'}^t d\tau v(\tau) \right] - 1 \right\}. \quad (4.68)$$

2. Пусть теперь $g(t) = \delta(t)$. В этом случае процесс

$$z_\delta(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i \delta(t-t_i)$$

называется обычно *процессом дробового шума*. Этот процесс является частным случаем *дельта-коррелированных процессов*. Для такого процесса

$$\Theta[t; v(\tau)] = \nu \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi P(\xi) \left\{ e^{i\xi v(\tau)} - 1 \right\} \quad (4.69)$$

и кумулянтные функции имеют вид

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \nu \langle \xi^n \rangle \delta(t_1 - t_2) \delta(t_2 - t_3) \dots \delta(t_{n-1} - t_n).$$

Отметим, что в общем случае пуассоновский процесс $z(t)$ с произвольной импульсной функцией $g(t)$ связан с пуассоновским дельта-коррелированным случайным процессом $z_\delta(t)$ посредством формулы

$$z(t) = \int_0^t d\tau g(t-\tau) z_\delta(\tau). \quad (4.70)$$

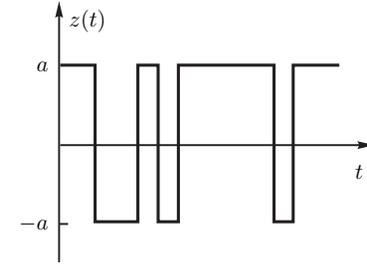


Рис. 4.4. Одна из возможных реализаций телеграфного случайного процесса

Телеграфный процесс

Рассмотрим теперь статистические характеристики телеграфного случайного процесса, определяемого формулой (рис. 4.4)

$$z(t) = a(-1)^{n(0,t)} \quad (z(0) = a, \quad z^2(t) \equiv a^2), \quad (4.71)$$

где $n(t_1, t_2)$ — случайная последовательность целых чисел, описывающая количество скачков на интервале (t_1, t_2) .

Рассмотрим два случая.

1. Будем считать вначале, что a — детерминированная величина.

Для первых двух моментных функций процесса $z(t)$ имеем выражения

$$\langle z(t) \rangle = a \sum_{n(0,t)=0}^{\infty} (-1)^{n(0,t)} P_{n(0,t)} = a e^{-2n(0,t)} = a e^{-2\nu t}, \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} \langle z(t_1) z(t_2) \rangle &= a^2 \langle (-1)^{n(0,t_1)+n(0,t_2)} \rangle = \\ &= a^2 \langle (-1)^{n(t_2, t_1)} \rangle = a^2 e^{-2n(t_2, t_1)} = a^2 e^{-2\nu(t_1 - t_2)} \quad (t_1 \geq t_2), \end{aligned}$$

и рекуррентное соотношение для моментных функций более высокого порядка при $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$:

$$\begin{aligned} M_n(t_1, \dots, t_n) &= \langle z(t_1) \dots z(t_n) \rangle = a^2 \langle (-1)^{n(0,t_1)+n(0,t_2)+n(0,t_3)+\dots+n(0,t_n)} \rangle = \\ &= a^2 \langle (-1)^{n(t_2, t_1)} \rangle \langle (-1)^{n(0,t_3)+\dots+n(0,t_n)} \rangle = \langle z(t_1) z(t_2) \rangle M_{n-2}(t_3, \dots, t_n). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Рекуррентное равенство (4.73) очень похоже на соотношение (4.41) для гауссова процесса с экспоненциальной корреляционной функцией. Отличие состоит в том, что правая часть (4.73) соответствует только одному из слагаемых в (4.41), отвечающему определенному упорядочиванию во времени.

Рассмотрим теперь характеристический функционал для этого процесса:

$$\Phi_a[t; v(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle,$$

где индексом a отмечен тот факт, что a — детерминированная величина. Используя разложение характеристического функционала в функциональный ряд Тейлора и рекуррентное равенство (4.73), получаем интегральное уравнение

$$\Phi_a[t; v(\tau)] = 1 + ia \int_0^t dt_1 e^{-2\nu t_1} v(t_1) - a^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{-2\nu(t_1-t_2)} v(t_1)v(t_2) \Phi_a[t_2; v(\tau)]. \quad (4.74)$$

Дифференцируя (4.74) по t , получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} \Phi_a[t; v(\tau)] = ia e^{-2\nu t} v(t) - a^2 v(t) \int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t-t_1)} v(t_1) \Phi_a[t_1; v(\tau)]. \quad (4.75)$$

Уравнение (4.75) в общем случае решить не удастся, и оно эквивалентно дифференциальному уравнению второго порядка

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \left[2\nu + \frac{d \ln v(t)}{dt} \right] \frac{d}{dt} + a^2 v(t) \right\} \Phi_a[t; v(\tau)] = 0, \\ \Phi_a[0; v(\tau)] = 1, \quad \left. \frac{d}{dt} \Phi_a[t; v(\tau)] \right|_{t=0} = ia v(0).$$

2. Пусть теперь величина a будет случайной величиной с плотностью вероятностей $P(a)$. Для получения характеристического функционала процесса $z(t)$ в этом случае требуется усреднить уравнение (4.75) по случайной величине a . Это в общем случае также не удастся осуществить. И только для случайной величины a с плотностью вероятностей

$$P(a) = \frac{1}{2} [\delta(a - a_0) + \delta(a + a_0)], \quad (4.76)$$

для которой $\langle a \rangle = 0$, $a^2 = a_0^2$ (собственно, именно этот случай и называется обычно телеграфным процессом), можно усреднить уравнение (4.75). В результате получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = -a_0^2 v(t) \int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t-t_1)} v(t_1) \Phi[t_1; v(\tau)], \quad (4.77)$$

или уравнение второго порядка

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \left[2\nu + \frac{d \ln v(t)}{dt} \right] \frac{d}{dt} + a_0^2 v(t) \right\} \Phi[t; v(\tau)] = 0, \quad (4.78) \\ \left. \frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] \right|_{t=0} = 0, \quad \Phi[0; v(\tau)] = 1,$$

Остановимся теперь на одной важной предельной теореме, связанной с телеграфными случайными процессами.

Рассмотрим случайный процесс

$$\xi_N(t) = z_1(t) + \dots + z_N(t),$$

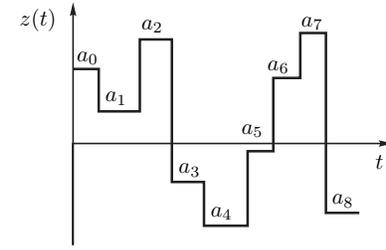


Рис. 4.5. Одна из возможных реализаций обобщенного телеграфного случайного процесса

где все $z_k(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы со средним значением, равным нулю, и корреляционной функцией равной

$$\langle z(t)z(t+\tau) \rangle = \frac{\sigma^2}{N} e^{-\alpha|\tau|}.$$

Тогда предельный процесс $\xi(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N(t)$ — гауссов случайный процесс с экспоненциальной корреляционной функцией

$$\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

т. е. гауссов марковский процесс.

Таким образом, процесс $\xi_N(t)$ для конечного числа N является аппроксимирующим процессом с конечным числом состояний для гауссова марковского процесса. Такая аппроксимация может быть полезной не только для изучения самого гауссова процесса, но и различных функций от него. Так, например, для процесса

$$z(t) = x^2(t) - \langle x^2(t) \rangle,$$

где $x(t)$ — гауссов марковский процесс с экспоненциальной корреляционной функцией, аппроксимация конечным отрезком ряда принимает вид

$$z_N(t) = \sum_{i \neq j=1}^N z_i(t)z_j(t), \quad z(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} z_N(t).$$

С такой формой записи гораздо удобнее работать при анализе стохастических уравнений, чем непосредственно с самими процессами $x(t)$ и $z(t)$.

Обобщенный телеграфный процесс

Рассмотрим теперь обобщенный телеграфный процесс, описываемый формулой

$$z(t) = a_{n(a,t)}. \quad (4.79)$$

Здесь $n(0, t)$ — случайная последовательность целых чисел, описанная выше, а величины a_k считаются статистически независимыми с распределением вероятностей $P(a)$. На рис. 4.5 представлена одна из возможных реализаций этого процесса.

Для процесса $z(t)$ имеем

$$\langle z(t) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle a_k \delta_{k,n(0,t)} \rangle = \langle a \rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle z(t_1)z(t_2) \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \langle a_k a_l \rangle \langle \delta_{k,n(0,t_1)} \delta_{l,n(0,t_2)} \rangle = \\ &= \langle a^2 \rangle \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta_{k,n(0,t_1)} \rangle \langle \delta_{0,n(t_2,t_1)} \rangle + 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta_{k,n(0,t_2)} \rangle \langle \delta_{0,n(t_2,t_1)} \rangle \right\} = \\ &= \langle a^2 \rangle e^{-\nu(t_1-t_2)} + \langle a^2 \rangle (1 - e^{-\nu(t_1-t_2)}) \quad (t_1 \geq t_2), \end{aligned}$$

и т. д. При этом вероятность отсутствия скачков на интервале (t_2, t_1)

$$P_{n(t_2,t_1)=0} = \langle \delta_{0,n(t_2,t_1)} \rangle = e^{-\nu|t_1-t_2|}.$$

Выше мы отмечали, что пуассоновский поток точек и процессы, построенные на таких точках, — марковские процессы. Остановимся теперь на этом важном классе случайных процессов более подробно.

4.3. Марковские процессы

4.3.1. Общие свойства

В предыдущем разделе мы рассмотрели характеристический функционал процесса $z(t)$, который описывает все его статистические характеристики. Если теперь в нем положить

$$v(t) = \sum_{k=1}^n v_k \delta(t - t_k),$$

то характеристический функционал переходит в совместную характеристическую функцию случайных величин $z_k = z(t_k)$:

$$\Phi_n(v_1, \dots, v_n) = \left\langle \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n v_k z(t_k) \right\} \right\rangle,$$

преобразование Фурье которой определяет совместную плотность вероятностей для значений процесса $z(t)$ в дискретные моменты времени:

$$P_n(z_1, t_1; \dots; z_n, t_n) = \langle \delta(z(t_1) - z_1) \dots \delta(z(t_n) - z_n) \rangle. \quad (4.80)$$

Пусть выбранные моменты времени упорядочены следующим образом:

$$t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n.$$

Тогда, по определению условной вероятности

$$P_n(z_1, t_1; \dots; z_n, t_n) = p_n(z_1, t_1 | z_2, t_2; \dots; z_n, t_n) P_{n-1}(z_2, t_2; \dots; z_n, t_n), \quad (4.81)$$

где p_n — условная плотность вероятностей для значения процесса $z(t)$ в момент времени t_1 при условии, что в моменты времени t_k ($k = 2, \dots, n$) функция $z(t)$ принимала значения, равные $z(t_k) = z_k$. Если процесс $z(t)$ таков, что для всех $t_1 > t_2$ условная плотность вероятностей однозначно определяется значением z_2 , принятым в момент времени t_2 , и совсем не зависит от предшествующей истории, т. е.

$$p_n(z_1, t_1 | z_2, t_2; \dots; z_n, t_n) = p(z_1, t_1 | z_2, t_2), \quad (4.82)$$

то этот процесс называется *марковским процессом* или процессом без последствия. Функция

$$p(z, t | z_0, t_0) = \langle \delta(z(t) - z) | z(t_0) = z_0 \rangle \quad (t > t_0) \quad (4.83)$$

при этом называется *плотностью вероятностей перехода*. Полагая в (4.83) $t = t_0$, получаем равенство

$$p(z, t_0 | z_0, t_0) = \delta(z - z_0).$$

Подставим выражение (4.81) в формулу (4.80). Получается рекуррентное равенство для n -точечной по времени плотности вероятностей процесса $z(t)$. Итерировав это равенство, находим связь P_n с одноточечным распределением вероятностей ($t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$):

$$P_n(z_1, t_1; \dots; z_n, t_n) = p(z_1, t_1 | z_2, t_2) \dots p(z_{n-1}, t_{n-1} | z_n, t_n) P(z_n, t_n). \quad (4.84)$$

Таким образом, все статистические характеристики марковского процесса $z(t)$ описываются всего двумя функциями — плотностью вероятностей перехода $p(z, t | z_0, t_0)$ и одноточечной плотностью вероятностей $P(z, t)$. Очевидно, что все остается без изменения и в случае многомерных процессов, т. е. если $\mathbf{z}(t)$ является случайной векторной функцией.

Выше мы говорили о том, что все статистические характеристики марковского процесса $z(t)$ описываются только двумя функциями — плотностью вероятностей перехода $p(z, t | z_0, t_0)$ и одноточечной плотностью вероятностей $P(z, t)$. Однако, для статистического анализа стохастических уравнений требуется всетаки знание характеристического функционала случайного процесса $z(t)$.

4.3.2. Характеристический функционал марковского процесса

В общем случае марковского процесс $z(t)$ не удастся получить замкнутое уравнение для его характеристического функционала $\Phi[t; v(\tau)] = \langle \varphi[t; v(\tau)] \rangle$, где

$$\varphi[t; v(\tau)] = \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\}.$$

Можно лишь получить замкнутое уравнение для функционала

$$\Psi[z, t; v(\tau)] = \langle \delta(z(t) - z) \varphi[t; v(\tau)] \rangle, \quad (4.85)$$

описывающего статистические корреляции процесса $z(t)$ с его предысторией. Характеристический функционал $\Phi[t; v(\tau)]$ связан с функционалом $\Psi[z, t; v(\tau)]$ по формуле

$$\Phi[t; v(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} dz \Psi[z, t; v(\tau)]. \quad (4.86)$$

Чтобы вывести уравнение для $\Psi[z, t; v(\tau)]$, заметим, что имеет место равенство

$$\varphi[t; v(\tau)] = 1 + i \int_0^t dt_1 z(t_1) v(t_1) \varphi[t_1; v(\tau)]. \quad (4.87)$$

Подставляя (4.87) в (4.85), получаем выражение

$$\Psi[z, t; v(\tau)] = P(z, t) + i \int_0^t dt_1 v(t_1) \langle \delta(z(t) - z) z(t_1) \varphi[t_1; v(\tau)] \rangle, \quad (4.88)$$

где $P(z, t) = \langle \delta(z(t) - z) \rangle$ — одновременная плотность вероятностей случайной величины $z(t)$.

Перепишем (4.88) в виде

$$\Psi[t, z; v(\tau)] = P(z, t) + i \int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 z_1 \langle \delta(z(t) - z) \delta(z(t_1) - z_1) \varphi[t_1; v(\tau)] \rangle. \quad (4.89)$$

В уравнении (4.89) можно выполнить усреднение, учитывая марковость процесса $z(t)$, и мы получаем замкнутое интегральное уравнение

$$\Psi[t, z; v(\tau)] = P(z, t) + i \int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 z_1 p(z, t | z_1, t_1) \Psi[t_1, z_1; v(\tau)], \quad (4.90)$$

где $p(z, t | z_0, t_0)$ — плотность вероятностей перехода.

Интегрируя (4.90) по z , получаем дополнительную связь характеристического функционала $\Phi[t; v(\tau)]$ с функционалом $\Psi[z, t; v(\tau)]$, которую можно записать в виде

$$\frac{1}{iv(t)} \frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 z_1 \Psi[t, z_1; v(\tau)] = \Psi[t; v(\tau)]. \quad (4.91)$$

Умножая (4.90) на z и интегрируя по z , получаем связь функционала $\Psi[t; v(\tau)]$ с функционалом $\Psi[t, z; v(\tau)]$:

$$\Psi[t; v(\tau)] = \langle z(t) \rangle + i \int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \langle z(t) | z_1, t_1 \rangle \Psi[t_1, z_1; v(\tau)]. \quad (4.92)$$

В общем случае уравнение (4.90) представляет собой сложное интегральное уравнение, вид которого определяется функциями $P(z, t)$ и $p(z, t | z_0, t_0)$, т. е. характеристиками марковского процесса.

В ряде случаев ситуация упрощается. Так, например, для телеграфного процесса из (4.72) следует, что

$$\langle z(t) | z_1, t_1 \rangle = z_1 e^{-2\nu(t-t_1)}, \quad \langle z(t) \rangle = 0,$$

и мы получаем уравнение (4.77).

Задачи

Задача 4.1. Получить характеристический функционал для пуассоновского случайного процесса (4.66).

Задача 4.2. Показать, что случайный процесс

$$\xi_N(t) = z_1(t) + \dots + z_N(t),$$

где все $z_k(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$\langle z(t) z(t + \tau) \rangle = \frac{\sigma^2}{N} e^{-\alpha|\tau|}$$

при $N \rightarrow \infty$ переходит в гауссов марковский случайный процесс

$$\xi(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N(t)$$

с экспоненциальной корреляционной функцией

$$\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

Указание. Рассмотреть дифференциальное уравнение для характеристического функционала процесса $\xi_N(t)$

$$\Phi_N[t; v(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \xi_N(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle.$$

О черк 5

РАСПЩЕПЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИЙ

5.1. Общие соотношения

Ограничимся для простоты одномерными случайными процессами (обобщения на многомерные случаи не вызывают затруднений). При статистическом анализе динамических систем необходимо уметь вычислять корреляцию $\langle z(t)R[z(\tau)] \rangle$, где $R[z(\tau)]$ — функционал, который может зависеть от процесса $z(t)$ как явным, так и неявным образом.

Для вычисления этого среднего значения рассмотрим вспомогательный функционал $R[z(\tau) + \eta(\tau)]$, где $\eta(t)$ — произвольная детерминированная функция, и вычислим величину

$$\langle z(t)R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle. \quad (5.1)$$

Функционал $R[z(\tau) + \eta(\tau)]$ можно разложить в функциональный ряд Тейлора по $z(\tau)$ и представить его в виде

$$R[z(\tau) + \eta(\tau)] = e^{-\int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau)}} R[\eta(\tau)],$$

вводя оператор функционального сдвига. Тогда для корреляции (5.1) получаем выражение

$$\langle z(t)R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \Omega \left[t; \frac{\delta}{i\delta \eta(\tau)} \right] \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle, \quad (5.2)$$

где функционал $\Omega[t; v(\tau)]$ определяется в виде

$$\Omega[t; v(\tau)] = \frac{\left\langle z(t) \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle}{\left\langle \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle} = \frac{1}{\Phi[v(\tau)]} \frac{\delta}{i\delta v(t)} \Phi[v(\tau)] = \frac{\delta}{i\delta v(t)} \Theta[v(\tau)]. \quad (5.3)$$

где $\Theta[v(\tau)] = \ln \Phi[v(\tau)]$, а $\Phi[v(\tau)]$ — характеристический функционал случайного процесса $z(t)$.

Учитывая, что вариационное дифференцирование по $\eta(\tau)$ можно заменить дифференцированием по $z(\tau)$ и положить затем $\eta(\tau) = 0$, получаем для интересующей нас корреляции окончательное выражение

$$\langle z(t)R[z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[t; \frac{\delta}{i\delta z(\tau)} \right] R[z(\tau)] \right\rangle. \quad (5.4)$$

Если воспользоваться разложением функционала $\Theta[v(\tau)]$ в функциональный ряд Тейлора (4.31) на с. 98, то функционал

$$\Omega[t; v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_{n+1}(t, t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n),$$

и, следовательно, выражение (5.4) принимает вид

$$\langle z(t)R[z(\tau)] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_{n+1}(t, t_1, \dots, t_n) \left\langle \frac{\delta^n R[z(\tau)]}{\delta z(t_1) \dots \delta z(t_n)} \right\rangle. \quad (5.5)$$

В физических задачах, удовлетворяющих условию динамической причинности по времени t , статистические характеристики решения в момент времени t определяются статистическими характеристиками случайного процесса $z(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq t$, которые полностью описываются характеристическим функционалом

$$\Phi[t; v(\tau)] = \exp \{ \Theta[t; v(\tau)] \} = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle.$$

В этом случае полученные формулы остаются в силе для вычисления статистических средних $\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle$ при $t' < t$, $\tau \leq t$, т. е. имеет место равенство

$$\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[t', t; \frac{\delta}{i\delta z(\tau)} \right] R[t; z(\tau)] \right\rangle \quad (0 < t' < t), \quad (5.6)$$

где

$$\Omega[t', t; v(\tau)] = \frac{\delta}{i\delta v(t')} \Theta[t; v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_n K_{n+1}(t', t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n). \quad (5.7)$$

В случае когда $t' = t - 0$, формула в (5.6) по-прежнему имеет место, т. е.

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[t, t; \frac{\delta}{i\delta z(\tau)} \right] R[t; z(\tau)] \right\rangle. \quad (5.8)$$

Однако, разложение (5.7) не всегда дает правильный предельный переход при $t' \rightarrow t - 0$ (т. е. операции предельного перехода и разложения в функциональный ряд Тейлора могут быть и не перестановочны). В этом случае

$$\Omega[t, t; v(\tau)] = \frac{1}{\Phi[t; v(\tau)]} \frac{d}{i\delta v(t)} \Phi[t; v(\tau)] = \frac{d}{i\delta v(t)} \Theta[t; v(\tau)] \quad (5.9)$$

и статистические средние в (5.6) и (5.8) могут быть разрывны при $t' = t - 0$.

Рассмотрим несколько примеров случайных процессов.

5.2. Гауссов процесс

Для гауссова случайного процесса $z(t)$ все формулы, полученные выше существенно упрощаются. В этом случае логарифм характеристического функционала $\Phi[v(\tau)]$ имеет вид (среднее значение процесса $z(t)$ считаем равным нулю) (4.40) на с. 104

$$\Theta[t, v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2),$$

и, следовательно, функционал $\Omega[t; v(\tau)]$ (5.3) принимает вид линейного функционала

$$\Omega[t; v(\tau)] = i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(t, \tau_1) v(\tau_1), \quad (5.10)$$

а формула (5.2) принимает вид

$$\langle z(t) R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(t, \tau_1) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau_1)} \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle. \quad (5.11)$$

Заменяя теперь дифференцирование по $\eta(\tau)$ на дифференцирование по $z(\tau)$ и полагая $\eta(\tau) = 0$, получаем равенство

$$\langle z(t) R[z(\tau)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(t, \tau_1) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(\tau_1)} R[z(\tau)] \right\rangle, \quad (5.12)$$

которое в физической литературе принято называть *формулой Фурутцу-Новикова* по имени авторов, впервые ее получивших [1, 46].

Легко написать и многомерное обобщение формулы (5.12), которое можно записать в виде

$$\langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}) R[\mathbf{z}] \rangle = \int d\mathbf{r}' \langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}) z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}') \rangle \left\langle \frac{\delta R[\mathbf{z}]}{\delta z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}')} \right\rangle, \quad (5.13)$$

где через \mathbf{r} обозначены все непрерывные аргументы случайного поля векторного поля $\mathbf{z}(\mathbf{r})$, а через i_1, \dots, i_n — индексные аргументы. По повторяющимся индексным аргументам в правой части (5.13) предполагается суммирование.

Формулы (5.12) и (5.13) представляют обобщение формул (4.15), (4.22) на с. 95 на случайные гауссовы процессы.

Если случайный процесс $z(\tau)$ определен только на отрезке времени $[0, t]$, то функционал $\Theta[t, v(\tau)]$ будет определяться выражением

$$\Theta[t, v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2), \quad (5.14)$$

а функционалы $\Omega[t', t; v(\tau)]$, $\Omega[t, t; v(\tau)]$ будут линейными функционалами:

$$\begin{aligned} \Omega[t', t; v(\tau)] &= \frac{\delta}{i\delta v(t')} \Theta[t, v(\tau)] = i \int_0^t d\tau B(t', \tau) v(\tau), \\ \Omega[t, t; v(\tau)] &= \frac{d}{iv(t)dt} \Theta[t, v(\tau)] = i \int_0^t d\tau B(t, \tau) v(\tau), \end{aligned} \quad (5.15)$$

и, следовательно, формулы (5.6), (5.8) будут иметь вид

$$\langle z(t') R[t, z(\tau)] \rangle = \int_0^t d\tau B(t', \tau) \left\langle \frac{\delta R[z(\tau)]}{\delta z(\tau)} \right\rangle \quad (t' \leq t), \quad (5.16)$$

совпадающий с равенством (5.12) при выполнении условия

$$\frac{\delta R[t; z(\tau)]}{\delta z(\tau)} = 0 \quad \text{при } \tau < 0, \quad \tau > t. \quad (5.17)$$

5.3. Пуассоновский процесс

Пуассоновский процесс определен выражением (4.65) на с. 111 и логарифм характеристического функционала его описывается формулой (4.67). Формулы (5.7), (5.9) для функционалов $\Omega[t', t; v(\tau)]$, $\Omega[t, t; v(\tau)]$ теперь принимают вид

$$\begin{aligned} \Omega[t', t; v(\tau)] &= \frac{\delta}{i\delta v(t')} \Theta[t, v(\tau)] = -i \int_0^{t'} d\tau g(t' - \tau) \dot{W} \left(\int_{\tau}^t d\tau_1 v(\tau_1) g(\tau_1 - \tau) \right), \\ \Omega[t, t; v(\tau)] &= \frac{d}{iv(t)dt} \Theta[t, v(\tau)] = -i \int_0^t d\tau g(t - \tau) \dot{W} \left(\int_{\tau}^t d\tau_1 v(\tau_1) g(\tau_1 - \tau) \right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

где $\dot{W}(v) = \frac{dW(v)}{dv} = i \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi P(\xi) e^{i\xi v}$.

Равенства (5.18) можно, сменив порядок интегрирования, переписать следующим образом:

$$\Omega[t', t; v(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi P(\xi) \int_0^{t'} d\tau g(t' - \tau) \exp \left\{ i\xi \int_{\tau}^t d\tau_1 v(\tau_1) g(\tau_1 - \tau) \right\} \quad (t' \leq t) \quad (5.19)$$

и для корреляции пуассоновского случайного процесса $z(t)$ с функционалами от него получаем выражение

$$\langle z(t') R[t; z(\tau)] \rangle = \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi P(\xi) \int_0^{t'} d\tau' g(t' - \tau') \langle R[t; z(\tau) + \xi g(\tau - \tau')] \rangle \quad (t' \leq t). \quad (5.20)$$

Частным случаем пуассоновского процесса, как говорилось ранее, является случайный процесс $n(0, t)$, описывающий число скачков на интервале времени $(0, t)$. Для этого процесса $P(\xi) = \delta(\xi - 1)$ и $g(t) = \theta(t)$ и, следовательно, формула (5.20) принимает особенно простой вид

$$\langle n(0, t)R[t; n(0, \tau)] \rangle = \nu \int_0^{t'} d\tau \langle R[t; n(0, \tau) + \theta(t' - \tau)] \rangle \quad (t' \leq t). \quad (5.21)$$

Равенство (5.21) является обобщением на пуассоновские процессы последней формулы в (4.23) на с. 95 для пуассоновских случайных величин.

5.4. Телеграфный случайный процесс

Обратимся теперь к случаю телеграфного процесса, определяемого формулой (4.71) на с. 113

$$z(t) = a(-1)^{n(0, t)}, \quad (5.22)$$

где a — детерминированная величина.

Для вычисления же корреляции $\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle$, где $\tau \leq t$, как указывалось выше, надо знать характеристический функционал процесса $z(t)$, который, в данном случае неизвестен. Мы имеем только уравнения (4.75) и (4.77) на с. 114, которые описывают связь между функционалом

$$\Psi[t; v(\tau)] = \frac{1}{iv(t)} \frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = \left\langle z(t) \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle$$

и самим характеристическим функционалом $\Phi[t; v(\tau)]$ в виде

$$\begin{aligned} \left\langle z(t) \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle &= \\ &= ae^{-2\nu t} + ia^2 \int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t-t_1)} v(t_1) \left\langle \exp \left\{ i \int_0^{t_1} d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle. \end{aligned}$$

Этой связи достаточно для расщепления корреляции $\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle$, т. е. представления ее непосредственно через среднее значение $\langle R[t; z(\tau)] \rangle$.

В самом деле, для любого функционала $R[t; z(\tau)]$, где $\tau \leq t$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \langle z(t)R[t; z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle &= \left\langle z(t) \exp \left\{ \int_0^t d\tau z(\tau) \frac{\delta}{\delta\eta(\tau)} \right\} \right\rangle R[t; \eta(\tau)] = \\ &= aR[t; \eta(\tau)]e^{-2\nu t} + a^2 \int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t-t_1)} \frac{\delta}{\delta\eta(t_1)} \langle R[t; z(\tau)\theta(t_1 - \tau) + \eta(\tau)] \rangle. \quad (5.23) \end{aligned}$$

Здесь $\eta(t)$ — произвольная детерминированная функция. Переходя к пределу $\eta \rightarrow 0$, получаем окончательный результат:

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = aR[t; 0]e^{-2\nu t} + a^2 \int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t-t_1)} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \tilde{R}[t, t_1; z(\tau)] \right\rangle, \quad (5.24)$$

где функционал $\tilde{R}[t, t_1; z(\tau)]$ определяется формулой

$$\tilde{R}[t, t_1; z(\tau)] = R[t; z(\tau)\theta(t_1 - \tau + 0)]. \quad (5.25)$$

Если случайная величина a имеет распределение вероятностей с плотностью (4.76) на с. 114, то дополнительное усреднение (5.24) по a приводит к равенству

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = a_0^2 \int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t-t_1)} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \tilde{R}[t, t_1; z(\tau)] \right\rangle, \quad (5.26)$$

Формула (5.26) по внешнему виду очень напоминает равенство для расщепления корреляции гауссова процесса $z(t)$, имеющего экспоненциальную корреляционную функцию (т. е. гауссова марковского процесса), с функционалом от него $R[t; z(\tau)]$. Отличие состоит в том, что в правой части (5.26) стоит не сам функционал $R[t; z(\tau)]$, а функционал, «обрезанный» по процессу $z(\tau)$.

Продифференцируем формулу (5.24) по времени t . Учитывая, что при этом не надо дифференцировать по верхнему пределу интеграла в правой части (5.24), получаем выражение [47, 48]

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle z(t) \frac{d}{dt} R[t; z(\tau)] \right\rangle, \quad (5.27)$$

которое называется *формулой дифференцирования*.

Следует обратить внимание на одно существенное обстоятельство. В формуле дифференцирования (5.27) функционал $R[t; z(\tau)]$ является произвольным функционалом и, в частности, может быть равен просто процессу $z(t - 0)$. Вообще говоря, реализация случайного телеграфного процесса является обобщенной функцией. Производная по времени от этого процесса также является обобщенной функцией (последовательно дельта-функций) и при этом, вообще говоря,

$$z(t) \frac{d}{dt} z(t) \neq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} z^2(t) \equiv 0.$$

Эти обобщенные функции, как и любые обобщенные функции, определяются только функционалами, построенными на них. Такими функционалами в интересующем нас случае являются усредненные величины, обозначенные $\langle \dots \rangle$, и формула дифференцирования (5.27) описывает дифференциальную связь между различными функционалами, связанными со случайным процессом $z(t)$ и его односторонними производными при $t \rightarrow t - 0$ dz/dt , d^2z/dt^2 и т. д. Так, например, из формулы (5.27) вытекают равенства

$$\left\langle z(t) \frac{d}{d\tau} z(\tau) \right\rangle \Big|_{\tau=t-0} = 2\nu \langle z^2 \rangle, \quad \left\langle z(t) \frac{d^2}{d\tau^2} z(\tau) \right\rangle \Big|_{\tau=t-0} = 4\nu^2 \langle z^2 \rangle$$

и т. д., которые, разумеется, можно получить и непосредственно, дифференцируя, например, корреляционную функцию $\langle z(t)z(t') \rangle$ по t' ($t' < t$) при $t' \rightarrow t - 0$.

Остановимся теперь на некоторых обобщениях формул, полученных выше на случай векторного марковского процесса $\mathbf{z}(t) = \{z_1(t), \dots, z_N(t)\}$. Так, например, для процессов $z_i(t)$ с корреляционной функцией

$$\langle z_i(t)z_j(t + \tau) \rangle = \langle z^2 \rangle \delta_{ij} e^{-\alpha|\tau|} \quad (5.28)$$

имеет место равенство

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha k \right) \langle z_1(t) \dots z_k(t) R[t; \mathbf{z}(\tau)] \rangle \right\rangle = \left\langle z_1(t) \dots z_k(t) \frac{\partial}{\partial t} R[t; \mathbf{z}(\tau)] \right\rangle. \quad (5.29)$$

Формула (5.29) определяет правило вынесения операции дифференцирования по времени из под знака среднего. Так, из (5.29) получаем соотношение

$$\left\langle z_1(t) \dots z_k(t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} R[t; \mathbf{z}(\tau)] \right\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha k \right)^n \langle z_1(t) \dots z_k(t) R[t; \mathbf{z}(\tau)] \rangle, \quad (5.30)$$

where $k = 1, \dots, N$.

5.5. Дельта-коррелированные случайные процессы

Особое место в физических задачах занимает случай, когда случайный процесс $z(t)$ можно рассматривать как дельта-коррелированный процесс. Важность этого случая обусловлена прежде всего тем, что во многих физических задачах такая аппроксимация флуктуаций параметров имеет ясную физическую природу и при этом для плотности вероятностей решений соответствующих динамических систем может быть получено замкнутое уравнение.

Для гауссова дельта-коррелированного во времени процесса корреляционная функция имеет вид

$$B(t_1, t_2) = \langle z(t_1)z(t_2) \rangle = B(t_1)\delta(t_1 - t_2), \quad (\langle z(t) \rangle = 0).$$

В этом случае функционалы $\Theta[t; v(\tau)]$, $\Omega[t', t; v(\tau)]$ и $\Omega[t, t; v(\tau)]$ (5.14), (5.15) на с. 123, введенные ранее, равны

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t d\tau B(\tau) v^2(\tau),$$

$$\Omega[t', t; v(\tau)] = iB(t')v(t'), \quad \Omega[t, t; v(\tau)] = \frac{i}{2}B(t)v(t),$$

а формула (5.16), существенно упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \langle z(t')R[t; v(\tau)] \rangle &= B(t') \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t')} R[t; v(\tau)] \right\rangle \quad (0 < t' < t), \\ \langle z(t)R[t; v(\tau)] \rangle &= \frac{1}{2}B(t) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t)} R[t; v(\tau)] \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Выражения (5.31) описывают скачок статистических средних при $t' = t$ для рассматриваемого гауссова дельта-коррелированного процесса. Существование этого скачка обусловлено сугубо дельта-коррелированностью процесса, — если процесс не дельта-коррелирован, то никакого скачка нет (см. формулу (5.16) на с. 123).

Дельта-коррелированный пуассоновский случайный процесс соответствует предельному переходу

$$g(t) \rightarrow \delta(t).$$

В этом случае логарифм характеристического функционала имеет простой вид (см. (4.69) на с. 112) и, следовательно, формула (5.19) на с. 123 для функционалов $\Omega[t', t; v(\tau)]$ и $\Omega[t, t; v(\tau)]$ принимают вид

$$\Omega[t', t; v(\tau)] = i \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi P(\xi) e^{i\xi v(t')} \quad (t' < t),$$

$$\Omega[t, t; v(\tau)] = \frac{\nu}{iv(t)} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi P(\xi) [e^{i\xi v(t)} - 1] = \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi P(\xi) \int_0^{\xi} d\eta e^{i\nu v(t)},$$

и для корреляции пуассоновского случайного процесса $z(t)$ с функционалами от него получаем выражение

$$\begin{aligned} \langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle &= \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi P(\xi) \langle R[t; z(\tau) + \xi \delta(\tau - \tau')] \rangle \quad (t' \leq t), \\ \langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle &= \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi P(\xi) \int_0^{\xi} d\eta \langle R[t; z(\tau) + \eta \delta(t - \tau)] \rangle. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Эти выражения также описывают скачок статистических средних при $t' = t$. Этот скачок, также как и для гауссова процесса, обусловлен дельта-коррелированностью пуассоновского процесса.

В общем случае дельта-коррелированного процесса $z(t)$ разложение логарифма характеристического функционала в функциональный ряд Тейлора имеет вид

$$\Theta[t; v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t d\tau K_n(\tau) v^n(\tau), \quad (5.33)$$

а все кумулянтные функции при этом определяются выражениями

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = K_n(t_1)\delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_{n-1} - t_n).$$

Характерной чертой этих процессов, как видно из (5.33), является справедливость равенства

$$\dot{\Theta}[t; v(\tau)] = \dot{\Theta}[t; v(t)] \quad \left(\dot{\Theta}[t; v(\tau)] = \frac{d}{dt} \Theta[t; v(\tau)] \right), \quad (5.34)$$

играющего принципиальную роль. Оно показывает, что величина $\Theta[t; v(\tau)]$ для дельта-коррелированного процесса является не функционалом, а просто функцией времени t . В этом случае функционалы $\Omega[t'; t; v(\tau)]$ и $\Omega[t; t; v(\tau)]$ равны

$$\Omega[t'; t; v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{n+1}(t') v^n(t') \quad (t' < t),$$

$$\Omega[t; t; v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(n+1)!} K_{n+1}(t) v^n(t),$$

а формулы для расщепления корреляций принимают вид

$$\langle z(t') R[t; z(\tau)] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{n+1}(t') \left\langle \frac{\delta^n R[t; z(\tau)]}{\delta z^n(t')} \right\rangle \quad (t' < t), \quad (5.35)$$

$$\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(n+1)!} K_{n+1}(t) \left\langle \frac{\delta^n R[t; z(\tau)]}{\delta z^n(t)} \right\rangle.$$

Эти формулы описывают скачок при $t' = t$ статистических средних в общем случае дельта-коррелированных процессов.

Отметим, что при $t' > t$ для дельта-коррелированных процессов имеет место очевидное равенство

$$\langle z(t') R[t; z(\tau)] \rangle = \langle z(t') \rangle \langle R[t; z(\tau)] \rangle. \quad (5.36)$$

Остановимся теперь на понятии дельта-коррелированных во времени случайных полях.

Пусть имеется векторное поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, где \mathbf{x} — пространственные координаты, а t — временная координата. В этом случае разложение логарифма характеристического функционала в ряд Тейлора определяют кумулянтные функции случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ (см. раздел 3.2). В частном случае, когда

$$K_n^{i_1, \dots, i_m}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = K_n^{i_1, \dots, i_m}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t_1) \delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_{n-1} - t_n) \quad (5.37)$$

будем называть поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ дельта-коррелированным случайным полем по времени t . Тогда функционал $\Theta[t; \psi(\mathbf{x}', \tau)]$ принимает вид

$$\begin{aligned} \Theta[t; \psi(\mathbf{x}', \tau)] &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t d\tau \int \dots \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n K_n^{i_1, \dots, i_m}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \tau) \psi_{i_1}(\mathbf{x}_1, \tau) \dots \psi_{i_m}(\mathbf{x}_n, \tau), \end{aligned} \quad (5.38)$$

важной особенностью которого является равенство, аналогичное (5.34):

$$\dot{\Theta}[t; \psi(\mathbf{x}', \tau)] = \dot{\Theta}[t; \psi(\mathbf{x}', t)]. \quad (5.39)$$

5.5.1. Асимптотический смысл дельта-коррелированных процессов

Дельта-коррелированных процессов и полей в природе не бывает. Все реальные процессы и поля имеют конечный временной радиус корреляции, и дельта-коррелированные процессы и поля — результат асимптотического разложения, связанного с их временными радиусами корреляции.

Поясним переход к дельта-коррелированному процессу на примере гауссова стационарного процесса с радиусом корреляции τ_0 . Логарифм характеристического функционала при этом описывается выражением

$$\Theta[t; v(\tau)] = - \int_0^t d\tau_1 v(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 B \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_0} \right) v(\tau_2). \quad (5.40)$$

Положим $\tau_1 - \tau_2 = \xi \tau_0$, тогда выражение (5.40) примет вид

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\tau_0 \int_0^t d\tau_1 v(\tau_1) \int_0^{\tau_1/\tau_0} d\xi B(\xi) v(\tau_1 - \xi \tau_0).$$

Пусть теперь $\tau_0 \rightarrow 0$. В этом случае главный член асимптотического разложения по τ_0 будет определяться формулой

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\tau_0 \int_0^{\infty} d\xi B(\xi) \int_0^t d\tau_1 v^2(\tau_1),$$

которую можно записать в виде

$$\Theta[t; v(\tau)] = -B^{\text{eff}} \int_0^t d\tau_1 v^2(\tau_1), \quad (5.41)$$

где

$$B^{\text{eff}} = \int_0^{\infty} d\tau B \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau B \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right). \quad (5.42)$$

Конечно, асимптотическое разложение (5.41) справедливо не для любых функций $v(t)$, а только для таких, которые мало меняются за времена порядка τ_0 . Так, если $v(t) = v \delta(t - t_0)$, то асимптотическое разложение (5.41) не справедливо, и в этом случае формула (5.40) заменяется выражением

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\frac{1}{2} B(0) v^2 \quad (t > t_0),$$

соответствующим характеристической функции процесса $z(t)$ для фиксированного момента времени $t = t_0$.

Рассмотрим теперь корреляцию $\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle$, которая в данном случае, согласно формуле Фурутцу–Новикова (5.16) на с. 123, описывается формулой

$$\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle = \int_0^t dt_1 B \left(\frac{t - t_1}{\tau_0} \right) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} R[t; z(\tau)] \right\rangle.$$

Выполняя замену переменных $t - t_1 \rightarrow \xi\tau_0$, получаем выражение

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = \tau_0 \int_0^{t/\tau_0} d\xi B(\xi) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t - \xi\tau_0)} R[t; z(\tau)] \right\rangle, \quad (5.43)$$

которое при $\tau_0 \rightarrow 0$ переходит в равенство, соответствующее гауссову дельта-коррелированному процессу

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = B^{\text{eff}} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t)} R[t; z(\tau)] \right\rangle,$$

если, конечно, вариационная производная в равенстве (5.43) мало меняется за времена порядка τ_0 .

Таким образом, аппроксимация процесса $z(t)$ дельта-коррелированным процессом обусловлена малостью изменения функционалов от этого процесса за времена порядка его временному радиусу корреляции.

Рассмотрим теперь телеграфный процесс. Для этого процесса характеристический функционал описывается уравнением (4.77) на с. 114. Время корреляции для этого процесса $\tau_0 = 1/2\nu$, и при $\nu \rightarrow \infty$ ($\tau_0 \rightarrow 0$) это уравнение для достаточно гладких функций $v(t)$ переходит в уравнение

$$\frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = -\frac{a_0^2}{2\nu} v^2(t) \Phi[t; v(\tau)], \quad (5.44)$$

соответствующее гауссову дельта-коррелированному процессу. Если при этом считать еще, что $a_0^2 \rightarrow \infty$, причем

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_0^2/2\nu = \sigma_0^2,$$

то уравнение (5.44) не будет содержать параметра ν . Конечно, это не означает, что при $\nu \rightarrow \infty$ телеграфный процесс перестает быть телеграфным. Так, при $\nu \rightarrow \infty$ однотоочное распределение вероятностей $z(t)$ будет по-прежнему соответствовать телеграфному процессу, т. е. процессу с двумя возможными состояниями. Что касается корреляционной функции и моментных функций более высокого порядка, то они при $\nu \rightarrow \infty$ обладают всеми свойствами дельта функций, так как

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\{ 2\nu e^{-2\nu|\tau|} \right\} = \begin{cases} 0, & \text{при } \tau \neq 0, \\ \infty, & \text{при } \tau = 0. \end{cases}$$

Такие функции следует считать обобщенными функциями, и их дельтаобразный характер будет проявляться в связанных с ними интегралах. При этом уравнение (5.44) показывает, что предельный переход при $\nu \rightarrow \infty$ для таких величин эквивалентен замене процесса $z(t)$ на гауссов дельта-коррелированный процесс. Эта ситуация совершенно аналогична аппроксимации гауссова случайного процесса с конечным радиусом корреляции τ_0 дельта-коррелированным процессом при $\tau_0 \rightarrow 0$.

Задачи

Задача 5.1. Вычислить статистическое среднее $\langle g(\xi)f(\xi) \rangle_\xi$, где ξ — случайная величина.

Решение.

$$\begin{aligned} \langle g(\xi + \eta_1)f(\xi + \eta_2) \rangle_\xi &= \\ &= \exp \left\{ \Theta \left(\frac{d}{id\eta_1} + \frac{d}{id\eta_2} \right) - \Theta \left(\frac{d}{id\eta_1} \right) - \Theta \left(\frac{d}{id\eta_2} \right) \right\} \langle g(\xi + \eta_1) \rangle \langle f(\xi + \eta_2) \rangle. \end{aligned}$$

Задача 5.2. Вычислить статистическое среднее $\langle e^{\omega\xi} f(\xi) \rangle_\xi$, где величина ω может быть и комплексной.

Решение.

$$\langle e^{\omega\xi} f(\xi + \eta) \rangle_\xi = \exp \left\{ \Theta \left(\frac{1}{i} \left(\omega + \frac{d}{d\eta} \right) \right) - \Theta \left(\frac{d}{id\eta} \right) \right\} \langle f(\xi + \eta) \rangle_\xi.$$

Задача 5.3. Вычислить статистические средние $\langle e^{\omega\xi} \rangle_\xi$, $\langle \xi e^{\omega\xi} \rangle_\xi$ для гауссовой случайной величины с нулевым средним значением.

Решение.

$$\langle e^{\omega\xi} \rangle_\xi = \exp \left\{ \frac{\omega^2 \sigma^2}{2} \right\}, \quad \langle \xi e^{\omega\xi} \rangle_\xi = \omega \sigma^2 \exp \left\{ \frac{\omega^2 \sigma^2}{2} \right\}.$$

Задача 5.4. Вычислить статистическое среднее $\langle e^{\omega\xi} f(\xi) \rangle_\xi$ для гауссовой случайной величины с нулевым средним значением.

Решение.

$$\langle e^{\omega\xi} f(\xi) \rangle_\xi = \exp \left\{ \frac{\omega^2 \sigma^2}{2} \right\} \langle f(z + \omega\sigma^2) \rangle.$$

Задача 5.5. Расщепить корреляцию $\langle F[z(\tau)]R[z(\tau)] \rangle$.

Решение.

$$\begin{aligned} \langle F[z(\tau) + \eta_1(\tau)]R[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle &= \\ &= \left\langle \exp \left\{ \Theta \left[\frac{1}{i} \left(\frac{\delta}{\delta\eta_1(\tau)} + \frac{\delta}{\delta\eta_2(\tau)} \right) \right] - \Theta \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\eta_1(\tau)} \right] - \Theta \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\eta_2(\tau)} \right] \right\} \right\rangle \times \\ &\quad \times \langle F[z(\tau) + \eta_1(\tau)] \rangle \langle R[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle, \end{aligned}$$

где $\eta_1(\tau)$ и $\eta_2(\tau)$ — произвольные детерминированные функции.

Задача 5.6. Расщепить корреляцию $\langle F[z(\tau)]R[z(\tau)] \rangle$ для гауссова случайного процесса $z(t)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \langle F[z(\tau) + \eta_1(\tau)]R[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle &= \\ &= \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) \frac{\delta}{\delta \eta_1(\tau_1)} \frac{\delta}{\delta \eta_2(\tau_2)} \right\} \times \\ &\quad \times \langle F[z(\tau) + \eta_1(\tau)] \rangle \langle R[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle, \end{aligned}$$

или

$$\langle F[z(\tau)]R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = F \left[z(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(\tau, \tau_1) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau_1)} \right] \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle.$$

Задача 5.7. Расщепить корреляцию $\left\langle e^{i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau)v(\tau)} R[z(\tau)] \right\rangle$ для гауссова случайного процесса $z(t)$.

Решение.

$$\left\langle e^{i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau)v(\tau)} R[z(\tau)] \right\rangle = \Phi[v(\tau)] \left\langle R \left[z(\tau) + i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(\tau, \tau_1)v(\tau_1) \right] \right\rangle.$$

Задача 5.8. Расщепить корреляцию $\left\langle e^{i \int_0^t d\tau z(\tau)v(\tau)} R[t; z(\tau)] \right\rangle$ для гауссова случайного процесса $z(t)$.

Решение.

$$\left\langle e^{i \int_0^t d\tau z(\tau)v(\tau)} R[t; z(\tau)] \right\rangle = \Phi[t; v(\tau)] \left\langle R \left[t; z(\tau) + i \int_0^t d\tau_1 B(\tau, \tau_1)v(\tau_1) \right] \right\rangle,$$

где $\Phi[t; v(\tau)]$ — характеристический функционал гауссова случайного процесса $z(t)$.

Задача 5.9. Вычислить характеристический функционал процесса $z(t) = \xi^2(t)$, где $\xi(t)$ — гауссов процесс с параметрами

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = B(t_1 - t_2).$$

Указание. Характеристический функционал

$$\Phi[t; v(\tau)] = \langle \varphi[t; \xi(\tau)] \rangle, \quad \text{где } \varphi[t; \xi(\tau)] = \exp \left\{ i \int_0^t d\tau v(\tau)\xi^2(\tau) \right\}$$

удовлетворяет стохастическому уравнению

$$\frac{d}{dt}\Phi[t; v(\tau)] = iv(t) \langle \xi^2(t)\varphi[t; \xi(\tau)] \rangle.$$

Далее для величины $\Psi(t_1, t) = \langle \xi(t_1)\xi(t)\varphi[t; \xi(\tau)] \rangle$ следует получить интегральное уравнение

$$\Psi(t_1, t) = B(t_1 - t)\Phi[t; v(\tau)] + 2i \int_0^t d\tau B(t_1 - \tau)v(\tau)\Psi(\tau, t)$$

и представить функцию $\Psi(t_1, t)$ в виде

$$\Psi(t_1, t) = S(t_1, t)\Phi[t; v(\tau)].$$

Решение. Характеристический функционал $\Phi[t; v(\tau)]$ имеет структуру

$$\Phi[t; v(\tau)] = \exp \left\{ i \int_0^t d\tau v(\tau)S(\tau, \tau) \right\},$$

где

$$S(t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}(t, t),$$

$$S^{(n)}(t, t) = (2i)^n \int_0^t d\tau_1 v(\tau_1) \dots \int_0^t d\tau_n v(\tau_n) B(t - \tau_1)B(\tau_1 - \tau_2) \dots B(\tau_n - t).$$

Следовательно, n -й кумулянт процесса $z(t) = \xi^2(t)$ определяется величиной $S^{(n-1)}(t, t)$.

Задача 5.10. Вычислить характеристический функционал процесса $z(t) = \xi^2(t)$, где $\xi(t)$ — гауссов марковский процесс с параметрами

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = B(t_1 - t_2) = \sigma^2 \exp\{-\alpha|t_1 - t_2|\}.$$

Решение. Характеристический функционал $\Phi[t; v(\tau)]$ имеет структуру

$$\Phi[t; v(\tau)] = \exp \left\{ i \int_0^t d\tau v(\tau)S(\tau, \tau) \right\},$$

где функция $S(t, t)$ описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}S(t, t) = -2\alpha [S(t, t) - \sigma^2] + 2iv(t)S^2(t, t), \quad S(t, t)|_{t=0} = \sigma^2.$$

Задача 5.11. Показать, что для телеграфного случайного процесса имеет место выражение

$$\langle z(t_1)z(t_2)R[z(\tau)] \rangle = \langle z(t_1)z(t_2) \rangle \langle R[z(\tau)] \rangle,$$

справедливое для произвольного функционала $R[z(\tau)]$ при условии $\tau \leq t_2 \leq t_1$ [49].

Указание. Разложить функционал $R[z(\tau)]$ в ряд Тейлора по $z(\tau)$ и использовать формулы (4.73).

Задача 5.12. Показать, что для телеграфного случайного процесса имеет место равенство [49]

$$\begin{aligned} \langle F[z(\tau_1)]z(t_1)z(t_2)R[z(\tau_2)] \rangle = \\ = \langle F[z(\tau_1)] \rangle \langle z(t_1)z(t_2) \rangle \langle R[z(\tau_2)] \rangle + \langle F[z(\tau_1)]z(t_1) \rangle \langle z(t_2)R[z(\tau_2)] \rangle, \end{aligned}$$

справедливое для любых $\tau_1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \tau_2$ и произвольных функционалов $F[z(\tau_1)]$ и $R[z(\tau_2)]$, если величина a — случайна с плотностью распределения вероятностей

$$p(a) = \frac{1}{2} [\delta(a - a_0) + \delta(a + a_0)].$$

Указание. Представить функционал $R[z(\tau_2)]$ в виде ряда Тейлора по $z(\tau)$

$$R[z(\tau_2)] = \sum_{2k} + \sum_{2k+1},$$

где первая сумма содержит четное число сомножителей $z(\tau)$, а вторая — нечетное и учесть, что

$$\langle R[z(\tau_2)] \rangle = \left\langle \sum_{2k} \right\rangle, \quad \langle z(t_2)R[z(\tau_2)] \rangle = \left\langle z(t_2) \sum_{2k} \right\rangle.$$

Задача 5.13. Показать, что для телеграфного процесса имеет место равенство

$$\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle = e^{-2\nu(t'-t)} \langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle \quad (t' \geq t).$$

Указание. Переписать корреляцию $\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle$, где $t' \geq t$, $\tau < t$ в виде

$$\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle = \frac{1}{a_0^2} \langle z(t')z(t)z(t)R[t; z(\tau)] \rangle.$$

Очерк 6

ОБЩИЕ ПОДХОДЫ К СТОХАСТИЧЕСКИМ ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

В этой главе мы рассмотрим основные методы нахождения статистических характеристик решений стохастических уравнений.

Рассмотрим линейное (дифференциальное, интегро-дифференциальное или интегральное) стохастическое уравнение. В общем случае, усреднение его по ансамблю реализаций флуктуирующих параметров не дает замкнутого уравнения для соответствующего среднего значения. Замкнутое уравнение можно получить с помощью перехода к дополнительному расширенному пространству, которое в большинстве случаев является бесконечномерным. Таким образом можно перейти к линейному уравнению для средней величины, содержащему вариационные производные.

Рассмотрим конкретные типы динамических систем.

6.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пусть динамика векторной функции $\mathbf{x}(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \tag{6.1}$$

Здесь через функцию $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ обозначена детерминированная функция, а через $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — случайная функция.

Решение уравнения (6.1) является функционалом от $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) + \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)$ при $\tau \in (t_0, t)$, т. е.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) + \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)].$$

Отсюда вытекает равенство

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{y}, \tau)} F(\mathbf{x}(t)) = \frac{\delta}{\delta v_j(\mathbf{y}, \tau)} F(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial F(\mathbf{x}(t))}{\partial x_i} \frac{\delta x_i(t)}{\delta f_j(\mathbf{y}, \tau)},$$

справедливое для произвольной функции $F(\mathbf{x})$. Кроме того

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{y}, t-0)} x_i(t) = \frac{\delta}{\delta v_j(\mathbf{y}, t-0)} x_i(t) = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}).$$

Соответствующее уравнение Лиувилля для индикаторной функции

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}),$$

вытекающее из уравнения (6.1), имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)] \varphi(\mathbf{x}, t)\}, \quad \varphi(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (6.2)$$

откуда следует равенство

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{f}(\mathbf{y}, t - 0)} \varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, t - 0)} \varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, t)\}, \quad (6.3)$$

с помощью которого можно переписать уравнение (6.2) в более сложном, на первый взгляд, виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) \varphi(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{y} \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)} \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (6.4)$$

Рассмотрим теперь одновременную плотность вероятностей для решения $\mathbf{x}(t)$ уравнения (6.1):

$$P(\mathbf{x}, t) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle.$$

Здесь $\mathbf{x}(t)$ — решение уравнения (6.1), соответствующее конкретной реализации случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, а через скобки $\langle \dots \rangle$ обозначено усреднение по ансамблю всех реализаций поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Усредним уравнение (6.4) по ансамблю реализаций поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. В результате получаем выражение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{y} \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)} \langle \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle. \quad (6.5)$$

Величина $\langle \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle$ в правой части (6.5) описывает корреляцию между случайным полем $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ и функцией $\varphi(\mathbf{x}, t)$, являющуюся функционалом случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)$, и описывающей уравнениями (6.2) или (6.4).

Статистические характеристики случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)$ при $\tau \in (t_0, t)$ полностью описываются его характеристическим функционалом

$$\Phi[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{y} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau) \right\} \right\rangle = \exp \{ \Theta[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)] \}.$$

Для расщепления корреляции $\langle \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle$ воспользуемся функциональной методикой. Функционал $\varphi[t, \mathbf{x}; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) + \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)]$ можно переписать в операторном виде, вводя оператор функционального сдвига по полю $\mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)$:

$$\varphi[t, \mathbf{x}; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) + \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)] = \exp \left\{ \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{y} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)} \right\} \varphi[t, \mathbf{x}; \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)].$$

Следовательно, член в правой части (6.5) можно переписать в виде

$$\int d\mathbf{y} \frac{\delta}{\delta v_j(\mathbf{y}, t)} \frac{\left\langle f_j(\mathbf{y}, t) \exp \left\{ \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{y}' \mathbf{f}(\mathbf{y}', \tau) \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}', \tau)} \right\} \right\rangle}{\left\langle \exp \left\{ \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{y}' \mathbf{f}(\mathbf{y}', \tau) \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}', \tau)} \right\} \right\rangle} P(\mathbf{x}, t) = \dot{\Theta}_t \left[t, t_0; \frac{\delta}{i \delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)} \right] P(\mathbf{x}, t),$$

где введен функционал

$$\dot{\Theta}_t[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)] = \frac{d}{dt} \ln \Phi[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)].$$

Следовательно, уравнение (6.5) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = \dot{\Theta}_t \left[t, t_0; \frac{\delta}{i \delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)} \right] P(\mathbf{x}, t). \quad (6.6)$$

Уравнение (6.6) является замкнутым уравнением с вариационными производными в функциональном пространстве всех возможных функций $\{\mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)\}$. Для фиксированной же функции $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ мы приходим уже к незамкнутому уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t, t_0; \frac{\delta}{i \delta \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)} \right] \varphi[t, \mathbf{x}; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \right\rangle, \quad (6.7)$$

$$P(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Уравнение (6.7) является точным следствием исходного динамического уравнения (6.1). Статистические характеристики случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ входят в него только через функционал $\dot{\Theta}_t[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)]$, разложение которого в функциональный степенной ряд по $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$ определяется всеми пространственно-временными кумулянтными функциями случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Как говорилось ранее, в общем случае уравнение (6.7) не замкнуто относительно функции $P(\mathbf{x}, t)$, так как величина

$$\dot{\Theta}_t \left[t, t_0; \frac{\delta}{i \delta \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)} \right] \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}),$$

стоящая под знаком усреднения, определяется зависимостью поведения решения $\mathbf{x}(t)$ от случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)$ для всех моментов времени $t_0 < \tau < t$. Существует, однако, ряд случаев, когда вариационная производная в (6.7) выражается через обычные дифференциальные операторы. В этих случаях уравнения типа (6.7) будут уже замкнутыми уравнениями для соответствующих плотностей вероятностей. Такого рода примеры будут приведены несколько позднее.

Аналогичным образом можно получить уравнение типа (6.7) и для m -временной плотности вероятностей

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \langle \varphi_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) \rangle, \quad (6.8)$$

относящейся к m различным моментам времени $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, где индикаторная функция определяется равенством

$$\varphi_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \delta(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_1) \dots \delta(\mathbf{x}(t_m) - \mathbf{x}_m).$$

Дифференцируя (6.8) по времени t_m и используя затем динамическое уравнение (6.1), можно получить уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_m} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_m} \mathbf{v}(\mathbf{x}_m, t_m) \right) P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \left\langle \dot{\Theta}_{t_m} \left[t_m, t_0; \frac{\delta}{i \delta \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)} \right] \varphi_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) \right\rangle. \quad (6.9)$$

Здесь суммирование по индексу m не производится. Начальное условие к (6.9) можно найти из формулы (6.8). Полагая $t_m = t_{m-1}$ в (6.8), получаем равенство

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_{m-1}) = \delta(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}),$$

которое и определяет начальное условие для уравнения (6.9).

6.2. Динамические системы, допускающие полный статистический анализ

Рассмотрим теперь несколько примеров динамических систем, допускающих достаточно полный статистический анализ для произвольных случайных параметров.

6.2.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пример мультипликативного воздействия

В качестве первого примера рассмотрим векторное стохастическое уравнение с начальным условием

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = z(t)g(t)\mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (6.10)$$

где $g(t)$ и $F_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, N$, — детерминированные функции, а $z(t)$ — случайный процесс, статистические характеристики которого описываются характеристическим функционалом

$$\Phi[t; v(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle = e^{\Theta[t; v(\tau)]}.$$

Уравнения (6.10) обладает особенностью, позволяющей решить задачу о нахождении статистических характеристик их решений в общем случае произвольной статистики процесса $z(t)$. Дело в том, что если ввести новое «случайное» время

$$T = \int_0^t d\tau z(\tau)g(\tau),$$

то уравнения (6.10) примут форму «детерминированных» уравнений

$$\frac{d}{dT} \mathbf{x}(T) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

и, следовательно, решение уравнения (6.10) имеет структуру

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(T) = \mathbf{x} \left(\int_0^t d\tau z(\tau)g(\tau) \right). \quad (6.11)$$

Варируя (6.11) по $z(\tau)$ и используя (6.10), получаем равенство

$$\frac{\delta}{\delta z(\tau)} \mathbf{x}(t) = g(\tau) \frac{d}{dT} \mathbf{x}(T) = g(\tau) \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)). \quad (6.12)$$

Таким образом, вариационные производные решения $\mathbf{x}(t)$ выражаются через само же решение в тот же момент времени. Это позволяет сразу написать замкнутые уравнения для статистических характеристик задачи (6.10).

Получим уравнение для одноточечной плотности вероятностей

$$P(\mathbf{x}, t) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle.$$

Оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t; \frac{\delta}{i \delta z(\tau)} \right] \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \right\rangle. \quad (6.13)$$

Рассмотрим теперь действие оператора $\delta/\delta z(\tau)$ на индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}).$$

Используя формулу (6.12), получаем выражение

$$\frac{\delta}{\delta z(\tau)} \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) = -g(\tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{ \mathbf{F}(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}, t) \}.$$

Следовательно, уравнение (6.13) можно переписать в виде замкнутого операторного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = \dot{\Theta}_t \left[t; ig(\tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \right] P(\mathbf{x}, t), \quad P(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (6.14)$$

конкретный вид которого определяется характером процесса $z(t)$.

Для двухвременной плотности вероятностей

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_1) \rangle$$

аналогичным образом получаем уравнение (при $t > t_1$)

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) = \dot{\Theta}_t \left[t; ig(\tau) \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \theta(t_1 - \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_1) \right\} \right] P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) \quad (6.15)$$

с начальным условием

$$P(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t_1) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) P(\mathbf{x}_1, t_1),$$

где функция $P(\mathbf{x}_1, t_1)$ удовлетворяет уравнению (6.14).

Из уравнения (6.15) видно, что многовременная плотность вероятностей не допускает факторизации через плотность вероятностей перехода (см. раздел 3.3) и, следовательно, процесс $\mathbf{x}(t)$ не является марковским. Конкретный вид уравнений (6.14) и (6.15) определяется выбором статистики процесса $z(t)$.

Так, если процесс $z(t)$ — гауссов с характеристиками

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad B(t, t') = \langle z(t)z(t') \rangle,$$

то функционал

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 B(t_1, t_2) v(t_1) v(t_2),$$

и уравнение (6.14) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = g(t) \int_0^t d\tau B(t, \tau) g(\tau) \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} F_k(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}, t) \quad (6.16)$$

и его можно рассматривать как *обобщенное уравнение Фоккера–Планка*.

К задачам типа (6.10) приводит класс задач, описываемый системой уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = z(t) \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (6.17)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ — однородные полиномы степени k . Вводя новые функции

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) e^{-\lambda t},$$

мы приходим к задаче (6.10) с функцией $g(t) = e^{-\lambda(k-1)t}$. В важном частном случае $k = 2$ и для функций $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ таких, что $\mathbf{x}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$, система уравнений (6.10) описывает системы гидродинамического типа с линейным трением. При этом взаимодействие между компонентами носит случайный характер.

Для систем гидродинамического типа при $\lambda = 0$ и для любой реализации процесса $z(t)$ имеет место закон сохранения энергии. В этом случае имеется стационарное распределение вероятностей при $t \rightarrow \infty$ $P(\mathbf{x})$, которое является равномерным распределением на сфере $x_i^2 = E_0$, если нет дополнительных интегралов движения. При наличии дополнительных интегралов движения (как это имеет место, например, при конечномерной аппроксимации двумерного движения жидкости) стационарное распределение вероятностей будет сосредоточено на области фазового пространства, допускаемого интегралами движения.

Отметим, что в частном случае одномерного линейного уравнения типа (6.17) для гауссова процесса $z(t)$, определяющего *логарифмически нормальный случайный процесс* (логнормальный) простейшего вида,

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\lambda x(t) + z(t)x(t), \quad x(0) = 1,$$

вместо (6.16) получаем обобщенное уравнение Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} x \right) P(x, t) = \int_0^t d\tau B(t, \tau) \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} x P(x, t), \quad P(x, 0) = \delta(x - 1). \quad (6.18)$$

Пример аддитивного воздействия

Рассмотрим теперь класс линейных уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (6.19)$$

где $A(t)$ — детерминированная матрица, а $\mathbf{f}(t)$ — случайная вектор-функция с заданным характеристическим функционалом $\Phi[t; \mathbf{v}(\tau)]$.

Для плотности вероятностей решения уравнения (6.19) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ik}(t) x_k P(\mathbf{x}, t)) + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t; \frac{\delta}{i \delta \mathbf{f}(\tau)} \right] \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \right\rangle. \quad (6.20)$$

В рассматриваемой задаче вариационная производная $\delta \mathbf{x}(t) / \delta \mathbf{f}(\tau)$ удовлетворяет также линейному уравнению ($\tau < t$) с начальным условием:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta}{\delta \mathbf{f}(\tau)} x_i(t) = A_{ik}(t) \frac{\delta}{\delta \mathbf{f}(\tau)} x_k(t), \quad \frac{\delta}{\delta f_l(\tau)} x_i(t) \Big|_{t=\tau} = \delta_{il}. \quad (6.21)$$

Уравнение (6.21) уже не содержит случайностей и определяет функцию Грина $G_{il}(t, \tau)$ для однородной системы (6.19), т. е.

$$\frac{\delta}{\delta f_l(\tau)} x_i(t) = G_{il}(t, \tau).$$

Следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta f_l(\tau)} \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial x_k} G_{kl}(t, \tau) \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}),$$

и уравнение (6.20) превращается в замкнутое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ik}(t) x_k P(\mathbf{x}, t)) + \dot{\Theta}_t \left[t; i G_{kl}(t, \tau) \frac{\partial}{\partial x_k} \right] P(\mathbf{x}, t). \quad (6.22)$$

Из уравнения (6.22) следует, что уравнение для любого момента величины $\mathbf{x}(t)$ будет замкнутым линейным уравнением, содержащим только конечное число кумулянтных функций, порядок которых не превосходит порядка рассматриваемого момента.

Аналогичным образом для двухвременной плотности вероятностей

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_1) \rangle$$

получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) = & -\frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ik}(t) x_k P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1)) + \\ & + \dot{\Theta}_t \left[t; i \{ G_{kl}(t, \tau) + G_{kl}(t_1, \tau) \} \frac{\partial}{\partial x_l} \right] P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) \quad (t > t_1) \end{aligned} \quad (6.23)$$

с начальным условием

$$P(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t_1) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)P(\mathbf{x}_1, t_1),$$

где $P(\mathbf{x}_1, t_1)$ — одноточечная плотность вероятностей, описываемая уравнением (6.22). Из уравнения (6.23) следует, что процесс $\mathbf{x}(t)$ не является марковским. Конкретная форма уравнений (6.22) и (6.23) определяется структурой функционала $\Phi[t; v(\tau)]$, т. е. случайным характером функции $\mathbf{f}(t)$.

Так, для гауссова векторного процесса $\mathbf{f}(t)$ с параметрами

$$\langle \mathbf{f}(t) \rangle = 0, \quad B_{ij}(t, t') = \langle f_i(t)f_j(t') \rangle$$

уравнение (6.22) принимает вид обобщенного уравнения Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(A_{ik}(t)x_k P(\mathbf{x}, t)) + \int_0^t d\tau B_{jl}(t, \tau)G_{kj}(t, \tau)G_{ml}(t, \tau)\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m}P(\mathbf{x}, t). \quad (6.24)$$

В качестве конкретной задачи рассмотрим динамику частицы с трением под действием случайных сил [50].

Инерционная частица под действием случайных сил. Простейший пример диффузии частицы под действием случайной внешней силы $\mathbf{f}(t)$ с линейным трением описывается линейной системой уравнений (1.77) на с. 45

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t), \quad \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = -\lambda[\mathbf{v}(t) - \mathbf{f}(t)], \quad (6.25)$$

$$\mathbf{r}(0) = 0, \quad \mathbf{v}(0) = 0.$$

Стохастическое решение уравнений (6.25) имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = \lambda \int_0^t d\tau e^{-\lambda(t-\tau)}\mathbf{f}(\tau), \quad \mathbf{r}(t) = \int_0^t d\tau [1 - e^{-\lambda(t-\tau)}]\mathbf{f}(\tau) \quad (6.26)$$

и для стационарного случайного процесса $\mathbf{f}(t)$ с корреляционным тензором

$$\langle f_i(t)f_j(t') \rangle = B_{ij}(t - t')$$

и временным радиусом корреляции τ_0 , определяемым соотношением

$$\int_0^\infty d\tau B_{ii}(\tau) = \tau_0 B_{ii}(0),$$

получаем аналитические выражения для корреляционных функций скорости и координаты частицы

$$\langle v_i(t)v_j(t) \rangle = \lambda \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) [e^{-\lambda\tau} - e^{-\lambda(2t-\tau)}], \quad (6.27)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle r_i(t)r_j(t) \rangle = \langle r_i(t)v_j(t) \rangle = \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) [1 - e^{-\lambda t}] [1 - e^{-\lambda(t-\tau)}].$$

В стационарном режиме, когда $\lambda t \gg 1$ и $t/\tau_0 \gg 1$, но параметр $\lambda\tau_0$ произволен, скорость частицы является стационарным процессом с корреляционным тензором

$$\langle v_i(t)v_j(t) \rangle = \lambda \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\tau)e^{-\lambda\tau}, \quad (6.28)$$

а величины

$$\langle r_i(t)v_j(t) \rangle = \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\tau), \quad \langle r_i(t)r_j(t) \rangle = 2t \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\tau). \quad (6.29)$$

Если к тому же $\lambda\tau_0 \gg 1$, то корреляционный тензор скорости переходит в

$$\langle v_i(t)v_j(t) \rangle = B_{ij}(0) \quad (6.30)$$

в согласии с уравнением (6.25), так как в этом пределе $\mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{f}(t)$.

Если же выполнено условие $\lambda\tau_0 \ll 1$, то

$$\langle v_i(t)v_j(t) \rangle = \lambda \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\tau)$$

и этот результат соответствует дельта-коррелированному приближению случайного процесса $\mathbf{f}(t)$.

Введем теперь индикаторную функцию для решения уравнения (6.25)

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}),$$

которая описывается уравнением Лиувилля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\lambda \mathbf{f}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (6.31)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0) = \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}).$$

Среднее значение индикаторной функции $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ по ансамблю реализаций случайного процесса $\mathbf{f}(t)$ описывает совместную одновременную плотность вероятностей положения частицы и ее скорости

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \langle \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{f}}.$$

Усредним уравнение (6.31) по ансамблю реализаций случайного процесса $\mathbf{f}(t)$. В результате получаем незамкнутое уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{f}(t) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)), \quad (6.32)$$

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0) = \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}),$$

содержащее корреляцию $\langle \mathbf{f}(t)\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle$, которое эквивалентно равенству

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \left\langle \dot{\Theta} \left[t; \frac{\delta}{i\delta \mathbf{f}(\tau)} \right] \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \right\rangle, \quad (6.33)$$

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0) = \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}),$$

где функционал $\dot{\Theta} [t; \psi(\tau)]$ связан с характеристическим функционалом случайного процесса $\mathbf{f}(t)$

$$\Phi [t; \psi(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \psi(\tau) \mathbf{f}(\tau) \right\} \right\rangle = e^{\Theta [t; \psi(\tau)]}$$

по формуле

$$\dot{\Theta} [t; \psi(\tau)] = \frac{d}{dt} \ln \Phi [t; \psi(\tau)] = \frac{d}{dt} \Theta [t; \psi(\tau)].$$

Функционал $\Theta [t; \psi(\tau)]$ можно разложить в функциональный степенной ряд

$$\Theta [t; \psi(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_n K_{i_1, \dots, i_n}^{(n)}(t_1, \dots, t_n) \psi_{i_1}(t_1) \dots \psi_{i_n}(t_n),$$

где функции

$$K_{i_1, \dots, i_n}^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta \psi_{i_1}(t_1) \dots \delta \psi_{i_n}(t_n)} \Theta [t; \psi(\tau)] \Big|_{\psi=0}$$

являются кумулянтными функциями случайного процесса $\mathbf{f}(t)$ порядка n .

Рассмотрим вариационную производную

$$\frac{\delta}{\delta f_j(t')} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = - \left[\frac{\partial}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(t)}{\delta f_j(t')} + \frac{\partial}{\partial v_k} \frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(t')} \right] \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (6.34)$$

Для динамической задачи (6.25) вариационные производные функций $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ в равенстве (6.34) вычисляются из выражений (6.26) и имеют вид

$$\frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(t')} = \lambda \delta_{kj} e^{-\lambda(t-t')}, \quad \frac{\delta r_k(t)}{\delta f_j(t')} = \delta_{kj} [1 - e^{-\lambda(t-t')}]. \quad (6.35)$$

Используя равенства (6.35), можно теперь выражение (6.34) записать в виде

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{f}(t')} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = - \left\{ [1 - e^{-\lambda(t-t')}] \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \lambda e^{-\lambda(t-t')} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

и, следовательно, переписать уравнение (6.33) в замкнутом виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \dot{\Theta} \left[t; i \left\{ [1 - e^{-\lambda(t-t')}] \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \lambda e^{-\lambda(t-t')} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} \right] P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (6.36)$$

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0) = \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}).$$

Отметим, что из уравнения (6.36) следует, что уравнения для моментных функций порядка n содержат кумулянтные функции порядка не более чем n .

Предположим теперь, что процесс $\mathbf{f}(t)$ —гауссов стационарный процесс с нулевым средним значением и корреляционным тензором

$$B_{ij}(t-t') = \langle f_i(t) f_j(t') \rangle.$$

В этом случае характеристический функционал процесса $\mathbf{f}(t)$ есть

$$\Phi [t; \psi(\tau)] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t dt_1 dt_2 B_{ij}(t_1 - t_2) \psi_i(t_1) \psi_j(t_2) \right\}.$$

Для функционала $\dot{\Theta} [t; \psi(\tau)]$ получаем выражение

$$\dot{\Theta} [t; \psi(\tau)] = -\psi_i(t) \int_0^t dt' B_{ij}(t-t') \psi_j(t')$$

и мы приходим из уравнения (6.36) к обобщению уравнения Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \lambda^2 \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) e^{-\lambda\tau} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \lambda \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) [1 - e^{-\lambda\tau}] \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (6.37)$$

Уравнение (6.37) — точное уравнение и справедливо для всех моментов времени. Как следует из него функции $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ являются гауссовыми. Для моментных функций процессов $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ обычным путем получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle r_i(t) r_j(t) \rangle &= 2 \langle r_i(t) v_j(t) \rangle, \\ \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) \langle r_i(t) v_j(t) \rangle &= \langle v_i(t) v_j(t) \rangle + \lambda \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) [1 - e^{-\lambda\tau}], \\ \left(\frac{d}{dt} + 2\lambda \right) \langle v_i(t) v_j(t) \rangle &= 2\lambda^2 \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) e^{-\lambda\tau}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Из системы (6.38) следует, что стационарные значения всех одновременных корреляций при $\lambda t \gg 1$ and $t/\tau_0 \gg 1$ описываются выражениями

$$\begin{aligned} \langle v_i(t) v_j(t) \rangle &= \lambda \int_0^{\infty} d\tau B_{ij}(\tau) e^{-\lambda\tau}, \quad \langle r_i(t) v_j(t) \rangle = D_{ij}, \\ \langle r_i(t) r_j(t) \rangle &= 2t D_{ij}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

где пространственный диффузионный тензор

$$D_{ij} = \int_0^{\infty} d\tau B_{ij}(\tau), \quad (6.40)$$

в согласии с выражениями (6.28) и (6.29).

Замечание. Временной корреляционный тензор и временной радиус корреляции процесса $\mathbf{v}(t)$.

Мы можем также вычислить временной радиус корреляции скорости $\mathbf{v}(t)$ т. е. величину $\langle v_i(t)v_j(t_1) \rangle$. Для нее получаем уравнение для времен $t_1 < t$ с помощью равенств (6.35)

$$\left(\frac{d}{dt} + \lambda\right) \langle v_i(t)v_j(t_1) \rangle = \lambda^2 \int_0^{t_1} dt' B_{ij}(t-t') e^{-\lambda(t-t')} = \lambda^2 e^{\lambda(t-t_1)} \int_{t-t_1}^t d\tau B_{ij}(\tau) e^{-\lambda\tau}, \quad (6.41)$$

с начальным условием

$$\langle v_i(t)v_j(t_1) \rangle|_{t=t_1} = \langle v_i(t_1)v_j(t_1) \rangle. \quad (6.42)$$

Для стационарного режима при $\lambda t \gg 1$, $\lambda t_1 \gg 1$, но фиксированной величине $(t - t_1)$, получаем уравнение с начальным условием ($\tau = t - t_1$)

$$\left(\frac{d}{d\tau} + \lambda\right) \langle v_i(t+\tau)v_j(t) \rangle = \lambda^2 e^{\lambda\tau} \int_{\tau}^{\infty} d\tau_1 B_{ij}(\tau_1) e^{-\lambda\tau_1}, \quad (6.43)$$

$$\langle v_i(t+\tau)v_j(t) \rangle_{\tau=0} = \langle v_i(t)v_j(t) \rangle.$$

Легко написать решение уравнения (6.43), однако нас интересует временной радиус корреляции случайного процесса $\mathbf{v}(t) - \tau_{\mathbf{v}}$. Для получения этой величины проинтегрируем уравнение (6.43) по параметру τ на интервале $(0, \infty)$. В результате получаем выражение

$$\lambda \int_0^{\infty} d\tau \langle v_i(t+\tau)v_j(t) \rangle = \langle v_i(t)v_j(t) \rangle + \lambda \int_0^{\infty} d\tau_1 B_{ij}(\tau_1) [1 - e^{-\lambda\tau_1}],$$

и, следовательно, с помощью равенства (6.39) приходим к выражению

$$\tau_{\mathbf{v}} \langle \mathbf{v}^2(t) \rangle = D_{ii} = \tau_0 B_{ii}(0), \quad (6.44)$$

т. е.

$$\tau_{\mathbf{v}} = \frac{\tau_0 B_{ii}(0)}{\langle \mathbf{v}^2(t) \rangle} = \frac{\tau_0 B_{ii}(0)}{\lambda \int_0^{\infty} d\tau B_{ii}(\tau) e^{-\lambda\tau}} = \begin{cases} \tau_0, & \text{если } \lambda\tau_0 \gg 1, \\ 1/\lambda, & \text{если } \lambda\tau_0 \ll 1. \end{cases} \quad (6.45) \quad \blacklozenge$$

Интегрируя уравнение (6.37) по \mathbf{r} , получаем замкнутое уравнение для плотности вероятностей скорости частицы

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v}\right) P(\mathbf{v}, t) = \lambda^2 \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) e^{-\lambda\tau} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),$$

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0) = \delta(\mathbf{v}).$$

Решение этого уравнения соответствует гауссову процессу $\mathbf{v}(t)$ с корреляционным тензором (6.27). Это связано с тем, что второе уравнение системы (6.25) замкнуто. При выполнении условия $\lambda t \gg 1$ следует, что существует стационарная плотность вероятностей, описываемая уравнением

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} P(\mathbf{v}, t) = \lambda \int_0^{\infty} d\tau B_{ij}(\tau) e^{-\lambda\tau} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} P(\mathbf{v}, t)$$

и скорость установления этого распределения зависит от параметра λ .

Написать уравнение для плотности вероятностей координаты частицы $P(\mathbf{r}, t)$ непосредственно из уравнения (6.37) не удастся. Действительно, интегрируя уравнение (6.37) по \mathbf{v} , получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \mathbf{v} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad P(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r}). \quad (6.46)$$

Для функции $\int v_k P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$ имеем равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) \int v_k P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int v_k \mathbf{v} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} - \lambda \int_0^t d\tau B_{kj}(\tau) [1 - e^{-\lambda\tau}] \frac{\partial}{\partial r_j} P(\mathbf{r}, t), \quad (6.47)$$

и так далее. Таким образом мы получаем бесконечную систему уравнений.

Случайная функция $\mathbf{r}(t)$ описывается первым уравнением в системе (6.25) и если бы мы знали полную статистику функции $\mathbf{v}(t)$ (т. е. многовременную статистику), то могли бы вычислить все статистические характеристики функции $\mathbf{r}(t)$. Однако, уравнение (6.37) описывает только одновременные статистические величины и только бесконечная система величин, подобных (6.46), (6.47) и т. д. эквивалентна многовременной статистике для $\mathbf{v}(t)$. Действительно, функция

$$\mathbf{r}(t) = \int_0^t dt_1 \mathbf{v}(t_1)$$

и пространственный коэффициент диффузии в стационарном режиме, как мы видели в выражении (6.44), является

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{r}^2(t) \rangle = \int_0^{\infty} d\tau \langle \mathbf{v}(t+\tau)\mathbf{v}(t) \rangle = \tau_{\mathbf{v}} \langle \mathbf{v}^2(t) \rangle = D_{ii} = \tau_0 B_{ii}(0), \quad (6.48)$$

и зависит от временного радиуса корреляции $\tau_{\mathbf{v}}$ случайной функции $\mathbf{v}(t)$ и ее дисперсии.

Однако, для этой простейшей задачи, мы непосредственно знаем дисперсии всех величин и корреляции функций $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ (см. выражения (6.27)) и, следовательно, мы можем написать уравнение для плотности вероятностей координаты частицы

$P(\mathbf{r}, t)$, которое есть диффузионное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) = D_{ij}(t) \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, t), \quad P(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r})$$

с диффузионным тензором (6.27)

$$\begin{aligned} D_{ij}(t) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle r_i(t) r_j(t) \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle r_i(t) v_j(t) \rangle + \langle r_j(t) v_i(t) \rangle \} = \\ &= \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) [1 - e^{-\lambda t}] [1 - e^{-\lambda(t-\tau)}]. \end{aligned}$$

При условии $\lambda t \gg 1$ получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) = D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, t), \quad P(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r}) \quad (6.49)$$

с диффузионным тензором

$$D_{ij} = \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\tau). \quad (6.50)$$

Отметим, что переход от уравнения (6.37) к уравнению для плотности вероятностей координаты частицы (6.49) с коэффициентом диффузии (6.48) соответствует, так называемой, *проблеме Крамерса*.

Если выполнено условие $\lambda \tau_0 \ll 1$, где τ_0 — временной радиус корреляции процесса $\mathbf{f}(t)$, то уравнение (6.37) упрощается

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= \lambda^2 \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \\ P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0) &= \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

и соответствует, так называемому, приближению дельта-коррелированного процесса для случайной функции $\mathbf{f}(t)$. Если время $t \gg \tau_0$, то мы можем заменить верхний предел в интеграле на бесконечность и перейти к обычному диффузионному уравнению Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \lambda^2 D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (6.51)$$

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0) = \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}),$$

с диффузионным тензором (6.48). В этом приближении объединенный случайный процесс $\{\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)\}$ есть марковский процесс.

При выполнении условия $\lambda t \gg 1$ имеется стационарное уравнение для плотности вероятностей скорости частицы

$$-\lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} P(\mathbf{v}) = \lambda^2 D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} P(\mathbf{v}),$$

и нестационарное уравнение для плотности вероятностей координаты частицы

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) = D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, t), \quad P(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r}).$$

Рассмотрим теперь предельный случай $\lambda \tau_0 \gg 1$. В этом случае уравнение (6.37) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= \lambda B_{ij}(0) [1 - e^{-\lambda t}] \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \\ &- B_{ij}(0) [1 - e^{-\lambda t}] \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \lambda \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau) \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \\ P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0) &= \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Интегрируя это уравнение по \mathbf{r} , получаем уравнение для плотности вероятностей скорости частицы

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{v}, t) &= \lambda B_{ij}(0) [1 - e^{-\lambda t}] \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} P(\mathbf{v}, t), \\ P(\mathbf{v}, 0) &= \delta(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

и при условии $\lambda t \gg 1$, получаем стационарную гауссову плотность вероятностей с дисперсией

$$\langle v_i(t) v_j(t) \rangle = B_{ij}(0).$$

Что касается плотности вероятностей положения частицы, то при выполнении условия $\lambda t \gg 1$ получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t) = D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} P(\mathbf{r}, t), \quad P(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r}) \quad (6.52)$$

с тем же коэффициентом диффузии, как и ранее. Это связано с равенством (6.44), которое не зависит от параметра λ . Отметим, что это уравнение соответствует предельному переходу $\lambda \rightarrow \infty$ в уравнении (6.25)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{r}(0) = 0.$$

В этом предельном случае $\lambda \rightarrow \infty$ ($\lambda \tau_0 \gg 1$) мы имеем равенство

$$\mathbf{v}(t) \approx \mathbf{f}(t), \quad (6.53)$$

и вся многовременная статистика случайных функций $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ будет описываться статистическими характеристиками процесса $\mathbf{f}(t)$. В частности, одновременная плотность вероятностей скорости частицы $\mathbf{v}(t)$ — гауссова с дисперсией $\langle v_i(t) v_j(t) \rangle = B_{ij}(0)$, а пространственный коэффициент диффузии определяется выражением

$$D = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{r}^2(t) \rangle = \int_0^\infty d\tau B_{ii}(\tau) = \tau_0 B_{ii}(0).$$

В случае справедливости дельта-коррелированного приближения процесса $\mathbf{f}(t)$ ($\lambda\tau_0 \ll 1$), как мы видели ранее, приближенное равенство (6.53) уже несправедливо для нахождения статистических характеристик процесса $\mathbf{v}(t)$. Однако, для одновременных статистических характеристик процесса $\mathbf{r}(t)$ мы по-прежнему имеем уравнение (6.52) с тем же пространственным диффузионным тензором. Это связано с равенством (6.44), справедливым для любого параметра λ и произвольной плотности вероятностей случайного процесса $\mathbf{f}(t)$.

Выше мы рассмотрели несколько типов стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих замкнутое статистическое описание в общем виде. Ясно, что аналогичные ситуации могут существовать и в динамических системах, описываемых уравнениями в частных производных.

6.2.2. Примеры уравнений в частных производных

Прежде всего отметим, что уравнение в частных производных первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + z(t)g(t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x})\right)\rho(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (6.54)$$

эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений (6.10) на с. 138 и, следовательно, также допускает полное статистическое описание для произвольного случайного процесса $z(t)$.

Решение $\rho(\mathbf{r}, t)$ уравнения (6.54) является линейным функционалом случайного процесса $z(t)$; имеет место равенство

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho[\mathbf{x}, t; z(\tau)] = \rho(\mathbf{x}, T[t; z(\tau)]),$$

где

$$T[t; z(\tau)] = \int_0^t d\tau z(\tau)g(\tau), \quad (6.55)$$

и уравнение (6.54) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x})\right)\rho(\mathbf{x}, T) = 0.$$

В этом случае для вариационной производной получаем выражение

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta z(\tau)}\rho(\mathbf{x}, t) &= \frac{\delta}{\delta z(\tau)}\rho(\mathbf{x}, T[t; z(\tau)]) = \frac{d\rho(\mathbf{x}, T)}{dT} \frac{\delta T[t; z(\tau)]}{\delta z(\tau)} = \\ &= \theta(t - \tau)g(\tau) \frac{d\rho(\mathbf{x}, T)}{dT} = -\theta(t - \tau)g(\tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь класс нелинейных уравнений в частных производных, в общем случае произвольного порядка, не содержащих явной зависимости от пространственной переменной \mathbf{x} , а именно:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{z}(t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)q(\mathbf{x}, t) = F\left(t, q, \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \otimes \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}}, \dots\right), \quad (6.56)$$

где $\mathbf{z}(t)$ — векторный случайный процесс, а F — детерминированная функция своих переменных. Представим решение этого уравнения в виде

$$q(\mathbf{x}, t) = \exp\left\{-\int_0^t d\tau \mathbf{z}(\tau)\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right\}Q(\mathbf{x}, t) = Q\left(\mathbf{x} - \int_0^t d\tau \mathbf{z}(\tau), t\right), \quad (6.57)$$

где введен оператор сдвига. Для функция $Q(x, t)$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\int_0^t d\tau \mathbf{z}(\tau)\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right\} \frac{\partial Q(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \\ = F\left(t, \left[\exp\left\{-\int_0^t d\tau \mathbf{z}(\tau)\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right\}Q\right], \left[\exp\left\{-\int_0^t d\tau \mathbf{z}(\tau)\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right\} \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}}\right], \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \otimes \left[\exp\left\{-\int_0^t d\tau \mathbf{z}(\tau)\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right\} \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}}\right], \dots\right). \end{aligned} \quad (6.58)$$

Оператор сдвига можно вынести за скобки функции $F\left(t, q, \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \otimes \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}}, \dots\right)$, в силу его свойств, и переписать уравнение (6.58) в виде детерминированного уравнения

$$\frac{\partial Q(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = F\left(t, Q, \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \otimes \exp \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}}, \dots\right). \quad (6.59)$$

Таким образом для вариационной производной можно получить выражение

$$\frac{\delta q(\mathbf{x}, t)}{\delta z(\tau)} = \frac{\delta Q\left(\mathbf{x} - \int_0^t d\tau \mathbf{z}(\tau), t\right)}{\delta z(\tau)} = -\theta(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}q(\mathbf{x}, t), \quad (6.60)$$

т. е. для этого примера вариационные производные решения задачи (6.56) выражаются через пространственные производные.

В качестве конкретного примера рассмотрим уравнение Бюргерса со случайным сносом $\mathbf{z}(t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \left[(\mathbf{v} + \mathbf{z}(t))\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right]\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nu \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (6.61)$$

В этом случае его решение имеет вид

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \exp\left\{-\int_0^t d\tau \mathbf{z}(\tau)\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right\}\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}\left(\mathbf{x} - \int_0^t d\tau \mathbf{z}(\tau), t\right),$$

где функция $\mathbf{V}(x, t)$ описывается обычным уравнением Бюргерса

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \left(\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \nu \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}\mathbf{V}(\mathbf{x}, t). \quad (6.62)$$

Для этого примера вариационная производная описывается выражением

$$\frac{\delta}{\delta z_i(\tau)} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta}{\delta z_i(\tau)} \mathbf{V} \left(\mathbf{x} - \int_0^t d\tau z(\tau), t \right) = -\theta(t - \tau) \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (6.63)$$

Для таких задач различные статистические характеристики решения определяют непосредственно путем усреднения соответствующих выражений, построенных по решению последнего уравнения.

К сожалению, число уравнений, допускающих достаточно полный анализ, ограничено. В общем случае, для анализа динамических систем приходится прибегать к различным асимптотическим и приближенным методам. В физических исследованиях, часто используются и дают хорошие результаты методы, основанные на аппроксимации реальных случайных процессов и полей дельта-коррелированными во времени процессами и полями.

6.3. Дельта-коррелированные процессы и поля

Для дельта-коррелированного во времени случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, выполняется равенство (см. раздел 5.5 на с. 126)

$$\dot{\Theta}_t[t, t_0; \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)] \equiv \dot{\Theta}_t[t, t_0; \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)]$$

и ситуация существенно упрощается. В этом случае дельта-коррелированность поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ означает, что

$$\Theta[t, t_0; \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{y}_1 \dots \int d\mathbf{y}_n K_n^{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n; \tau) v_{i_1}(\mathbf{y}_1, \tau) \dots v_{i_n}(\mathbf{y}_n, \tau),$$

т. е. его кумулянтные функции имеют структуру

$$K_n^{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{y}_1, t_1; \dots; \mathbf{y}_n, t_n) = K_n^{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n; t_1) \delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_{n-1} - t_n).$$

Уравнения (6.7) на с. 137, и (6.9) принимают в этом случае вид замкнутых операторных уравнений для функций $P(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0)$ и $P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m)$ в силу равенства (6.3). Так вместо (6.7) получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = \dot{\Theta}_t \left[t, t_0; i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right] P(\mathbf{x}, t), \quad (6.64)$$

$$P(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

конкретный вид которого определяется видом функционала $\Theta[t, t_0; \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)]$, т. е. статистическим характером случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Соответственно, вместо (6.9) для m -временной плотности вероятностей получаем операторное уравнение ($t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m$)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_m} \mathbf{v}(\mathbf{x}_m, t_m) \right) P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \\ = \dot{\Theta}_{t_m} \left[t_m, t_0; i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_m} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_m) \right] P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m), \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_{m-1}) = \delta(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}),$$

Решение уравнения (6.65) можно искать в виде

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \quad (6.66)$$

Так как все дифференциальные операции в (6.65) относятся к t_m , \mathbf{x}_m , то подставляя (6.66) в (6.65), находим следующее уравнение для плотности вероятностей перехода:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \dot{\Theta}_t \left[t, t_0; i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right] p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), \quad (6.67)$$

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) |_{t \rightarrow t_0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Здесь мы обозначили переменные \mathbf{x}_m , t_m через \mathbf{x} , t и переменные \mathbf{x}_{m-1} , t_{m-1} через \mathbf{x}_0 , t_0 .

Применяя формулу (6.66) ($m-1$) раз, получаем соотношение

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) \dots p(\mathbf{x}_2, t_2 | \mathbf{x}_1, t_1) P(\mathbf{x}_1, t_1), \quad (6.68)$$

где $P(\mathbf{x}_1, t_1)$ — плотность вероятностей, определяемая уравнением (6.64) и относящаяся к одному моменту времени t_1 . Равенство (6.68) выражает многовременную плотность вероятностей через произведение плотностей вероятностей перехода и означает, что случайный процесс $\mathbf{x}(t)$ является марковским. Плотность вероятностей перехода, при этом

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x}(t | \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}) \rangle.$$

Конкретная модель флуктуаций параметров может существенно упростить полученные уравнения.

Так, например, для гауссова дельта-коррелированного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ корреляционный тензор имеет следующую структуру: ($\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$)

$$B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 2\delta(t - t') F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t).$$

Функционал $\Theta[t, t_0; \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)]$ в этом случае принимает вид

$$\Theta[t, t_0; \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)] = - \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{y}_1 \int d\mathbf{y}_2 F_{ij}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2; \tau) v_i(\mathbf{y}_1, \tau) v_j(\mathbf{y}_2, \tau)$$

и уравнение (6.64) переходит в уравнение Фоккера-Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)] \right) P(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t)], \quad (6.69)$$

где

$$A_k(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial}{\partial x'_l} F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) \right|_{\mathbf{x}' = \mathbf{x}}.$$

В виду особой важности случая гауссова дельта-коррелированного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ для физических приложений, это приближение, обычно называемое *приближением гауссова дельта-коррелированного поля* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, с других позиций будет более подробно рассмотрено в гл. 8. Рассмотрим несколько примеров конкретных стохастических уравнений.

6.3.1. Одномерное нелинейное дифференциальное уравнение

Рассмотрим одномерное стохастическое уравнение

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x, t) + z(t)g(x, t), \quad x(0) = x_0, \quad (6.70)$$

где $f(x, t)$ и $g(x, t)$ — детерминированные функции, а $z(t)$ — случайная функция времени. Для индикаторной функции $\varphi(x, t) = \delta(x(t) - x)$ имеем уравнение Лиувилля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) \varphi(x, t) = -z(t) \frac{\partial}{\partial x} \{g(x, t)\varphi(x, t)\}$$

и, следовательно, уравнение для одновременной плотности вероятностей $P(x, t)$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) P(x, t) = \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t, \frac{\delta}{i\delta z(\tau)} \right] \varphi(x, t) \right\rangle.$$

Для дельта-коррелированного случайного процесса $z(t)$ имеет место

$$\dot{\Theta}_t[t, v(\tau)] = \dot{\Theta}_t[t, v(t)]$$

и, учитывая равенство

$$\frac{\delta}{\delta z(t-0)} \varphi(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \{g(x, t)\varphi(x, t)\},$$

получаем замкнутое операторное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) P(x, t) = \dot{\Theta}_t \left[t, i \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \right] P(x, t). \quad (6.71)$$

Для гауссова дельта-коррелированного процесса

$$\Theta[t, v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t d\tau B(\tau) v^2(\tau), \quad (6.72)$$

и уравнение (6.71) принимает вид уравнения Фоккера–Планка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) P(x, t) = \frac{1}{2} B(t) \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) P(x, t). \quad (6.73)$$

Для пуассоновского дельта-коррелированного случайного процесса $z(t)$

$$\Theta[t, v(\tau)] = \nu \int_0^t d\tau \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi P(\xi) e^{i\xi v(\tau)} - 1 \right\}, \quad (6.74)$$

и уравнение (6.71) становится таковым:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) P(x, t) = \nu \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi P(\xi) e^{-\xi \frac{\partial}{\partial x} g(x, t)} - 1 \right\} P(x, t). \quad (6.75)$$

Пусть, например, $g(x, t) = 1$, т. е. уравнение (6.70) выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x, t) + z(t), \quad x(0) = x_0.$$

В этом случае оператор в правой части (6.75) является оператором сдвига и уравнение (6.75) принимает вид уравнения Колмогорова–Феллера:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) P(x, t) = \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi P(\xi) P(x - \xi, t) - \nu P(x, t).$$

Пусть теперь $g(x, t) = x$, т. е. уравнение (6.70) записывается в следующей форме:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x, t) + z(t)x(t), \quad x(0) = x_0.$$

Тогда уравнение (6.75) выглядит следующим образом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) P(x, t) = \nu \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi P(\xi) e^{-\xi \frac{\partial}{\partial x} x} - 1 \right\} P(x, t). \quad (6.76)$$

Вычислим действие оператора в правой части (6.76) в этом случае. Разложим этот оператор в ряд по ξ и рассмотрим действие каждого члена разложения

$$\left\{ e^{-\xi \frac{\partial}{\partial x} x} - 1 \right\} P(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} x \right)^n P(x, t).$$

Представляя x в виде $x = e^\varphi$, в эту формулу можно преобразовать следующим образом (то обстоятельство, что x — знакпеременная величина, несущественно):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} e^{-\varphi} \frac{\partial^n}{\partial \varphi^n} e^\varphi P(e^\varphi, t) = e^{-\varphi} \left\{ e^{-\xi \frac{\partial}{\partial \varphi}} - 1 \right\} e^\varphi P(e^\varphi, t) = e^{-\xi} P(e^{\varphi-\xi}, t) - P(e^\varphi, t).$$

Возвращаясь теперь к переменной x , можно представить уравнение (6.76) окончательно в виде интегро-дифференциального уравнения типа Колмогорова–Феллера:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) P(x, t) = \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi P(\xi) e^{-\xi} P(xe^{-\xi}, t) - \nu P(x, t).$$

6.3.2. Линейное операторное уравнение

Рассмотрим теперь в качестве примера случай линейных операторных стохастических уравнений

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \hat{A}(t)\mathbf{x}(t) + z(t)\hat{B}(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (6.77)$$

где $\hat{A}(t)$ и $\hat{B}(t)$ — детерминированные операторы, которые могут быть, например, операторами дифференцирования по вспомогательным переменным или обычными

матрицами. Функцию $z(t)$ будем считать случайной дельта-коррелированной функцией.

Усредним систему (6.77). Согласно общим формулам

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle = \hat{A}(t) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t, \frac{\delta}{i\delta z(t)} \right] \mathbf{x}(t) \right\rangle. \quad (6.78)$$

Учитывая теперь равенство

$$\frac{\delta}{\delta z(t-0)} \mathbf{x}(t) = \hat{B}(t) \mathbf{x}(t),$$

которое следует непосредственно из (6.77), уравнение (6.78) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle = \hat{A}(t) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \dot{\Theta}_t [t, -i\hat{B}] \langle \mathbf{x}(t) \rangle. \quad (6.79)$$

Таким образом, для линейной системы (6.77) уравнения для средних значений также являются линейными.

Логарифм характеристического функционала $\Theta[t; v(\tau)]$ для дельта-коррелированных процессов можно разложить в функциональный ряд Тейлора:

$$\Theta[t; v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t d\tau K_n(\tau) v^n(\tau), \quad (6.80)$$

где $K_n(t)$ определяют кумулянтные функции процесса $z(t)$. Подставляя выражение (6.80) в (6.79), получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle = \hat{A}(t) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} K_n(t) [\hat{B}(t)]^n \langle \mathbf{x}(t) \rangle. \quad (6.81)$$

Если теперь существует такая степень оператора $\hat{B}^l(t)$, что $\hat{B}^l(t) = 0$, то уравнение (6.81) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle = \hat{A}(t) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \sum_{n=1}^{l-1} \frac{1}{n!} K_n(t) [\hat{B}(t)]^n \langle \mathbf{x}(t) \rangle. \quad (6.82)$$

В этом случае в уравнение для среднего значения входит только часть кумулянтов процесса $z(t)$. Это означает, что если интересоваться только уравнением для среднего значения, то совсем не обязательно знать распределение вероятностей для функции $z(t)$; достаточно знать только определенные кумулянты процесса $z(t)$ и то обстоятельство, что процесс $z(t)$ можно рассматривать как дельта-коррелированный случайный процесс. Примером такой физической системы является задача статистического описания осциллятора с флуктуирующей частотой.

Задачи

Задача 6.1. Получить обратное уравнение для плотности вероятностей $P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) | \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x} \rangle$ исходя из обратного уравнения Лиувилля (3.8) на с. 75, описывающего эволюцию динамической системы (6.1) на с. 135 в зависимости от начальных условий \mathbf{x}_0, t_0 .

Решение.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \right) P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \left\langle \dot{\Theta}_{t_0} \left[t, t_0; \frac{\delta}{i\delta \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)} \right] \delta(\mathbf{x}(t) | \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x} \right\rangle,$$

где

$$\dot{\Theta}_{t_0}[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)] = \frac{d}{dt} \ln \Phi[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)],$$

а $\Phi[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)]$ — характеристический функционал для случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_0)$.

Задача 6.2. Получить уравнение для плотности вероятностей решения задачи, описывающей одномерную задачу о диффузии пассивной примеси

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + v(t) \frac{\partial}{\partial x} f(x) \rho(x, t) = 0, \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x),$$

где $v(t)$ — гауссов случайный стационарный процесс с параметрами

$$\langle v(t) \rangle = 0, \quad B_v(t-t') = \langle v(t)v(t') \rangle \quad (\sigma^2 = B_v(0) = \langle v^2(t) \rangle),$$

а $f(x)$ — детерминированная функция.

Указание. Усреднить уравнение Лиувилля (3.19) на с. 78 по ансамблю реализаций случайного процесса $v(t)$, которое можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t; \rho) = -v(t) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right\} \varphi(x, t; \rho), \\ \varphi(x, 0; \rho) = \delta(\rho_0(x) - \rho).$$

Воспользоваться формулой Фурутцу-Новикова (5.16) на с. 123 и учесть формулу (6.12) на с. 139, которая для данной задачи для функционала $\varphi[x, t; \rho; v(\tau)]$ записывается в виде

$$\frac{\delta}{\delta v(t')} \varphi[x, t; \rho; v(\tau)] = \frac{\partial \varphi(x, T(t), \rho)}{\partial T} \theta(t-t') = \\ = -\theta(t-t') \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right\} \varphi(x, t; \rho),$$

где новое "случайное" время $T[t, v(\tau)] = \int_0^t d\tau v(\tau)$, а $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t; \rho) &= \int_0^t d\tau B(\tau) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f(x) - \frac{df(x)}{dx} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ f(x) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{df(x)}{dx} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right\} P(x, t; \rho), \\ P(0, x; \rho) &= \delta(\rho_0(x) - \rho), \end{aligned}$$

которое можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t; \rho) &= \int_0^t dt' B(t') \left\{ \frac{\partial}{\partial x} f^2(x) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} f(x) \frac{df(x)}{dx} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \right. \\ &\quad \left. - \frac{df(x)}{dx} f(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) + \left[\frac{df(x)}{dx} \right]^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right\} P(x, t; \rho), \\ P(x, 0; \rho) &= \delta(\rho_0(x) - \rho). \end{aligned}$$

Замечание. Отметим, что если, например функция $f(x)$ имеет характерный масштаб изменения по $x - k^{-1}$ и является периодической функцией ("быстрое изменение"), то, дополнительно усредняя уравнение по этим масштабам (по x), получаем уравнение для "медленных" пространственных изменений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t; \rho) &= \int_0^t dt' B(t') \left\{ \overline{f^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left[\overline{\frac{df(x)}{dx}} \right]^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 \right\} P(x, t; \rho), \\ P(x, 0; \rho) &= \delta(\rho_0(x) - \rho). \end{aligned}$$

Если начальное условие не зависит от x , т. е. соответствует однородному состоянию ρ_0 , то и плотность вероятностей будет также не зависеть от x и описываться уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \rho) = \left[\overline{\frac{df(x)}{dx}} \right]^2 \int_0^t dt' B(t') \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t; \rho), \quad P(0; \rho) = \delta(\rho_0 - \rho).$$

Это уравнение соответствует плотности вероятностей логнормального случайного процесса. При $t \gg \tau_0$ это уравнение переходит в уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \rho) = D_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(t; \rho), \quad P(0; \rho) = \delta(\rho_0 - \rho), \quad (6.83)$$

где коэффициент диффузии в ρ -пространстве D_ρ

$$D_\rho = \left[\overline{\frac{df(x)}{dx}} \right]^2 \int_0^\infty dt' B(t') = \sigma^2 \tau_0 \left[\overline{\frac{df(x)}{dx}} \right]^2,$$

а τ_0 – временной радиус корреляции случайного процесса $v(t)$. Уравнение (6.83) можно также переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \rho) = D_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \rho P(t; \rho) + D_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \rho P(t; \rho), \quad P(0; \rho) = \delta(\rho_0 - \rho). \quad (6.84)$$

Свойства логарифмически нормального случайного процесса будут далее подробно рассматриваться в разделе 8.3.3 на стр. 183.

Задача 6.3. Получить уравнение для среднего поля, описываемого одномерным уравнением Бюргера со случайным сносом

$$\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) + (q + z(t)) \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x, t), \quad (6.85)$$

где $z(t)$ – гауссов стационарный во времени процесс с корреляционной функцией

$$B(t - t') = \langle z(t)z(t') \rangle.$$

Указание. При усреднении уравнения (6.85) следует воспользоваться формулой Фурутцу–Новикова

$$\langle z(t)q(x, t) \rangle = \int_0^t d\tau B(t - \tau) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(\tau)} q(x, t) \right\rangle,$$

и выражением

$$\begin{aligned} \langle q[z(\tau) + \eta_1(\tau)]q[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle &= \\ &= \exp \left\{ \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 B(\tau_1 - \tau_2) \frac{\delta^2}{\delta \eta_1(\tau_1) \delta \eta_2(\tau_2)} \right\} \langle q[z(\tau) + \eta_1(\tau)]q[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle, \end{aligned}$$

для расщепления корреляций (см. главу 5 и задачу 5.5 на с. 131), которые в силу (6.63), можно записать в виде

$$\langle z(t)q(x, t) \rangle = - \int_0^t d\tau B(\tau) \frac{\partial}{\partial x} \langle q(x, t) \rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle q^2(x, t) \rangle &= \exp \left\{ 2 \int_0^t d\tau (t - \tau) B(\tau) \frac{\partial^2}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} \right\} \langle q(x, t + \eta_1) \rangle \langle q(x, t + \eta_2) \rangle |_{\eta=0} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \left[\int_0^t d\tau (t - \tau) B(\tau) \right]^n \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} \langle q(x, t) \rangle \right]^2. \end{aligned}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle q(x, t) \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \left[\int_0^t d\tau (t - \tau) B(\tau) \right]^n \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} \langle q(x, t) \rangle \right]^2 = \\ = \left(\nu + \int_0^t d\tau B(\tau) \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle q(x, t) \rangle. \quad (6.86) \end{aligned}$$

Задача 6.4. Получить уравнение (6.86) для среднего поля, описываемого одномерным уравнением Бюргера со случайным сносом (6.85), исходя из равенства (6.57), где $z(t)$ – гауссов стационарный во времени процесс с корреляционной функцией

$$B(t - t') = \langle z(t)z(t') \rangle.$$

Указание. Воспользоваться равенством

$$\begin{aligned} \langle q(x, t) \rangle &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 B(\tau_1 - \tau_2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} Q(x, t) = \\ &= \exp \left\{ \int_0^t d\tau (t - \tau) B(\tau) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} Q(x, t). \end{aligned}$$

Задача 6.5. Получить уравнение для плотности вероятностей решения стохастического уравнения (1.32) на с. 30, описывающего стохастический параметрический резонанс, для дельта-коррелированного случайного процесса $z(t)$.

Указание. Переписать уравнение (1.32) в виде системы уравнений

$$\frac{d}{dt}x(t) = y(t), \quad \frac{d}{dt}y(t) = -\omega_0^2[1 + z(t)]x(t), \quad (6.87)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Решение.

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, y, t) = \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right) P(x, y, t) + \dot{\Theta}_t \left[t; -i\omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right] P(x, y, t), \quad (6.88)$$

$$P(x, y, 0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0),$$

где $\dot{\Theta}_t [t; v(\tau)] = \frac{d}{dt} \Theta [t; v(\tau)]$, $\Theta [t; v(\tau)] = \ln \Phi [t; v(\tau)]$, а $\Phi [t; v(\tau)]$ — характеристический функционал процесса $z(t)$.

Задача 6.6. Исходя из системы уравнений (6.87) получить уравнение для среднего значения величины

$$A_k(t) = x^k(t) y^{N-k}(t) \quad (k = 0, \dots, N)$$

для дельта-коррелированного случайного процесса $z(t)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle A_k(t) \rangle &= k \langle A_{k-1}(t) \rangle - \omega_0^2 (N - k) \langle A_{k+1}(t) \rangle + \\ &+ \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} K_n [B^n]_{kl} \langle A_l(t) \rangle \quad (k = 0, \dots, N), \end{aligned}$$

где K_n — кумулянты случайного процесса $z(t)$, а матрица $B_{ij} = -\omega_0^2 (N - i) \delta_{i,j-1}$. Для нее $B_{ij}^2 = -\omega_0^4 (N - i)(N - j + i) \delta_{i,j-2}$ и т. д., и, следовательно, $B^{N+1} \equiv 0$.

Задача 6.7. Получить уравнение Фоккера–Планка для системы уравнений (6.87) для гауссова стационарного дельта-коррелированного процесса $z(t)$ с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2\sigma^2 \tau_0 \delta(t - t').$$

Решение.

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, y, t) = \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right) P(x, y, t) + D\omega_0^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(x, y, t), \quad (6.89)$$

$$P(x, y, 0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0),$$

где $D = \sigma^2 \tau_0 \omega_0^2$ — коэффициент диффузии в пространстве $\{x, y/\omega_0\}$.

Задача 6.8. Получить решение для моментов первого и второго порядка, вытекающие из (6.89) при $D/\omega_0 \ll 1$ и $x(0) = 0$, $y(0) = \omega_0$.

Решение.

$$\langle x(t) \rangle = \sin \omega_0 t, \quad \langle y(t) \rangle = \omega_0 \cos \omega_0 t,$$

что совпадает с решением системы (6.87) в случае отсутствия флуктуаций, а

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \left\{ e^{Dt} - e^{-Dt/2} \left[\cos(2\omega_0 t) + \frac{3D}{4\omega_0} \sin(2\omega_0 t) \right] \right\},$$

$$\langle x(t)y(t) \rangle = \frac{\omega_0}{4} \left\{ 2e^{-Dt/2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{D}{\omega_0} \left[e^{Dt} - e^{-Dt/2} \cos(2\omega_0 t) \right] \right\}, \quad (6.90)$$

$$\langle y^2(t) \rangle = \frac{\omega_0^2}{2} \left\{ e^{Dt} + e^{-Dt/2} \left[\cos(2\omega_0 t) - \frac{D}{4\omega_0} \sin(2\omega_0 t) \right] \right\}$$

Замечание. Решение (6.90) содержит растущие со временем члены, что соответствует статистической параметрической раскачке динамической системы (6.87) за счет флуктуации частоты. Решение статистической задачи (6.87) имеет два характерных масштаба изменения времени $t_1 \sim 1/\omega_0$ и $t_2 \sim 1/D$. Первый временной масштаб соответствует периоду колебаний системы (6.87) в случае отсутствия флуктуаций («быстрые процессы»), а второй связан с появлением медленных изменений статистических характеристик, обусловленных наличием флуктуаций («медленные процессы»). Для получения медленных изменений статистических характеристик процессов $x(t)$ и $y(t)$ можно исключить быстрые движения, усредняя соответствующие величины по времени, связанному с периодом быстрых движений ($T = 2\pi/\omega_0$). Обозначая такое усреднение горизонтальной чертой, имеем, например,

$$\overline{\langle x^2(t) \rangle} = \frac{1}{2} \exp \{Dt\}, \quad \overline{\langle x(t)y(t) \rangle} = 0, \quad \overline{\langle y^2(t) \rangle} = \frac{\omega_0^2}{2} \exp \{Dt\}.$$

Задача 6.9. Исходя из (6.89) получить уравнение третьего порядка для величины $\langle U(t) \rangle = \langle x^2(t) \rangle$, описывающей среднюю потенциальную энергию осциллятора.

Решение.

$$\frac{d^3}{dt^3} \langle U(t) \rangle + 4\omega_0^2 \frac{d}{dt} \langle U(t) \rangle - 4D\omega_0^2 \langle U(t) \rangle = 0, \quad (6.91)$$

Задача 6.10. Получить уравнение Фоккера–Планка для стохастического осциллятора с линейным трением, т. е. для стохастической системы вида

$$\frac{d}{dt}x(t) = y(t), \quad \frac{d}{dt}y(t) = -2\gamma y(t) - \omega_0^2[1 + z(t)]x(t), \quad (6.92)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0,$$

и условие стохастического возбуждения для вторых моментов.

Решение.

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, y, t) = \left(2\gamma \frac{\partial}{\partial y}y - y \frac{\partial}{\partial x} + \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y}\right)P(x, y, t) + D\omega_0^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}P(x, y, t),$$

$$P(x, y, 0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0),$$

где $D = \sigma^2\tau_0\omega_0^2$ — коэффициент диффузии. Если искать решение системы уравнений для вторых моментов в виде пропорциональном $\exp\{\lambda t\}$, то характеристическое уравнение для λ имеет вид

$$\lambda^3 + 6\gamma\lambda^2 + 4(\omega_0^2 + 2\gamma^2)\lambda + 4\omega_0^2(2\gamma - D) = 0$$

и при условии

$$2\gamma < D \quad (6.93)$$

вторые моменты экспоненциально растут во времени, т. е. имеет место статистическое параметрическое возбуждение вторых моментов.

Задача 6.11. Получить стационарные значения вторых моментов для стохастического параметрического осциллятора с трением, устанавливающиеся под действием случайных сил:

$$\frac{d}{dt}x(t) = y(t), \quad x(0) = x_0, \quad (6.94)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -2\gamma y(t) - \omega_0^2[1 + z(t)]x(t) + f(t), \quad y(0) = y_0.$$

Здесь $f(t)$ — гауссов, статистически независимый от процесса $z(t)$, дельта-коррелированный процесс с параметрами

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle = 2\sigma_f^2\tau_f\delta(t - t'),$$

где σ_f^2 — дисперсия, а τ_f — его временной радиус корреляции.

Решение. Для стохастической системы уравнений (6.94) одновременная плотность вероятностей описывается уравнением Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, y, t) = \left(2\gamma \frac{\partial}{\partial y}y - y \frac{\partial}{\partial x} + \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y}\right)P(x, y, t) + D\omega_0^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}P(x, y, t) + \sigma_f^2\tau_f \frac{\partial^2}{\partial y^2}P(x, y, t),$$

$$P(x, y, 0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0),$$

и, следовательно, стационарное решение для вторых моментов при $t \rightarrow \infty$ существует при выполнении неравенства (6.93)

$$\langle x(t) \rangle = 0, \quad \langle y(t) \rangle = 0,$$

$$\langle x(t)y(t) \rangle = 0, \quad \langle x^2(t) \rangle = \frac{\sigma_f^2\tau_f}{\omega_0^2(D - 2\gamma)}, \quad \langle y^2(t) \rangle = \frac{\sigma_f^2\tau_f}{D - 2\gamma}.$$

Задача 6.12. Из уравнения (6.88) получить уравнение Колмогорова–Феллера для пуассоновского дельта-коррелированного случайного процесса $z(t)$.

Решение.

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, y, t) = \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y}\right)P(x, y, t) + \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi)P(x, y + \xi\omega_0^2 x, t) - \nu P(x, y, t). \quad (6.95)$$

Замечание. Для достаточно малых значений параметра ξ уравнение (6.95) переходит в уравнение Фоккера–Планка (6.89) с коэффициентом диффузии

$$D = \frac{1}{2}\nu \langle \xi^2 \rangle \omega_0^2 x.$$

Задача 6.13. Получить уравнение для характеристического функционала решения линейного параболического уравнения (1.91), page 48.

Решение. Усредняя уравнение (3.48) на с. 84 для функционала $\varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')]$, получаем уравнение для характеристического функционала решения задачи

$$\Phi[x; v, v^*] = \langle \varphi[x; v, v^*] \rangle,$$

где

$$\varphi[x; v, v^*] = \exp \left\{ i \int d\mathbf{R}' [u(x, \mathbf{R}')v(\mathbf{R}') + u^*(x, \mathbf{R}')v^*(\mathbf{R}')] \right\}$$

вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi[x; v, v^*] = \left\langle \dot{\Theta}_x \left[x; \frac{\delta}{i\delta\varepsilon(\xi, \mathbf{R}')} \right] \varphi[x; v, v^*] \right\rangle + \frac{i}{2k} \left\{ \int d\mathbf{R}' \left[v(\mathbf{R}')\Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}')\Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')} \right] \right\} \Phi[x; v, v^*], \quad (6.96)$$

где

$$\dot{\Theta}_x [x; \psi(\xi, \mathbf{R}')] = \frac{d}{dx} \ln \left\langle \exp \left\{ i \int_0^x d\xi \int d\mathbf{R}' \varepsilon(\xi, \mathbf{R}') \psi(\xi, \mathbf{R}') \right\} \right\rangle$$

— производная от логарифма характеристического функционала случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

Задача 6.14. Исходя из уравнения (6.96) получить уравнение для характеристического функционала решения линейного параболического уравнения (1.91) на с. 48 для однородного дельта-коррелированного по x случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

Решение. Характеристический функционал решения задачи $\Phi[x; v, v^*]$ описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi[x; v, v^*] &= \dot{\Theta}_x \left[x, \frac{k}{2} \widehat{M}(\mathbf{R}') \right] \Phi[x; v, v^*] + \\ &+ \frac{i}{2k} \left\{ \int d\mathbf{R}' \left[v(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')} \right] \right\} \Phi[x; v, v^*] \end{aligned} \quad (6.97)$$

с эрмитовым оператором

$$\widehat{M}(\mathbf{R}') = v(\mathbf{R}') \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')},$$

а функционал

$$\dot{\Theta}_x [x; \psi(\xi, \mathbf{R}')] = \frac{d}{dx} \ln \left\langle \exp \left\{ i \int_0^x d\xi \int d\mathbf{R}' \varepsilon(\xi, \mathbf{R}') \psi(\xi, \mathbf{R}') \right\} \right\rangle$$

— производная от логарифма характеристического функционала поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

Замечание. Из уравнения (6.97) следуют уравнения для моментных функций поля $u(x, \mathbf{R})$

$$M_{m,n}(x; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) = \langle u(x, \mathbf{R}_1) \dots u(x, \mathbf{R}_m) u^*(x, \mathbf{R}'_1) \dots u^*(x, \mathbf{R}'_n) \rangle,$$

которые для $m = n$ обычно называются функциями когерентности порядка $2n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} M_{m,n} &= \frac{i}{2k} \left(\sum_{p=1}^m \Delta_{\mathbf{R}_p} - \sum_{q=1}^n \Delta_{\mathbf{R}'_q} \right) M_{m,n} + \\ &+ \dot{\Theta}_x \left[x, \frac{1}{k} \left(\sum_{p=1}^m \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}_p) - \sum_{q=1}^n \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}'_q) \right) \right] M_{m,n}. \end{aligned} \quad (6.98)$$

Задача 6.15. Исходя из решения предыдущей задачи получить уравнение для характеристического функционала волнового поля $u(x, \mathbf{R})$ и моментных функций решения линейного параболического уравнения (1.91) на с. 48 для однородного гауссова дельта-коррелированного по x случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ [51] с корреляционной функцией

$$B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) = A(\mathbf{R}) \delta(x), \quad A(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx B_\varepsilon(x, \mathbf{R}).$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi[x; v, v^*] &= -\frac{k^2}{8} \int d\mathbf{R}' \int d\mathbf{R} A(\mathbf{R}' - \mathbf{R}) \widehat{M}(\mathbf{R}') \widehat{M}(\mathbf{R}) \Phi[x; v, v^*] + \\ &+ \frac{i}{2k} \int d\mathbf{R}' \left[v(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')} \right] \Phi[x; v, v^*], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} M_{m,n} = \frac{i}{2k} \left(\sum_{p=1}^m \Delta_{\mathbf{R}_p} - \sum_{q=1}^n \Delta_{\mathbf{R}'_q} \right) M_{m,n} - \frac{k^2}{8} Q(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_m) M_{m,n},$$

где

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_m) &= \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}'_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A(\mathbf{R}'_i - \mathbf{R}'_j). \end{aligned}$$

Задача 6.16. Получить уравнение для одновременного характеристического функционала решения стохастического нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.105) на с. 53.

Решение. Для характеристического функционала поля скорости

$$\Phi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] = \Phi[t; \mathbf{z}] = \langle \varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] \rangle,$$

где

$$\varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] = \exp \left\{ i \int d\mathbf{k}' \widehat{u}(\mathbf{k}', t) \mathbf{z}(\mathbf{k}') \right\}$$

имеем незамкнутое уравнение с вариационными производными

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi[t; \mathbf{z}] &= \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \left\{ -\frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_{i,\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{\delta^2}{\delta z_\alpha(\mathbf{k}_1) \delta z_\beta(\mathbf{k}_2)} - \right. \\ &\left. - \nu k^2 \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k})} \Phi[t; \mathbf{z}] \right\} + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t; \frac{\delta}{i \delta \mathbf{f}(\kappa, \tau)} \right] \varphi[t; \mathbf{z}] \right\rangle, \end{aligned}$$

где

$$\dot{\Theta}_t [t; \psi(\kappa, \tau)] = \frac{d}{dt} \ln \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \int d\mathbf{k} \mathbf{f}(\kappa, \tau) \psi(\kappa, \tau) \right\} \right\rangle$$

— производная от логарифма характеристического функционала случайного поля внешних сил $\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$.

Задача 6.17. Получить уравнение для одновременного характеристического функционала решения стохастического нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.105) на с. 53 в предположении однородности, стационарности и дельта-коррелированности случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ по времени. Рассмотреть случай гауссова поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ [1].

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi[t; \mathbf{z}] &= \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \left\{ -\frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_{i,\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{\delta^2}{\delta z_\alpha(\mathbf{k}_1) \delta z_\beta(\mathbf{k}_2)} - \right. \\ &\left. - \nu k^2 \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k})} \right\} \Phi[t; \mathbf{z}] + \dot{\Theta}_t [t; \mathbf{z}(\mathbf{k})] \Phi[t; \mathbf{z}], \end{aligned} \quad (6.99)$$

где

$$\dot{\Theta}_t [t; \psi(\kappa, \tau)] = \frac{d}{dt} \ln \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \int d\mathbf{k} \hat{\mathbf{f}}(\kappa, \tau) \psi(\kappa, \tau) \right\} \right\rangle$$

— производная от логарифма характеристического функционала случайного поля внешних сил $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$.

Если теперь считать случайное поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ гауссовым, однородным, изотропным и стационарным во времени случайным полем с корреляционным тензором

$$B_{ij}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2) = \langle f_i(\mathbf{x}_1, t_1) f_j(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle,$$

то поле $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$ — также гауссово стационарное случайное поле с корреляционным тензором

$$\langle \hat{f}_i(\mathbf{k}, t + \tau) \hat{f}_j(\mathbf{k}', t) \rangle = \frac{1}{2} F_{ij}(\mathbf{k}, \tau) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'),$$

где $F_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = 2(2\pi)^3 \int d\mathbf{x} B_{ij}(\mathbf{x}, \tau) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}$. При этом, в силу пространственной изотропности,

$$F_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = F(k, \tau) \Delta_{ij}(\mathbf{k}).$$

Для дельта-коррелированного во времени случайного поля $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$ функция

$$F(k, \tau) = F(k) \delta(\tau),$$

и, следовательно, функционал

$$\Theta [t; \psi(\kappa, \tau)] = -\frac{1}{4} \int_0^t d\tau \int d\kappa F(\kappa) \Delta_{ij}(\kappa) \psi_i(\kappa, \tau) \psi_j(-\kappa, \tau),$$

а уравнение (6.99), принимает вид замкнутого уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi [t; \mathbf{z}] &= -\frac{1}{4} \int d\mathbf{k} F(k) \Delta_{ij}(\mathbf{k}) z_i(\mathbf{k}) z_j(-\mathbf{k}) \Phi [t; \mathbf{z}] - \\ &- \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \left\{ \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_{i,\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{\delta^2}{\delta z_\alpha(\mathbf{k}_1) \delta z_\beta(\mathbf{k}_2)} + \nu k^2 \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k})} \right\} \Phi [t; \mathbf{z}]. \end{aligned}$$

Задача 6.18. Усреднить линейное стохастическое интегральное уравнение для случайного поля $f(\mathbf{r})$

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) [\eta(\mathbf{r}_2) + f(\mathbf{r}_2)] S(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'),$$

Решение.

$$\begin{aligned} G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \eta(\mathbf{r})] &= S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \eta(\mathbf{r}_2) G[\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'; \eta(\mathbf{r})] + \\ &+ \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \Omega_{\mathbf{r}_2} \left[\frac{\delta}{i\delta\eta(\mathbf{r})} \right] G[\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'; \eta(\mathbf{r})]. \end{aligned}$$

Здесь через функционал $G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \eta(\mathbf{r})]$ обозначена величина

$$G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \eta(\mathbf{r})] = \langle S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f(\mathbf{r}) + \eta(\mathbf{r})] \rangle,$$

а функционалы

$$\Omega_{\mathbf{r}} [v(\mathbf{r})] = \frac{\delta}{i\delta v(\mathbf{r})} \Theta [v(\mathbf{r})], \quad \Theta [v(\mathbf{r})] = \ln \left\langle \exp \left\{ i \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) \right\} \right\rangle.$$

Задача 6.19. Получить уравнение для характеристического функционала пространственно-временной гармоники турбулентного поля скоростей (1.106) на с. 54 в предположении гауссовости, однородности в пространстве и стационарности во времени поля случайных внешних сил $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ [52].

Решение. Для характеристического функционала поля скоростей

$$\Phi[\mathbf{z}] = \left\langle \exp \left\{ i \int d^4 \mathbf{K}' \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{K}') \mathbf{z}(\mathbf{K}') \right\} \right\rangle$$

и функционала

$$G_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] = \left\langle \frac{\delta u_i(\mathbf{K})}{\delta \hat{f}_j(\mathbf{K}')} \varphi[\mathbf{z}] \right\rangle$$

имеем замкнутую систему функциональных уравнений

$$\begin{aligned} (i\omega + \nu \mathbf{k}^2) \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{K})} \Phi[\mathbf{z}] &= -\frac{1}{2} F_{ij}(\mathbf{K}) \int d^4 \mathbf{K}_1 z_\alpha(\mathbf{K}_1) G_{\alpha j}[\mathbf{K}_1, -\mathbf{K}; \mathbf{z}] - \\ &- \frac{1}{2} \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \frac{\delta^2 \Phi[\mathbf{z}]}{\delta z_\alpha(\mathbf{K}_1) \delta z_\beta(\mathbf{K}_2)}, \\ (i\omega + \nu \mathbf{k}^2) G_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] &+ \\ &+ \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \frac{\delta}{\delta z_\alpha(\mathbf{K}_1)} G_{\beta j}[\mathbf{K}_2, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] = \delta_{ij} \delta^4(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \Phi[\mathbf{z}], \end{aligned}$$

где $\langle \hat{f}_i(\mathbf{K}_1) \hat{f}_j(\mathbf{K}_2) \rangle = \frac{1}{2} \delta^4(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) F_{ij}(\mathbf{K}_1)$, and $F_{ij}(\mathbf{K})$ — пространственно-временной спектр внешних сил.

Замечание. Разложение по $\mathbf{z}(\mathbf{K})$ в функциональные ряды Тейлора функционалов $\Phi[\mathbf{z}]$ и $G_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}]$ определяют соответственно кумулянты поля скорости и корреляции аналога функции Грина $S_{ij}(\mathbf{K}, \mathbf{K}') = \delta u_i(\mathbf{K}) / \delta f_j(\mathbf{K}')$ с полем скорости.

7.1. Телеграфный случайный процесс

Напомним, что телеграфный случайный процесс $z(t)$ (процесс с двумя состояниями) определяется с помощью равенства

$$z(t) = a(-1)^{n(0,t)},$$

где случайная величина a с вероятностями $1/2$ принимает значения $a = \pm a_0$, а $n(t_1, t_2)$ ($t_1 < t_2$), — целочисленный пуассоновский случайный процесс со средним значением $n(t_1, t_2) = \nu|t_1 - t_2|$.

Телеграфный процесс $z(t)$ стационарен во времени и его корреляционная функция

$$\langle z(t)z(t') \rangle = a_0^2 e^{-2\nu|t-t'|}$$

имеет временной корреляционный радиус $\tau_0 = 1/(2\nu)$.

Для расщепления корреляции телеграфного процесса $z(t)$ с произвольным функционалом от него $R[t; z(\tau)]$, где $\tau \leq t$, было получено соотношение (5.26) на с. 125

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = a_0^2 \int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t-t_1)} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \tilde{R}[t, t_1; z(\tau)] \right\rangle, \quad (7.2)$$

где функционал $\tilde{R}[t, t_1; z(\tau)]$ определяется формулой

$$\tilde{R}[t, t_1; z(\tau)] = R[t; z(\tau)\theta(t_1 - \tau + 0)] \quad (t_1 < t). \quad (7.3)$$

Формулу (7.2) можно использовать для анализа стохастических уравнений, содержащих процесс $z(t)$ линейным образом. Пусть функционал $R[t; z(\tau)]$ — решение некоей системы дифференциальных уравнений первого порядка по времени с начальными условиями при $t = 0$. Тогда функционал $\tilde{R}[t, t_1; z(\tau)]$ будет описываться той же системой уравнений, где вместо процесса $z(t)$ будет стоять величина $z(t)\theta(t_1 - t)$. Следовательно, для времен $t > t_1$ функционал $\tilde{R}[t, t_1; z(\tau)] = R[t; 0]$ и описывается этой же системой уравнений при отсутствии флуктуаций, т. е. при $z(t) = 0$, с начальным условием $\tilde{R}[t_1, t_1; z(\tau)] = R[t_1; z(\tau)]$.

Для стохастических уравнений, содержащих случайный телеграфный процесс $z(t)$ линейным образом, удобно использовать также формулу дифференцирования (5.27) на с. 125 для корреляции его с произвольным функционалом при условии ($\tau \leq t$):

$$\frac{d}{dt} \langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = -2\nu \langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle + \left\langle z(t) \frac{d}{dt} R[t; z(\tau)] \right\rangle. \quad (7.4)$$

Формула (7.4) также определяет правило вынесения операции дифференцирования из под знака усреднения:

$$\left\langle z(t) \frac{d^n}{dt^n} R[t; z(\tau)] \right\rangle = \left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right)^n \langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle. \quad (7.5)$$

Продемонстрируем на конкретных примерах как эти соотношения можно практически использовать. При этом оба указанных метода приводят, естественно, к одному

О черк 7

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С МАРКОВСКИМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРОВ

Выше мы рассмотрели общие методы статистического описания динамических систем, основанные на знании характеристического функционала флуктуирующих параметров. Однако, в большинстве случаев мы можем и не знать его и в этих случаях приходится прибегать как к различным моделям флуктуирующих параметров, так и различным асимптотическим приближениям.

Широко распространен метод, основанный на аппроксимации флуктуирующих параметров марковскими случайными процессами и полями с конечным временным радиусом корреляции. Они могут быть получены, например, как решения динамических уравнений с дельта-коррелированными флуктуациями параметров (см. предыдущий Очерк). Рассмотрим такие методы описания более подробно на примере марковских случайных процессов.

Рассмотрим стохастические уравнения вида

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = f(\mathbf{x}, t, \mathbf{z}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (7.1)$$

где $f(\mathbf{x}, t, \mathbf{z}(t))$ — детерминированная функция своих аргументов, а

$$\mathbf{z}(t) = \{z_1(t), \dots, z_n(t)\}$$

— векторный марковский процесс.

Наша задача заключается в нахождении статистических характеристик решения уравнения (7.1), если мы знаем статистические характеристики процесса $\mathbf{z}(t)$.

В общем случае произвольного марковского процесса $\mathbf{z}(t)$ сказать что-либо о самом процессе $\mathbf{x}(t)$ не представляется возможным. Можно лишь утверждать, что совокупность двух процессов $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)\}$ является марковской с совместной плотностью вероятностей $P(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)$.

Если бы нам удалось решить уравнение для функции $P(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)$, то, интегрируя его решение по \mathbf{z} , мы бы получили плотность вероятностей решения уравнения (7.1), т. е. функцию $P(\mathbf{x}, t)$. В этом случае процесс $\mathbf{x}(t)$ уже не будет марковским.

Существует, однако, несколько типов процессов $\mathbf{z}(t)$, для которых удается перейти непосредственно к уравнению для $P(\mathbf{x}, t)$ не решая уравнения для $P(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)$. Это прежде всего процессы телеграфного типа (телеграфный и обобщенный телеграфный процессы), марковские процессы с конечным числом состояний и гауссов марковский процесс. В качестве примеров мы рассмотрим применение телеграфного и гауссова марковского процессов, как наиболее часто используемых, в различных приложениях.

и тому же результату. Однако, метод, основанный на формуле дифференцирования оказывается практически более удобным.

Рассмотрим систему линейных операторных уравнений

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \hat{A}(t)\mathbf{x}(t) + z(t)\hat{B}(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (7.6)$$

где $\hat{A}(t)$ и $\hat{B}(t)$ — некие детерминированные операторы, которые могут быть и операторами дифференцирования по вспомогательным переменным. Если операторы $\hat{A}(t)$ и $\hat{B}(t)$ — просто матрицы, то (7.6) описывают простейший случай линейных динамических систем.

Усредним уравнение (7.6) по ансамблю случайных функций $z(t)$. В результате получим уравнение

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \hat{A}(t)\langle \mathbf{x}(t) \rangle + \hat{B}(t)\psi(t), \quad \langle \mathbf{x}(0) \rangle = \mathbf{x}_0, \quad (7.7)$$

где введены новые функции $\psi(t) = \langle z(t)\mathbf{x}(t) \rangle$. Для этих функций в силу формулы (7.4) получаем равенство

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -2\nu\psi(t) + \left\langle z(t)\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) \right\rangle. \quad (7.8)$$

Подставляя теперь $d\mathbf{x}/dt$ из (7.6) в (7.8) получаем уравнение для функций $\psi(t)$

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \psi(t) = \hat{A}(t)\psi(t) + \hat{B} \left\langle z^2(t)\mathbf{x}(t) \right\rangle. \quad (7.9)$$

Далее учтем, что для телеграфного процесса $z^2(t) \equiv a_0^2$, и, следовательно, окончательно приходим к замкнутой системе линейных уравнений для векторов $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$ и $\psi(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle \mathbf{x}(t) \rangle &= \hat{A}(t)\langle \mathbf{x}(t) \rangle + \hat{B}(t)\psi(t), \quad \langle \mathbf{x}(0) \rangle = \mathbf{x}_0, \\ \left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \psi(t) &= \hat{A}(t)\psi(t) + a_0^2\hat{B}(t)\langle \mathbf{x}(t) \rangle, \quad \psi(0) = (0). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Если операторы $\hat{A}(t)$ и $\hat{B}(t)$ — матрицы A и B , не зависящие от времени, то система (7.10) может быть решена с помощью преобразования Лапласа и преобразованная по Лапласу система (7.10) является алгебраической системой уравнений

$$(pE - A)\langle \mathbf{x} \rangle_p - B\psi_p = \mathbf{x}_0, \quad (7.11)$$

$$[(p + 2\nu)E - A]\psi_p - a_0^2B\langle \mathbf{x} \rangle_p = 0,$$

где E — единичная матрица. Отсюда получаем решение $\langle \mathbf{x} \rangle_p$ в виде

$$\langle \mathbf{x} \rangle_p = \left[(pE - A) - a_0^2B \frac{1}{(p + 2\nu)E - A} B \right]^{-1} \mathbf{x}_0. \quad (7.12)$$

Отметим, что если интересоваться только одной компонентой уравнения (7.6), то для нее можно получить операторное уравнение

$$\hat{L} \left(\frac{d}{dt} \right) x(t) + \sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}(t) \frac{d^i}{dt^i} z(t) \frac{d^j}{dt^j} x(t) = f(t), \quad (7.13)$$

где оператор $\hat{L} \left(\frac{d}{dt} \right) = \sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^i}{dt^i}$, n — порядок матриц A и B в (7.6). Начальные условия для величины \mathbf{x} включены с помощью соответствующих производных дельта-функции в функцию $f(t)$. Отметим, что при этом функция $f(t)$ может зависеть и от значений производных случайного процесса $z(t)$ при $t = 0$, т. е. $f(t)$ — тоже случайная функция, статистически связанная с процессом $z(t)$.

Усредняя уравнение (7.13) по ансамблю реализаций процесса $z(t)$ с использованием формулы (7.5), получаем уравнение

$$\hat{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \langle x(t) \rangle + M \left[\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt} + 2\nu \right] \langle z(t)x(t) \rangle = \langle f(t) \rangle, \quad (7.14)$$

где введено обозначение

$$M[p, q] = \sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}(t) p^i q^j.$$

Уравнение (7.14), однако, не замкнуто из-за наличия в нем функции $\langle z(t)x(t) \rangle$. Далее умножим уравнение (7.13) на $z(t)$ и опять усредним. В результате для функции $\langle z(t)x(t) \rangle$ получаем уравнение

$$\hat{L} \left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \langle z(t)x(t) \rangle + a_0^2 M \left[\frac{d}{dt} + 2\nu, \frac{d}{dt} \right] \langle x(t) \rangle = \langle z(t)f(t) \rangle. \quad (7.15)$$

Система уравнений (7.14), (7.15) — уже замкнутая система уравнений и, для не зависящих от времени функций $a_i(t)$, $b_{ij}(t)$, может быть решена с помощью преобразования Лапласа. В результате получаем выражение [53]

$$\langle x(p) \rangle = \frac{\hat{L}(p + 2\nu) \langle f(p) \rangle - M[p, p + 2\nu] \langle z(t)f(t) \rangle_p}{\hat{L}(p)\hat{L}(p + 2\nu) - a_0^2 M[p + 2\nu, p]M[p, p + 2\nu]}. \quad (7.16)$$

Рассмотрим теперь пример, связанный с гауссовым марковским процессом.

7.2. Гауссов марковский случайный процесс

Определим случайный процесс $z(t)$ по формуле

$$z(t) = z_1(t) + \dots + z_N(t), \quad (7.17)$$

где $z_i(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы с корреляционными функциями

$$\langle z_i(t)z_j(t') \rangle = \delta_{ij} \langle z^2 \rangle \exp \{ -\alpha |t - t'| \} \quad (\alpha = 2\nu).$$

Если теперь положить $\langle z^2 \rangle = \sigma^2/N$, то при $N \rightarrow \infty$ этот процесс переходит в гауссов марковский процесс с корреляционной функцией (см. замечание на с. 174)

$$\langle z(t)z(t') \rangle = \sigma^2 e^{-\alpha|t-t'|}.$$

Таким образом процесс $z(t)$ (7.17) является аппроксимацией гауссова марковского процесса марковским процессом с конечным числом состояний.

Для процесса $z(t)$ формула дифференцирования и правило вынесение производной из под знака производной, очевидно, принимают вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \alpha k \right) \langle z_1(t) \dots z_k(t) R[t; z(\tau)] \rangle &= \left\langle z_1(t) \dots z_k(t) \frac{d}{dt} R[t; z(\tau)] \right\rangle, \\ \left\langle z_1(t) \dots z_k(t) \frac{d^n}{dt^n} R[t; z(\tau)] \right\rangle &= \left(\frac{d}{dt} + \alpha k \right)^n \langle z_1(t) \dots z_k(t) R[t; z(\tau)] \rangle, \end{aligned} \quad (7.18)$$

где через $R[t; z(\tau)]$ обозначен произвольный функционал процесса $z(t)$ ($\tau \leq t$).

Рассмотрим опять уравнение (7.6) на с. 170, которое перепишем в виде

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \hat{A}(t) \mathbf{x}(t) + [z_1(t) + \dots + z_N(t)] \hat{B}(t) \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (7.19)$$

Введем вектор-функцию

$$\mathbf{X}_k(t) = \langle z_1(t) \dots z_k(t) \mathbf{x}(t) \rangle, \quad k = 1, \dots, N; \quad \mathbf{X}_0(t) = \langle \mathbf{x}(t) \rangle. \quad (7.20)$$

Используя формулу (7.18) для дифференцирования корреляций (7.20) и само уравнение (7.19), получаем рекуррентное уравнение для $\mathbf{x}_k(t)$ вида ($k = 0, 1, \dots, N$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{X}_k(t) &= \hat{A}(t) \mathbf{X}_k(t) + \langle z_1(t) \dots z_k(t) [z_1(t) + \dots + z_N(t)] \hat{B}(t) \mathbf{x}(t) \rangle = \\ &= \hat{A}(t) \mathbf{X}_k(t) + k \langle z^2 \rangle \hat{B}(t) \mathbf{X}_{k-1}(t) + (N - k) \hat{B}(t) \mathbf{X}_{k+1}(t), \end{aligned} \quad (7.21)$$

с начальным условием

$$\mathbf{X}_k(0) = \mathbf{x}_0 \delta_{k,0}.$$

Таким образом, среднее значение решения системы (7.19) удовлетворяет замкнутой системе $(N + 1)$ векторных уравнений. Если операторы $\hat{A}(t)$, $\hat{B}(t)$ — матрицы, не зависящие от времени, то система уравнений (7.21) может быть легко решена с помощью преобразование Лапласа. Очевидно, что ее решение имеет вид конечного отрезка цепной дроби. Если теперь принять значение $\langle z^2 \rangle = \sigma^2/N$ и перейти к пределу $N \rightarrow \infty$, то, как говорилось выше, случайный процесс $z(t) = z_1(t) + \dots + z_N(t)$ перейдет в гауссов марковский процесс, а решение системы уравнений (7.21) запишется в виде бесконечной цепной дроби.

Задачи

Задача 7.1. Получить среднее значение потенциальной энергии стохастического осциллятора, описываемой стохастическим уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dt^3} U(t) + 4\omega_0^2 \frac{d}{dt} U(t) + 2\omega_0^2 \left(z(t) \frac{d}{dt} U(t) + \frac{d}{dt} z(t) U(t) \right) &= 0, \\ x(0) = 0, \quad \frac{d}{dt} U(t) \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2} U(t) \Big|_{t=0} &= 2y_0^2 \end{aligned}$$

для телеграфного случайного процесса $z(t)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dt^3} \langle U(t) \rangle + 4\omega_0^2 \frac{d}{dt} \langle U(t) \rangle + 4\omega_0^2 \left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \langle z(t) U(t) \rangle &= 0, \\ \left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right)^3 \langle z(t) U(t) \rangle + 4\omega_0^2 \left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \langle z(t) U(t) \rangle + 4\omega_0^2 a_0^2 \left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \langle U(t) \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Эту систему уравнений можно решить с помощью преобразования Лапласа и, следовательно, получаем решение в виде

$$\langle U \rangle_p = 2y_0^2 \frac{L(p + 2\nu)}{L(p)L(p + 2\nu) - a_0^2 M^2(p)}, \quad (7.23)$$

$$L(p) = p(p^2 + 4\omega_0^2), \quad M(p) = 4\omega_0^2(p^2 + \nu).$$

Замечание. В предельном случае больших значений ν и a_0^2 , но конечности отношения $a_0^2/2\nu = \sigma^2\tau_0$, получаем из второго уравнения в (7.22)

$$\langle z(t) U(t) \rangle = -\frac{\omega_0^2 \sigma^2 \tau_0}{\nu} \langle U(t) \rangle$$

и в этом пределе величина $\langle U(t) \rangle$ описывается замкнутым уравнением

$$\frac{d^3}{dt^3} \langle U(t) \rangle + 4\omega_0^2 \frac{d}{dt} \langle U(t) \rangle - 4\omega_0^4 \sigma^2 \tau_0 \langle U(t) \rangle = 0,$$

которое совпадает с уравнением (6.91), соответствующем гауссову дельта-коррелированному процессу $z(t)$.

Задача 7.2. Получить стационарное распределение вероятностей для стохастического уравнения в случае телеграфного случайного процесса $z(t)$

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x) + z(t)g(x), \quad x(0) = x_0.$$

Решение. Если $|f(x)| < a_0|g(x)|$, то

$$P(x) = \frac{C|g(x)|}{a_0^2 g^2(x) - f^2(x)} \exp \left\{ \frac{2\nu}{a_0^2} \int dx \frac{f(x)}{a_0^2 g^2(x) - f^2(x)} \right\},$$

где положительная постоянная C определяется из условия нормировки.

Замечание. При предельном переходе $\nu \rightarrow \infty$ и $a_0^2 \rightarrow \infty$, так что $a_0^2 \tau_0 = \text{const}$ ($\tau_0 = 1/(2\nu)$), это распределение вероятностей переходит в выражение

$$P(x) = \frac{C}{|g(x)|} \exp \left\{ \frac{2\nu}{a_0^2} \int dx \frac{f(x)}{g^2(x)} \right\},$$

соответствующее гауссову дельта-коррелированному процессу $z(t)$, т. е. гауссову процессу с корреляционной функцией

$$\langle z(t)z(t') \rangle = 2a_0^2 \tau_0 \delta(t - t').$$

Задача 7.3. Получить стационарное распределение вероятностей для стохастического уравнения в случае телеграфного случайного процесса $z(t)$

$$\frac{d}{dt} x(t) = -x + z(t), \quad x(0) = x_0. \quad (7.24)$$

Решение.

$$P(x) = \frac{1}{B(\nu, 1/2)} (1 - x^2)^{\nu-1} \quad (|x| < 1), \quad (7.25)$$

где $B(\nu, 1/2)$ — бета-функция. Это распределение вероятностей имеет существенно разный вид в случаях $\nu > 1$, $\nu = 1$ и $\nu < 1$ и изображено на рис. 7.1.

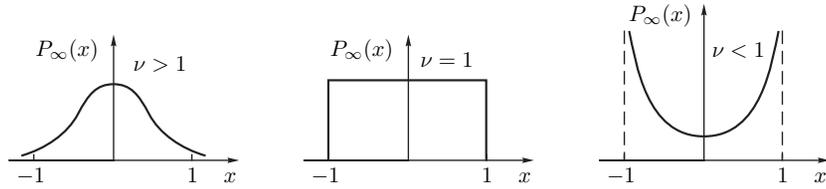


Рис. 7.1. Стационарное распределение вероятностей (7.25) для решения уравнения (7.24) в зависимости от параметра ν

Из вида распределения следует, что в случае $\nu > 1$ система проводит основное время вблизи состояния $x = 0$, а в случае $\nu < 1$ система находится в окрестностях точек $x = \pm 1$. В случае же $\nu = 1$ получаем равномерное распределение вероятностей на отрезке $[-1, 1]$.

Очерк 8

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЕЛЬТА-КОРРЕЛИРОВАННОГО ВО ВРЕМЕНИ ГАУССОВА СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

В предыдущих главах подробно рассматривались общие случаи анализа стохастических уравнений. Здесь же мы более подробно рассмотрим с других позиций приближение дельта-коррелированного во времени гауссова случайного поля в стохастических уравнениях и обсудим физический смысл этого приближения. Это приближение наиболее широко используется при решении практических задач.

8.1. Уравнение Фоккера–Планка

Пусть векторная функция $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ удовлетворяет динамическому уравнению

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (8.1)$$

где $v_i(\mathbf{x}, t)$ ($i = 1, \dots, n$) — детерминированные функции, а $f_i(\mathbf{x}, t)$ — случайные функции $(n+1)$ переменных, обладающие следующими свойствами:

- (а) $f_i(\mathbf{x}, t)$ — гауссово случайное поле в $(n+1)$ -мерном пространстве (\mathbf{x}, t) ;
- (б) $\langle f_i(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$.

Будем для определенности считать, что t — временная координата, а \mathbf{x} — пространственная.

Статистические характеристики поля $f_i(\mathbf{x}, t)$ полностью описываются заданием его корреляционного тензора

$$B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t') \rangle.$$

Так как уравнение (8.1) является уравнением первого порядка с начальным условием, то для него выполняется условие динамической причинности:

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} x_i(t) = 0 \quad \text{при } t' < t_0 \text{ и } t' > t, \quad (8.2)$$

т. е. его решение $\mathbf{x}(t)$ функционально зависит лишь от предшествующих по t значений $f_j(\mathbf{x}, t')$ из интервала $t_0 \leq t' \leq t$. При этом для вариационной производной имеем равенство

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t-0)} x_i(t) = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}'). \quad (8.3)$$

Однако может существовать статистическая связь между $\mathbf{x}(t)$ и последующими значениями $f_j(\mathbf{x}, t'')$, где $t'' > t$, так как такие значения $f_j(\mathbf{x}, t'')$ коррелированы со значениями $f_j(\mathbf{x}, t')$ при $t' \leq t$. Ясно, что корреляция функции $\mathbf{x}(t)$ с последующими значениями $f_j(\mathbf{x}, t'')$ заметна лишь при $t'' - t \leq \tau_0$, где τ_0 — радиус корреляции поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ по переменной t .

Для достаточно большого класса реальных физических процессов, характерный временной масштаб изменения функции $\mathbf{x}(t)$ имеет величину порядка $T \gg \tau_0$, и в этом случае существует малый параметр — τ_0/T , который может быть использован для построения приближенного решения.

В первом приближении по этому параметру малости можно рассматривать асимптотику при $\tau_0 \rightarrow 0$. При этом значения $\mathbf{x}(t')$ при $t' < t$ будут не только функционально, но и статистически независимы от значений $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t'')$ при $t'' > t$. Это приближение эквивалентно замене корреляционного тензора B_{ij} на некоторый эффективный тензор, определяемый равенством

$$B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 2\delta(t - t')F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t). \quad (8.4)$$

Величина $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ при этом определяется из условия равенства интегралов от $B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ и $B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ по t' :

$$F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t'),$$

что и соответствует переходу к гауссову дельта-коррелированному по времени t случайному полю.

Введем индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}), \quad (8.5)$$

где $\mathbf{x}(t)$ — решение уравнения (8.1), удовлетворяющую уравнению Лиувилля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (8.6)$$

При этом

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t - 0)} \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}, t) \}. \quad (8.7)$$

Уравнение для плотности вероятностей решения уравнения (8.1)

$$P(\mathbf{x}, t) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle$$

получим, усредняя уравнение (8.6) по ансамблю реализаций поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle. \quad (8.8)$$

Уравнение (8.8) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \int dx' \int_{t_0}^t dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} \right\rangle. \quad (8.9)$$

Здесь мы воспользовались формулой Фурутцу–Новикова (5.13) на с. 122

$$\langle f_k(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \rangle = \int d\mathbf{x}' \int_0^t dt' B_{kl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]}{\delta f_l(\mathbf{x}', t')} \right\rangle, \quad (8.10)$$

справедливой для корреляции гауссова случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ с произвольным функционалом $R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$ от него, и условием динамической причинности (8.2).

Уравнение (8.9) показывает, что одновременная плотность вероятностей решения $\mathbf{x}(t)$ в момент времени t определяется функциональной зависимостью решения $\mathbf{x}(t)$ от поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}', t)$ для всех времен в интервале (t_0, t) .

В общем случае плотность вероятностей $P(\mathbf{x}, t)$ не описывается замкнутым уравнением. Если же для корреляционной функции поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ воспользоваться приближением (8.4), то возникнут члены, связанные со значениями $\delta \varphi[\mathbf{x}, t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] / \delta f_j(\mathbf{x}', t')$ при совпадающих временных аргументах $t' = t - 0$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \int d\mathbf{x}' F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \left\langle \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_j(\mathbf{x}', t - 0)} \right\rangle,$$

которые, согласно равенству (8.7), выражаются непосредственно через саму величину $\varphi[\mathbf{x}, t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$. Таким образом мы приходим к замкнутому уравнению Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)] \right) P(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t) P(\mathbf{x}, t)], \quad (8.11)$$

где

$$A_k(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial}{\partial x_l} F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \right|_{\mathbf{x}' = \mathbf{x}}.$$

Уравнение (8.11) следует решать с условием $P(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, или же с начальным условием более общего вида $P(\mathbf{x}, t_0) = W_0(\mathbf{x})$, если начальные условия так же случайны, но статистически независимы от поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Уравнение Фоккера–Планка (8.11) — уравнение в частных производных и его дальнейший анализ существенно зависит от формулировки краевых условий по \mathbf{x} , которые формулируются для анализа конкретных задач.

Рассмотрим величины, входящие в уравнение (8.11). Члены этого уравнения с $A_k(\mathbf{x}, t)$ и $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ обусловлены флуктуациями поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Если поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ стационарно во времени, то величины $A_k(\mathbf{x})$ и $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ не зависят от времени. Если к тому же поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ однородно и изотропно по всем пространственным координатам, то величина $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) = \text{const}$, что соответствует постоянному тензору коэффициентов диффузии, а величина $A_k(\mathbf{x}, t) = 0$ (заметим, однако, что зависимость $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ и $A_k(\mathbf{x}, t)$ от \mathbf{x} может быть связана и с использованием криволинейных координат).

8.2. Плотность вероятностей перехода

Вернемся теперь к динамической системе (8.1), и рассмотрим m -временную плотность вероятностей

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \langle \delta(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_1) \dots \delta(\mathbf{x}(t_m) - \mathbf{x}_m) \rangle, \quad (8.12)$$

относящуюся к m различным моментам времени $t_1 < t_2 < \dots < t_m$. Дифференцируя (8.12) по времени t_m и используя затем динамическое уравнение (8.1), условие динамической причинности (8.2), определение функции $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$, и формулу Фурутцу–Новикова (8.10), можно получить уравнение, аналогичное уравнению Фоккера–Планка (8.11):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_m} P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) + \\ & + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{mk}} [v_k(\mathbf{x}_m, t_m) + A_k(\mathbf{x}_m, t_m)] P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \\ & = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_{mk} \partial x_{ml}} [F_{kl}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m, t_m) P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m)]. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Здесь суммирование по индексу m не производится. Начальное условие к уравнению

можно найти из формулы (8.12). Полагая $t_m = t_{m-1}$ в (8.12), получаем

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_{m-1}) = \delta(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \quad (8.14)$$

Решение уравнения (8.13) можно искать в виде

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \quad (8.15)$$

Так как все дифференциальные операции в (8.13) относятся к t_m и \mathbf{x}_m , то подставляя (8.15) в (8.13) и (8.14), находим следующее уравнение для плотности вероятностей перехода:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)] \right) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \\ & = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)] \end{aligned} \quad (8.16)$$

с начальным условием

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)|_{t \rightarrow t_0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

где

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) | \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \rangle.$$

В уравнении (8.16) мы обозначили переменные \mathbf{x}_m, t_m через \mathbf{x}, t , а переменные $\mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}$ через \mathbf{x}_0, t_0 .

Применяя формулу (8.15) $(m-1)$ раз, получаем соотношение

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) \dots p(\mathbf{x}_2, t_2 | \mathbf{x}_1, t_1) P(\mathbf{x}_1, t_1), \quad (8.17)$$

где $P(\mathbf{x}_1, t_1)$ — плотность вероятностей, определяемая уравнением (8.11) и относящаяся к одному моменту времени t_1 . Равенство (8.17) выражает многовременную плотность вероятностей через произведение плотностей вероятностей перехода и означает, что случайный процесс $\mathbf{x}(t)$ является марковским.

Уравнение (8.11) обычно называется *прямым уравнением Фоккера–Планка*. Легко получить и *обратное уравнение Фоккера–Планка*, которое описывает эволюцию плотности вероятностей перехода по отношению к начальным параметрам t_0, \mathbf{x}_0 .

Действительно, в гл. 2 книги было приведено обратное уравнение Лиувилля (3.8) на с. 75 для индикаторной функции, которое описывает эволюцию динамической системы в зависимости от начальных условий t_0, \mathbf{x}_0 , имеющее вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \right) \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), \quad (8.18)$$

с начальным условием

$$\varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Из уравнения (8.18) вытекает равенство, аналогичное (8.7):

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t_0 + 0)} \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x_{0j}} \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0). \quad (8.19)$$

Усредняя теперь обратное уравнение Лиувилля (8.18) по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ с эффективным корреляционным тензором (8.4), используя формулу Фурутцу–Новикова (8.10) и соотношение (8.19) для вариационной производной, мы приходим к обратному уравнению Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + [v_k(\mathbf{x}_0, t_0) + A_k(\mathbf{x}_0, t_0)] \frac{\partial}{\partial x_{0k}} \right) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \\ & = -F_{kl}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial^2}{\partial x_{0k} \partial x_{0l}} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), \quad p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Прямое и обратное уравнения Фоккера–Планка эквивалентны. Первое более удобно для анализа эволюции статистических характеристик во времени решения задачи (8.1). Второе же более удобно для изучения статистических характеристик, связанных с начальными условиями, таких, например, как времени пребывания процесса $\mathbf{x}(t)$ в какой-либо области пространства, времени достижения ее границ и т. п.. В этом случае вероятность пребывания случайного процесса $\mathbf{x}(t)$ в области пространства V определяется интегралом

$$G(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \int_V d\mathbf{x} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0),$$

который, согласно уравнению (8.20), описывается замкнутым уравнением

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + [v_k(\mathbf{x}_0, t_0) + A_k(\mathbf{x}_0, t_0)] \frac{\partial}{\partial x_{0k}} \right) G(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \\ & = -F_{kl}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial^2}{\partial x_{0k} \partial x_{0l}} G(t; \mathbf{x}_0, t_0), \end{aligned} \quad (8.21)$$

$$G(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x}_0 \in V), \\ 0 & (\mathbf{x}_0 \notin V). \end{cases}$$

Необходимо также сформулировать дополнительные краевые условия для уравнения (8.21), которые определяются характером как самой области V так и ее границ.

8.3. Простейшие марковские случайные процессы

Существует лишь небольшое число уравнений Фоккера–Планка, допускающих точное решение. Это прежде всего уравнения Фоккера–Планка, соответствующие таким стохастическим уравнениям, которые сами допускают отыскание решения в аналитическом виде. Для таких задач зачастую удается определить не только одноточечную плотность вероятностей и переходную плотность вероятностей, но и характеристический функционал, а также другие важные для приложений статистические характеристики.

Самым простым примером уравнения Фоккера–Планка является уравнение, определяющее *винеровский случайный процесс*. Учитывая особую важность в физике таких процессов (например, они описывают *броуновское движение частиц*), рассмотрим его более подробно.

8.3.1. Винеровский случайный процесс

Винеровский случайный процесс определяется как решение стохастического уравнения

$$\frac{d}{dt}w(t) = z(t), \quad w(0) = 0,$$

где $z(t)$ — гауссов дельта-коррелированный во времени процесс с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0\delta(t-t').$$

Решение этого уравнения

$$w(t) = \int_0^t d\tau z(\tau) \quad (8.22)$$

— непрерывный гауссов нестационарный случайный процесс с параметрами

$$\langle w(t) \rangle = 0, \quad \langle w(t)w(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0 \min(t, t').$$

На рисунке 8.1 приведена реализация винеровского процесса (8.22), полученная численным моделированием.

8.3.2. Винеровский случайный процесс со сносом

Обсудим более общий процесс со сносом, зависящим от параметра α по формуле

$$w(t; \alpha) = -\alpha t + w(t), \quad \alpha > 0.$$

Процесс $w(t; \alpha)$ — марковский процесс и его плотность вероятностей

$$P(w, t; \alpha) = \langle \delta(w(t; \alpha) - w) \rangle$$

описывается уравнением Фоккера–Планка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial w} \right) P(w, t; \alpha) = D \frac{\partial^2}{\partial w^2} P(w, t; \alpha), \quad P(w, 0; \alpha) = \delta(w), \quad (8.23)$$

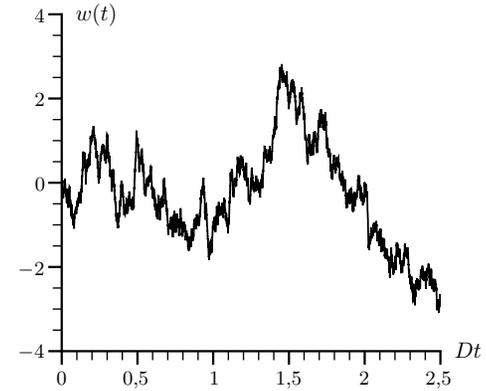


Рис. 8.1. Реализация винеровского процесса (8.22)

где через коэффициент диффузии обозначена величина $D = \sigma^2\tau_0$. Его решение имеет вид гауссова распределения:

$$P(w, t; \alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{(w + \alpha t)^2}{4Dt} \right\}. \quad (8.24)$$

Соответствующая интегральная функция распределения, равная вероятности того, что $w(t; \alpha) < w$, равна

$$F(w, t; \alpha) = \int_{-\infty}^w dw P(w, t; \alpha) = \Pr \left(\frac{w}{\sqrt{2Dt}} + \alpha \sqrt{\frac{t}{2D}} \right), \quad (8.25)$$

где функция $\Pr(z)$ — *интеграл вероятностей* (4.18) на с. 94. При этом кривая типичной реализации винеровского случайного процесса со сносом, в соответствии с формулами (4.59) на с. 109, является линейной функцией времени

$$w^*(t; \alpha) = -\alpha t.$$

Дополним уравнение (8.23), помимо начального, еще и граничным условием

$$P(w, t; \alpha)|_{w=h} = 0, \quad (t > 0), \quad (8.26)$$

обрывающим реализации процесса $w(t; \alpha)$ в момент достижения ими границы h . Решение краевой задачи (8.23), (8.26), которое обозначим через $P(w, t; \alpha, h)$ описывает при $w < h$ вероятностное распределение тех реализаций процесса $w(t; \alpha)$, которые «выжили» к моменту t , т. е. за весь интервал времени ни разу не достигли границы h . Соответственно, плотность вероятностей нормирована не на единицу, а на вероятность того, что $t < t^*$, где t^* — момент первого достижения процессом $w(t; \alpha)$ границы h :

$$\int_{-\infty}^h dw P(w, t; \alpha, h) = P(t < t^*). \quad (8.27)$$

Введем интегральную функцию распределения и плотность вероятностей случайного момента первого достижения границы h :

$$F(t; \alpha, h) = P(t^* < t) = 1 - P(t < t^*) = 1 - \int_{-\infty}^h dw P(w, t; \alpha, h), \quad (8.28)$$

$$P(t; \alpha, h) = \frac{\partial}{\partial t} F(t; \alpha, h) = -\frac{\partial}{\partial w} P(w, t; \alpha, h)|_{w=h}.$$

При $\alpha > 0$, когда процесс $w(t; \alpha)$ с ростом t в среднем сносится от границы h и при $t \rightarrow \infty$ вероятность $P(t < t^*)$ (8.27) стремится к вероятности того, что процесс $w(t; \alpha)$ никогда не достигнет границы h . Другими словами предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^h dw P(w, t; \alpha, h) = P(w_{\max}(\alpha) < h) \quad (8.29)$$

равен вероятности того, что абсолютный максимум процесса

$$w_{\max}(\alpha) = \max_{t \in (0, \infty)} w(t; \alpha)$$

меньше h . Таким образом, из (8.29) следует, что интегральная функция распределения значений абсолютного максимума $w_{\max}(\alpha)$ равна

$$F(h; \alpha) = P(w_{\max}(\alpha) < h) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^h dw P(w, t; \alpha, h). \quad (8.30)$$

Решив краевую задачу (8.23), (8.26), например, методом отражения, получим

$$P(w, t; \alpha, h) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \left\{ \exp \left[-\frac{(w + \alpha t)^2}{4Dt} \right] - \exp \left[-\frac{h\alpha}{D} - \frac{(w - 2h + \alpha t)^2}{4Dt} \right] \right\}. \quad (8.31)$$

Подставив это выражение в (8.28), найдем плотность вероятностей момента t^* первого достижения процессом $w(t; \alpha)$ границы h :

$$P(t; \alpha, h) = \frac{1}{2Dt\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{(h + \alpha t)^2}{4Dt} \right\}.$$

Наконец, интегрируя (8.31) по w и устремив $t \rightarrow \infty$, получим, согласно (8.30), интегральную функцию распределения значений абсолютного максимума $w_{\max}(\alpha)$ процесса $w(t; \alpha)$ в виде

$$F(h; \alpha) = P(w_{\max}(\alpha) < h) = 1 - \exp \left\{ -\frac{h\alpha}{D} \right\}. \quad (8.32)$$

Следовательно, абсолютный максимум винеровского процесса имеет экспоненциальную плотность вероятностей:

$$P(h; \alpha) = \langle \delta(w_{\max}(\alpha) - h) \rangle = \frac{\alpha}{D} \exp \left\{ -\frac{h\alpha}{D} \right\}.$$

С помощью винеровского случайного процесса можно конструировать различные другие процессы, удобные для моделирования различных физических явлений. Для положительных величин такой простейшей аппроксимацией является логарифмически нормальный (логнормальный) процесс, который мы и рассмотрим более подробно.

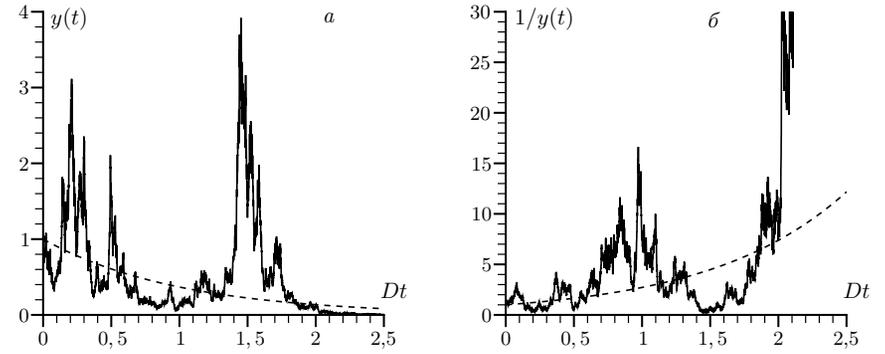


Рис. 8.2. Реализации логнормальных процессов $y(t)$ (а) и $1/y(t)$ (б) при значениях параметров $\alpha/D = 1$

8.3.3. Логарифмически нормальный процесс

Определим логнормальный случайный процесс по формуле

$$y(t; \alpha) = e^{w(t; \alpha)} = \exp \left\{ -\alpha t + \int_0^t d\tau z(\tau) \right\}, \quad (8.33)$$

где $z(t)$ — гауссов процесс "белого шума" с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0\delta(t - t').$$

Он описывается стохастическим уравнением

$$\frac{d}{dt} y(t; \alpha) = \{-\alpha + z(t)\} y(t; \alpha), \quad y(0; \alpha) = 1.$$

На рис. 8.2 приведены реализации логнормальных случайных процессов $y(t)$ и $1/y(t)$ при значениях параметров $\alpha/D = 1$ (пунктирные линии соответствуют функциям $\exp\{-Dt\}$ и $\exp\{Dt\}$), соответственно. Из этих рисунков видно наличие редких, но больших выбросов относительно пунктирных линий как в сторону больших значений, так и к нулю. Такое свойство случайных процессов называется *перемежаемостью* (см., например, [57]).

Одновременная плотность вероятностей логнормального процесса

$$\begin{aligned} P(y, t; \alpha) &= \langle \delta(y(t; \alpha) - y) \rangle = \left\langle \delta \left(e^{w(t; \alpha)} - y \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{y} \langle \delta(w(t; \alpha) - \ln y) \rangle = \frac{1}{y} P(w, t; \alpha)|_{w=\ln y}, \end{aligned}$$

где $P(w, t; \alpha)$ — одновременная плотность вероятностей винеровского процесса со сносом, описываемая равенством (8.24), и, следовательно,

$$P(y, t; \alpha) = \frac{1}{2y\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(ye^{\alpha t})}{4Dt} \right\}, \quad (8.34)$$

где параметр $D = \sigma^2 \tau_0$.

Отметим, что одновременная плотность вероятностей случайного процесса $\tilde{y}(t; \alpha) = 1/y(t; \alpha)$ также логнормальна и описывается формулой

$$P(\tilde{y}, t; \alpha) = \frac{1}{2\tilde{y}\sqrt{\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{\ln^2(\tilde{y}e^{-\alpha t})}{4Dt}\right\}, \quad (8.35)$$

соответствующей изменению знака у параметра α в формуле (8.34). Графики логарифмически нормальных плотностей вероятностей (8.34) и (8.35) для значения параметра $\alpha/D = 1$ и безразмерного времени $\tau = Dt = 0, 1$ и 1 приведены на рис. 8.3. На рис. 8.4 показано поведение плотностей вероятностей этих процессов при $\tau = 1$ в логарифмическом масштабе.

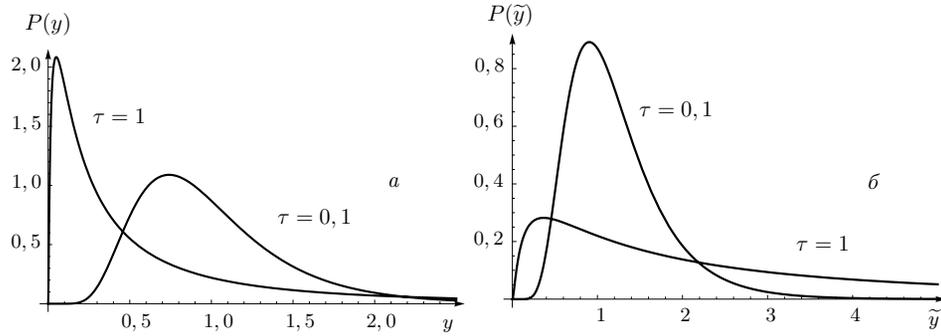


Рис. 8.3. Логнормальные распределения вероятностей (8.34) (а) и (8.35) (б) для значения параметра $\alpha/D = 1$ и безразмерного времени $\tau = 0, 1$ и 1

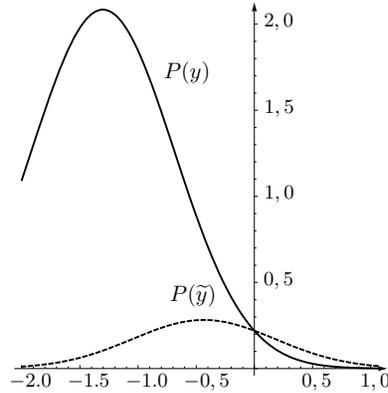


Рис. 8.4. Поведение плотностей вероятностей процессов $y(t; \alpha)$ (сплошная кривая) и $\tilde{y}(t; \alpha)$ (пунктирная кривая) при $\tau = 1$ в логарифмическом (десятичном) масштабе

Эти распределения вероятностей имеют совершенно различные структуры. Общей особенностью для них является лишь появление длинных пологих "хвостов" при $\tau = 1$, означающих усиление роли больших выбросов процессов $y(t; \alpha)$ и $\tilde{y}(t; \alpha)$ в формировании одновременной статистики.

Соответственно, интегральная функция распределения, согласно (8.25), определяется выражением

$$F(y, t; \alpha) = P(y(t; \alpha) < y) = \Pr\left(\frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln(ye^{\pm\alpha t})\right), \quad (8.36)$$

где функция $\Pr(z)$ — интеграл вероятностей (4.18) на с. 94.

Зная только одноточечные статистические характеристики процессов $y(t; \alpha)$ и $\tilde{y}(t; \alpha)$ можно получить важную информацию о поведении их на всем интервале времен $(0, \infty)$. В частности:

1. Логнормальный процесс $y(t; \alpha)$ является марковским процессом и его одновременная плотность вероятностей (8.34) описывается уравнением Фоккера–Планка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial y}\right) P(y, t; \alpha) = D \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} y P(y, t; \alpha), \quad P(y, 0; \alpha) = \delta(y - 1). \quad (8.37)$$

Исходя из уравнения (8.37) легко написать уравнения для моментных функций процессов $y(t; \alpha)$ и $\tilde{y}(t; \alpha)$, решения которых определяются равенствами

$$\langle y^n(t; \alpha) \rangle = e^{n(n-\alpha/D)Dt}, \quad \langle \tilde{y}^n(t; \alpha) \rangle = \left\langle \frac{1}{y^n(t; \alpha)} \right\rangle = e^{n(n+\alpha/D)Dt}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.38)$$

и экспоненциально растут во времени.

Исходя из уравнения (8.37) также легко получить равенство

$$\langle \ln y(t) \rangle = -\alpha t$$

и, следовательно, параметр α можно записать в виде

$$-\alpha = \frac{1}{t} \langle \ln y(t) \rangle \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{1}{t} \langle \ln \tilde{y}(t) \rangle. \quad (8.39)$$

Отметим, что подходу, основанному на анализе устойчивости решений детерминированных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A(t) \mathbf{x}(t)$$

по Ляпунову, уделяется большое внимание многими исследователями. При этом анализируется верхний предел решения задачи

$$\lambda_{\mathbf{x}(t)} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |\mathbf{x}(t)|,$$

который называется его *характеристическим показателем*. В приложении к стохастическим динамическим системам при таком подходе, зачастую, для интерпретации и упрощения полученных результатов, эти исследователи на последней стадии подпадают статистический анализ и вычисляют их статистические средние такие, например, как

$$\langle \lambda_{\mathbf{x}(t)} \rangle = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \langle \ln |\mathbf{x}(t)| \rangle. \quad (8.40)$$

Таким образом параметр α (8.39) является *ляпуновской экспонентой* для логнормального случайного процесса $y(t)$ (см., например, [12]).

2. Зная интегральные функции распределений, можно вычислить кривые типичной реализации логнормальных процессов $y(t; \alpha)$ и $\tilde{y}(t; \alpha)$

$$y^*(t) = e^{\langle \ln y(t) \rangle} = e^{-\alpha t}, \quad \tilde{y}^*(t) = e^{\langle \ln \tilde{y}(t) \rangle} = e^{\alpha t}, \quad (8.41)$$

которые, в соответствии с формулами (4.59) на с.109, оказываются экспоненциально спадающей кривой для процесса $y(t; \alpha)$ и экспоненциально растущей кривой для процесса $\tilde{y}(t; \alpha)$.

Экспоненциальный рост моментов случайных процессов $y(t; \alpha)$ и $\tilde{y}(t; \alpha)$ обусловлен выбросами этих процессов относительно кривых типичной реализации $y^*(t; \alpha)$ и $\tilde{y}^*(t; \alpha)$ как в сторону больших так и малых значений y и \tilde{y}^* .

Для значения параметра $\alpha/D = 1$ среднее значение процесса $y(t; D)$ не зависит от времени и равно единице. При этом, однако, вероятность выполнения неравенства $y < 1$ при $Dt \gg 1$, согласно (8.36), быстро стремится к единице по закону

$$P(y(t; D) < 1) = \Pr\left(\sqrt{\frac{Dt}{2}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} e^{-Dt/4},$$

т.е. подавляющее время графики реализаций процесса лежат ниже уровня его среднего значения $\langle y(t; D) \rangle = 1$, а соответствующая вероятность события $P\{y(t; D) > 1\}$ стремится к нулю, хотя статистические моменты процесса $y(t; D)$ и определяются его большими выбросами.

Таким образом мы имеем явное противоречие между характером поведения статистических характеристик процесса $y(t; \alpha)$ и его отдельных реализаций.

3. Поведение реализаций процесса $y(t; \alpha)$ на всем интервале времени можно также оценить с помощью p -мажорантных кривых $M_p(t, \alpha)$, которые определим следующим образом. Назовем мажорантной кривой такую кривую — $M_p(t, \alpha)$, для которой при любых временах t с вероятностью p выполняется неравенство $y(t; \alpha) < M_p(t, \alpha)$, т.е.

$$P\{y(t; \alpha) < M_p(t, \alpha) \quad \text{для всех} \quad t \in (0, \infty)\} = p.$$

Полученная выше статистика абсолютного максимума (8.32) винеровского процесса со сносом $w(t; \alpha)$ позволяет указать достаточно богатый класс мажорантных кривых. В самом деле, пусть вероятность того, что абсолютный максимум $w_{\max}(\beta)$ вспомогательного процесса $w(t; \beta)$ с произвольным значением параметра β , лежащим в пределах $0 < \beta < \alpha$, удовлетворяет неравенству $w(t; \beta) < h = \ln A$ равна p . Тогда, очевидно, с той же вероятностью p вся реализация процесса $y(t; \alpha)$ будет лежать ниже мажорантной кривой

$$M_p(t, \alpha, \beta) = Ae^{(\beta-\alpha)t}. \quad (8.42)$$

Как видно из (8.32), вероятность, с которой процесс $y(t; \alpha)$ нигде не превышает мажорантной кривой (8.42), следующим образом зависит от ее параметров:

$$p = 1 - A^{-\beta/D}$$

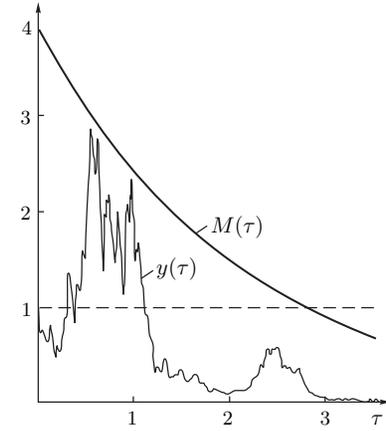


Рис. 8.5. Схематическое поведение реализации процесса $y(t; D)$ и мажорантной кривой $M(\tau)$ (8.44)

и, следовательно, мы получаем однопараметрический класс экспоненциально спадающих мажорантных кривых

$$M_p(t, \alpha, \beta) = \frac{1}{(1-p)^{D/\beta}} e^{(\beta-\alpha)t}. \quad (8.43)$$

Обратим внимание на тот замечательный факт, что несмотря на постоянство статистического среднего $\langle y(t; D) \rangle = 1$ и экспоненциальный рост высших моментов процесса $y(t; D)$, всегда можно указать экспоненциально спадающую мажорантную кривую (8.43), ниже которой будут лежать реализации процесса $y(t; D)$ с любой наперед заданной вероятностью $p < 1$. В частности, например, с вероятностью $p = 1/2$ выполняется неравенство

$$y(t; D) < M_{1/2}(t, D, D/2) = 4e^{-Dt/2} \quad (8.44)$$

для любого момента времени t из интервала $(0, \infty)$. Схематическое поведение реализации процесса $y(t; D)$ и мажорантной кривой (8.44) приведено на рис. 8.5.

Это еще раз подтверждает, сделанный ранее вывод, о том, что экспоненциальный рост моментов процесса $y(t; D)$ во времени — эффект чисто статистический, обусловленный усреднением по всему ансамблю реализаций.

Отметим, что площадь под экспоненциально убывающими мажорантными кривыми конечна. Следовательно, большие выбросы процесса $y(t; \alpha)$, вызывая экспоненциальный рост высших моментов, не вносят существенного вклада в площадь под реализациями, которая практически для всех реализаций также конечна, т.е. выбросы логнормального процесса $y(t; \alpha)$ достаточно узки.

4. В связи со сказанным представляется интересным исследовать непосредственно статистику случайной площади под реализациями процесса $y(t; \alpha)$:

$$S_n(t; \alpha) = \int_0^t d\tau y^n(\tau; \alpha). \quad (8.45)$$

Эта функция описывается системой стохастических уравнений:

$$\frac{d}{dt}S_n(t; \alpha) = y^n(t; \alpha), \quad S_n(0; \alpha) = 0, \quad (8.46)$$

$$\frac{d}{dt}y(t; \alpha) = \{-\alpha + z(t)\}y(t; \alpha), \quad y(0; \alpha) = 1,$$

и, следовательно, двухкомпонентный процесс $\{y(t; \alpha), S_n(t; \alpha)\}$ является марковским процессом, одновременная плотность вероятностей которого

$$P(S_n, y, t; \alpha) = \langle \delta(S_n(t; \alpha) - S_n) \delta(y(t; \alpha) - y) \rangle,$$

так же как и плотность вероятностей перехода, описывается уравнением Фоккера–Планка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + y^n \frac{\partial}{\partial S_n} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} y \right) P(S_n, y, t; \alpha) = D \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} P(S_n, y, t; \alpha), \quad (8.47)$$

$$P(S_n, y, 0; \alpha) = \delta(S_n) \delta(y - 1).$$

К сожалению, решить уравнение (8.47) не удастся и, следовательно, невозможно изучить полную статистику процесса $S_n(t; \alpha)$. Однако если интересоваться только одновременными статистическими средними процесса $S_n(t; \alpha)$, т. е. для фиксированного момента времени, то их можно изучить достаточно полно.

Для этого перепишем выражение (8.45) в виде интеграла:

$$S_n(t; \alpha) = \int_0^t d\tau \exp \left\{ -n\alpha\tau + n \int_0^\tau d\tau_1 z(\tau_1) \right\} = \int_0^t d\tau \exp \left\{ -n\alpha(t - \tau) + n \int_0^{t-\tau} d\tau_1 z(t - \tau - \tau_1) \right\},$$

из вида которого следует, что для одновременной статистики величина $S_n(t; \alpha)$ статистически эквивалентна величине (см. раздел 4.2.1 на с. 96)

$$S_n(t; \alpha) = \int_0^t d\tau \exp \left\{ -n\alpha(t - \tau) + n \int_0^{t-\tau} d\tau_1 z(\tau + \tau_1) \right\}. \quad (8.48)$$

Дифференцируя теперь (8.48) по времени, получаем статистически эквивалентное стохастическое уравнение

$$\frac{d}{dt}S_n(t; \alpha) = 1 - n\{\alpha - z(t)\}S_n(t; \alpha), \quad S_n(0; \alpha) = 0,$$

статистические характеристики которого описываются для одновременной плотности вероятностей $P(S_n, t; \alpha) = \langle \delta(S_n(t; \alpha) - S_n) \rangle$ уравнением Фоккера–Планка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial S_n} - n\alpha \frac{\partial}{\partial S_n} S_n \right) P(S_n, t; \alpha) = n^2 D \frac{\partial}{\partial S_n} S_n \frac{\partial}{\partial S_n} S_n P(S_n, y, t; \alpha). \quad (8.49)$$

Из (8.49) видно, что существует стационарная плотность вероятностей для случайных интегралов $S_n(\alpha) = \int_0^\infty d\tau y^n(\tau; \alpha)$:

$$P(S_n; \alpha) = \left[(n^2 D)^{\alpha/nD} \Gamma\left(\frac{\alpha}{D}\right) S_n^{1+\alpha/D} \right]^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{n^2 D S_n} \right\},$$

где $\Gamma(z)$ — Гамма-функция. В частности, при $n = 1$ для величины

$$S(\alpha) = S_1(\alpha) = \int_0^\infty d\tau y(\tau; \alpha)$$

имеем

$$P(S; \alpha) = \left[D^{\alpha/D} \Gamma\left(\frac{\alpha}{D}\right) S^{1+\alpha/D} \right]^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{DS} \right\}. \quad (8.50)$$

Если теперь и параметр $\alpha = D$, то стационарная плотность вероятностей и соответствующая ей интегральная функция распределения имеют вид

$$P(S; D) = \frac{1}{DS^2} \exp \left\{ -\frac{1}{DS} \right\}, \quad F(S; D) = \exp \left\{ -\frac{1}{DS} \right\}. \quad (8.51)$$

Дополнительную информацию о динамике поведения реализаций процесса $y(t; \alpha)$ во времени несет зависимость вероятностного распределения случайного процесса

$$\tilde{S}(t, \alpha) = \int_t^\infty d\tau y(\tau; \alpha) \quad (8.52)$$

от времени t . Интеграл в правой части (8.52) можно представить в виде

$$\tilde{S}(t, \alpha) = y(t; \alpha) \int_0^\infty d\tau \exp \left\{ -\alpha\tau + \int_0^\tau d\tau_1 z(\tau_1 + t) \right\}. \quad (8.53)$$

Случайный процесс $y(t; \alpha)$ в (8.53) статистически независим от интеграла, стоящего в правой части (8.53), так как они функционально зависят от случайного процесса $z(\tau)$ в неперекрывающихся интервалах значений τ , и при этом сам интеграл статистически эквивалентен случайной величине $S(\alpha)$. Следовательно, одноточечная плотность вероятностей для случайного процесса $\tilde{S}(t, \alpha)$ $P(\tilde{S}, t; \alpha) = \langle \delta(\tilde{S}(t; \alpha) - \tilde{S}) \rangle$ описывается выражением

$$P(\tilde{S}, t; \alpha) = \int_0^\infty \int_0^\infty dy dS \delta(yS - \tilde{S}) P(y, t; \alpha) = \int_0^\infty \frac{dy}{y} P(y, t; \alpha) P\left(\frac{\tilde{S}}{y}; \alpha\right), \quad (8.54)$$

где $P(y, t; \alpha)$ — одновременная плотность вероятностей логнормального процесса $y(t; \alpha)$, описываемая формулой (8.34), а $P(\tilde{S}/y; \alpha)$ — плотность вероятностей для площади (8.50).

Соответствующая интегральная функция распределения

$$F(\tilde{S}, t; \alpha) = P(\tilde{S}(t; \alpha) < \tilde{S}) = \int_0^{\tilde{S}} d\tilde{S} P(\tilde{S}, t; \alpha)$$

будет описываться интегралом

$$F(\tilde{S}, t; \alpha) = \int_0^{\infty} dy P(y, t; \alpha) F\left(\frac{\tilde{S}}{y}; \alpha\right),$$

где $F(S; \alpha)$ — интегральная функция распределения для случайной площади $S(t; \alpha)$. В частности для значения параметра $\alpha = D$, согласно (8.34) и (8.51), получаем выражение

$$F(\tilde{S}, t; D) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_0^{\infty} \frac{dy}{y} \exp\left\{-\frac{\ln^2(ye^{Dt})}{4Dt} - \frac{y}{D\tilde{S}}\right\},$$

и вероятность выполнения неравенства $\tilde{S}(t; D) < \tilde{S}$ с ростом Dt монотонно стремится к единице для любого наперед заданного значения $D\tilde{S}$. Это еще раз свидетельствует о стремлении каждой отдельной реализации логнормального процесса к нулю при увеличении Dt , несмотря на экспоненциальный рост моментных функций процесса $y(t; \alpha)$, обусловленный большими выбросами.

5. Остановимся теперь на положительных случайных полях $E(\mathbf{r}, t)$, тесно связанных с логнормальными процессами, одноточечная плотность вероятностей которых описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\right) P(\mathbf{r}, t; E) = \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial E} E + D \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} E \right\} P(\mathbf{r}, t; E), \quad (8.55)$$

$$P(\mathbf{r}, 0; E) = \delta(E - E_0(\mathbf{r})),$$

где D_0 — коэффициент диффузии в \mathbf{r} -пространстве, а коэффициенты α и D характеризуют диффузию в E -пространстве. При этом параметр α может быть как положительным так и отрицательным. Изменения знака α для одноточечных характеристик означает переход от случайного поля $E(\mathbf{r}, t)$ к случайному полю $\tilde{E}(\mathbf{r}, t) = 1/E(\mathbf{r}, t)$. Будем для определенности называть поле $E(\mathbf{r}, t)$ энергией.

Решение этого уравнения имеет вид

$$P(\mathbf{r}, t; E) = \exp\left\{D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\right\} \tilde{P}(\mathbf{r}, t; E)$$

где функция $\tilde{P}(\mathbf{r}, t; E)$ описывается уравнением (сравни с уравнением (8.37))

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}(\mathbf{r}, t; E) = \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial E} E + D \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} E \right\} \tilde{P}(\mathbf{r}, t; E),$$

$$\tilde{P}(\mathbf{r}, 0; E) = \delta(E - E_0(\mathbf{r})).$$

При этом зависимость функции $\tilde{P}(\mathbf{r}, t; E)$ от параметра \mathbf{r} появляется только через начальное значение $E_0(\mathbf{r})$, т. е.

$$\tilde{P}(\mathbf{r}, t; E) \equiv \tilde{P}(t; E|E_0(\mathbf{r}))$$

и, следовательно, функция $\tilde{P}(t; E|E_0(\mathbf{r}))$ является логнормальной плотностью вероятностей случайного процесса $E(t, |E_0(\mathbf{r}))$, параметрически зависящего от \mathbf{r} ,

$$\tilde{P}(t; E|E_0(\mathbf{r})) = \frac{1}{2E\sqrt{\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{\ln^2 [Ee^{\alpha t}/E_0(\mathbf{r})]}{4Dt}\right\}.$$

Таким образом решение уравнения (8.55) имеет вид:

$$P(\mathbf{r}, t; E) = \frac{1}{2E\sqrt{\pi Dt}} \exp\left\{D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\right\} \exp\left\{-\frac{\ln^2 [Ee^{\alpha t}/E_0(\mathbf{r})]}{4Dt}\right\}. \quad (8.56)$$

Из уравнения (8.55) или выражения (8.56) следуют выражения для интегралов по пространству от моментных функций (для всех значений $n > 0$ и $n < 0$)

$$\int d\mathbf{r} \langle E^n(\mathbf{r}, t) \rangle = e^{n(nD-\alpha)t} \int d\mathbf{r} E_0^n(\mathbf{r}),$$

не зависящие от коэффициента диффузии в \mathbf{r} -пространстве (коэффициента D_0), и, в частности, выражение для средней полной энергии во всем пространстве

$$\int d\mathbf{r} \langle E(\mathbf{r}, t) \rangle = e^{\gamma t} \int d\mathbf{r} E_0(\mathbf{r}),$$

где параметр $\gamma = D - \alpha$.

Для пространственно однородного начального распределения энергии $E_0(\mathbf{r}) = E_0$ плотность вероятностей (8.56) не зависит от \mathbf{r} и описывается формулой (8.34)

$$P(t; E) = \frac{1}{2E\sqrt{\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{\ln^2 [Ee^{\alpha t}/E_0]}{4Dt}\right\}. \quad (8.57)$$

Таким образом в этом случае одноточечные статистические характеристики энергии $E(\mathbf{r}, t)$ статистически эквивалентны статистическим характеристикам случайного процесса $E(t) = y(t; \alpha)$ (8.33). Характерной особенностью распределения (8.57) является появление длинного пологого *хвоста* при $Dt \gg 1$, означающего усиление роли больших выбросов процесса $E(t; \alpha)$ в формировании одновременной статистики. Для этого распределения все моменты энергии являются экспоненциальными функциями и, в частности, при $n = 1$

$$\langle E(t) \rangle = E_0 e^{\gamma t}, \quad \gamma = D - \alpha,$$

а величина

$$\langle \ln(E(t)/E_0) \rangle = -\alpha t$$

и, следовательно, кривая типичной реализации для случайного процесса $E(t)$, определяющая поведение энергии поля в конкретных реализациях, в любой фиксированной точке пространства, является экспоненциальной величиной

$$E^*(t) = E_0 e^{-\alpha t},$$

растущей или затухающей во времени. Так, при $\alpha > 0$ кривая типичной реализации экспоненциально спадает в каждой точке пространства, что свидетельствует о

кластерной структуре поля энергии. В другом случае при $\alpha < 0$ кривая типичной реализации экспоненциально растет во времени, что свидетельствует об общем росте энергии в каждой точке пространства.

На рис. 8.6 схематически изображены случайные реализации энергии поля для разных знаков параметра α .

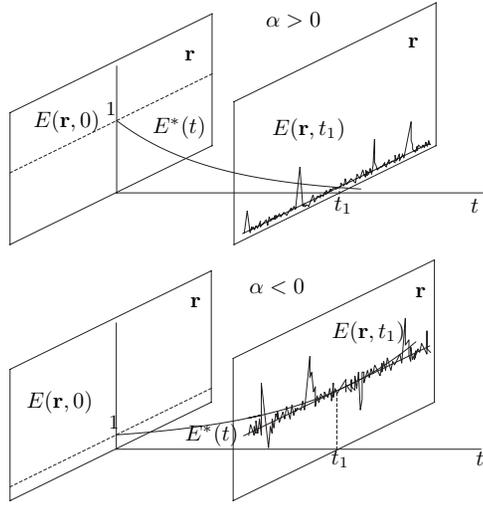


Рис. 8.6. Схематическое поведение случайных реализаций энергии поля для параметра $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$

Зная одноточечную плотность вероятностей энергии (8.56) можно получить и общую информацию о пространственной структуре поля энергии. В частности, такие функционалы поля энергии, как общая средняя величина объема (в 3-х мерном случае) или площади (в двумерном случае) в области, где $E(\mathbf{r}, t) > E$, и общая средняя энергия поля, заключенная в этой области, описываются равенствами

$$\langle V(t, E) \rangle = \int_{E_0}^{\infty} d\tilde{E} \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; \tilde{E}),$$

$$\langle \mathcal{E}(t, E) \rangle = \int_E^{\infty} \tilde{E} d\tilde{E} \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; \tilde{E}).$$

Значения этих функционалов не зависят от диффузии в \mathbf{r} -пространстве (коэффициента D_0) и для распределения вероятностей (8.56) получаем выражения

$$\langle V(t, E) \rangle = \int d\mathbf{r} \Pr \left(\frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln \left(\frac{E_0(\mathbf{r})}{E} e^{-\alpha t} \right) \right),$$

$$\langle \mathcal{E}(t, E) \rangle = e^{\gamma t} \int d\mathbf{r} E_0(\mathbf{r}) \Pr \left(\frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln \left(\frac{E_0(\mathbf{r})}{E} e^{(2D-\alpha)t} \right) \right),$$
(8.58)

где функция интеграл вероятностей $\Pr(z)$ определяется равенством (4.18) на с. 94. Учитывая теперь асимптотики функции $\Pr(z)$ при $z \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow -\infty$ (4.21) на с. 94 можно изучить эволюцию во времени этих функционалов. А именно, асимптотика среднего объема при $t \rightarrow \infty$ (при $\alpha > 0$) затухает во времени по закону

$$\langle V(t, E) \rangle \approx \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{D}{\pi E_0^{\frac{2}{D}} t}} e^{-\alpha^2 t/4D} \int d\mathbf{r} \sqrt{E_0^{\alpha/D}(\mathbf{r})}.$$

При $\alpha < 0$ же средний объем при $t \rightarrow \infty$ занимает все пространство.

Для полной энергии получаем асимптотику при $t \rightarrow \infty$ (в наиболее интересном случае при $\gamma > 0$ ($\alpha < D$))

$$\langle \mathcal{E}(t, E) \rangle \approx e^{\gamma t} \int d\mathbf{r} E_0(\mathbf{r}) \left[1 - \frac{1}{(2D-\alpha)} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \left(\frac{E}{E_0(\mathbf{r})} \right)^{(2D-\alpha)/D} e^{-(2D-\alpha)^2 t/4} \right],$$

что означает при $\alpha > 0$ содержание в кластерах 100% от общей средней энергии.

Для однородных начальных условий соответствующие выражения без интегрирования по \mathbf{r} описывают удельные значения объема больших выбросов и их общей энергии, приходящие на единицу объема, т. е.

$$\langle \mathfrak{V}(t, E) \rangle = \langle \theta(E(\mathbf{r}, t) - E) \rangle = P\{E(\mathbf{r}, t) > E\} = \Pr \left(\frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln \left(\frac{E_0}{E} e^{-\alpha t} \right) \right),$$

$$\langle \mathfrak{E}(t, E) \rangle = E_0 e^{\gamma t} \Pr \left(\frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln \left(\frac{E_0}{E} e^{(2D-\alpha)t} \right) \right),$$
(8.59)

где $\gamma = D - \alpha$.

Если выбрать уровень сечения $E > E_0$, то в начальный момент времени величины $\langle \mathfrak{V}(0, E) \rangle = 0$ и $\langle \mathfrak{E}(0, E) \rangle = 0$. Далее возникают пространственные возмущения поля энергии и при $t \rightarrow \infty$ мы для этих величин получаем асимптотические выражения

$$\langle \mathfrak{V}(t, E) \rangle \approx \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \left(\frac{E_0}{E} \right)^{\alpha/D} e^{-\alpha^2 t/4D} & (\alpha > 0), \\ 1 - \frac{1}{|\alpha|} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{|\alpha|/D} e^{-\alpha^2 t/4D} & (\alpha < 0), \end{cases}$$

и, при $D > \alpha$,

$$\langle \mathfrak{E}(t, E) \rangle \approx E_0 e^{\gamma t} \left[1 - \frac{1}{(2D-\alpha)} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{(2D-\alpha)/D} e^{-(2D-\alpha)^2 t/4D} \right].$$

Таким образом, при $\alpha > 0$ удельный общий объем стремится к нулю, а удельная общая энергия растет со временем так же как средняя энергия, что свидетельствует о кластеризации в этом случае поля энергии.

В случае, когда $\alpha < 0$ кластеризации нет и удельный объем занимает все пространство, в котором удельная энергия растет во времени так же, как и средняя энергия.

Для однородного начального условия при $\alpha = 0$ одноточечная плотность вероятностей принимает вид

$$P(t; E) = \frac{1}{2E\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2[E/E_0]}{4Dt} \right\}.$$

Случайные процессы $E(t)$ и $1/E(t)$ в этом случае статистически эквивалентны и для удельного среднего объема при $t \rightarrow \infty$ получаем, что он асимптотически стремится к половине общего объема, а удельная средняя энергия при этом стремится к полной средней энергии. Таким образом, в этом случае кластеризации нет, но перемежаемость, естественно, остается.

Отметим, что в общем случае при $D_0 = 0$ энергия поля $E(\mathbf{r}, t)$ для однородного начального условия статистически эквивалентна случайному полю

$$f(\mathbf{r}, t; \alpha) = \exp \left\{ -\alpha t + \int_0^t d\tau z(\mathbf{r}, \tau) \right\}, \quad (8.60)$$

где $z(\mathbf{r}, t)$ – гауссово случайное поле, дельта-коррелированное во времени с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$\langle z(\mathbf{r}, t) z(\mathbf{r}', t') \rangle = 2D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t').$$

Реализации гауссова $\ln f(\mathbf{r}, t; 0)$ и логнормального поля $f(\mathbf{r}, t; 0)$ полей при $\alpha = 0$ и их топографические линии уровня были приведены ранее во Введении на рис. 0.1, с. 10. В этом случае поле $f(\mathbf{r}, t; 0)$ соответствует начальной эволюции решения задачи (1.94) на с. 50 для малых времен при однородном начальном условии.

8.4. Об условиях применимости уравнения Фоккера–Планка

Для оценки границ применимости уравнения Фоккера–Планка необходимо учитывать конечность радиуса корреляции τ_0 поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ по временной координате. В этом случае вместо уравнения для плотности вероятностей (8.11) получается уравнение $\hat{E}P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_k} S'(\mathbf{x}, t)$, где \hat{E} – оператор, стоящий в левой части уравнения (8.11),

в котором величина $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ заменена на $\tilde{F}_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \int_0^t dt' B_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$, а член

$S'(\mathbf{x}, t)$ учитывает поправки к вектору плотности потока вероятностей, связанные с конечностью τ_0 . При $\tau_0 \rightarrow 0$ мы возвращаемся к уравнению (8.11). Таким образом, условие малости параметра τ_0/T является необходимым, но вообще говоря, недостаточным для возможности описывать статистические характеристики решения уравнения (8.1) на основе приближения дельта-коррелированного случайного поля, которому соответствует уравнение Фоккера–Планка. Для каждой конкретной задачи необходимо проводить более детальные исследования. Далее, мы приведем физически

более наглядный метод, называемый *диффузионным приближением*, также приводящий к марковости решения уравнения (8.1), но учитывающий, в определенной мере, конечность временного радиуса корреляции.

Здесь же подчеркнем, что приближение дельта-коррелированного случайного поля не означает формальной замены случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ в (8.1) на случайное поле с корреляционной функцией (8.4). Это приближение соответствует построению асимптотического разложения при стремлении временного радиуса корреляции τ_0 поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ к нулю. И при таком предельном переходе точные средние величины типа $\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{x}', \tau)] \rangle$ переходят в выражения, полученные с помощью формальной замены корреляционного тензора поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ на эффективный тензор (8.4).

8.4.1. Уравнение Ланжевена

Проиллюстрируем, выше сказанное, на примере *уравнения Ланжевена*, допускающего полный статистический анализ:

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\lambda x(t) + f(t), \quad x(t_0) = 0, \quad (8.61)$$

где предполагается, что достаточно «хорошая» гладкая функция $f(t)$ – стационарный гауссов случайный процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$\langle f(t) f(t') \rangle = B_f(t - t').$$

Для конкретной реализации случайной силы $f(t)$, решение уравнения (8.61) имеет вид

$$x(t) = \int_{t_0}^t d\tau f(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)}.$$

Следовательно, это решение $x(t)$ – также гауссов процесс с параметрами

$$\langle x(t) \rangle = 0, \quad \langle x(t) x(t') \rangle = \int_{t_0}^t d\tau_1 \int_{t_0}^{t'} d\tau_2 B_f(\tau_1 - \tau_2) e^{-\lambda(t+t'-\tau_1-\tau_2)}.$$

И при этом, например,

$$\langle f(t) x(t) \rangle = \int_0^{t-t_0} d\tau B_f(\tau) e^{-\lambda\tau}.$$

Отметим, что одноточечная плотность вероятностей $P(x, t) = \langle \delta(x(t) - x) \rangle$ для уравнения (8.61) описывается точным уравнением, вытекающим из уравнения (6.24) на с. 142:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial}{\partial x} x \right) P(x, t) = \int_0^{t-t_0} d\tau B_f(\tau) e^{-\lambda\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t), \quad P(x, t_0) = \delta(x),$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle = -2\lambda \langle x^2(t) \rangle + 2 \int_0^{t-t_0} d\tau B_f(\tau) e^{-\lambda\tau}.$$

При $t_0 \rightarrow -\infty$ процесс $x(t)$ переходит в стационарный гауссов процесс с одновременными статистическими параметрами

$$\langle x(t) \rangle = 0, \quad \sigma_x^2 = \langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty d\tau B_f(\tau) e^{-\lambda\tau}, \quad \langle f(t)x(t) \rangle = \int_0^\infty d\tau B_f(\tau) e^{-\lambda\tau}.$$

В частности, для корреляционной функции $B_f(t)$ вида

$$B_f(t) = \sigma_f^2 e^{-|t|/\tau_0},$$

получаем выражения

$$\langle x(t) \rangle = 0, \quad \langle x^2(t) \rangle = \frac{\sigma_f^2 \tau_0}{\lambda(1 + \lambda\tau_0)}, \quad \langle f(t)x(t) \rangle = \frac{\sigma_f^2 \tau_0}{1 + \lambda\tau_0}, \quad (8.62)$$

которые при $\tau_0 \rightarrow 0$ переходят в асимптотические выражения

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{\sigma_f^2 \tau_0}{\lambda}, \quad \langle f(t)x(t) \rangle = \sigma_f^2 \tau_0. \quad (8.63)$$

Умножим теперь уравнение (8.61) на $x(t)$. Считая функцию $x(t)$ достаточно «хорошей» функцией, получаем равенство

$$x(t) \frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2(t) = -\lambda x^2(t) + f(t)x(t).$$

Усредняя его по ансамблю реализаций функции $f(t)$, получаем уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle = -\lambda \langle x^2(t) \rangle + \langle f(t)x(t) \rangle, \quad (8.64)$$

стационарное решение которого

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle f(t)x(t) \rangle,$$

соответствующее предельному переходу $t_0 \rightarrow -\infty$ и $\tau_0 \rightarrow 0$, совпадает с равенствами (8.62), (8.63).

Учитывая, что $\delta x(t)/\delta f(t-0) = 1$, тот же результат получается для корреляции $\langle f(t)x(t) \rangle$, если использовать формулу

$$\langle f(t)x(t) \rangle = \int_{-\infty}^t d\tau B_f(t-\tau) \left\langle \frac{\delta}{\delta f(\tau)} x(t) \right\rangle \quad (8.65)$$

с «эффektivной» корреляционной функцией

$$B_f^{\text{eff}}(t) = 2\sigma_f^2 \tau_0 \delta(t).$$

Как упоминалось выше, статистические характеристики решения динамических задач в приближении дельта-коррелированного случайного процесса (поля) совпадают со статистическими характеристиками марковских процессов. Однако, должно быть ясно понято, что это справедливо только для статистических средних величин и уравнений для них. В частности, для уравнения Ланжевена (8.61), реализации процесса $x(t)$ и соответствующего марковского процесса совершенно различные. Последний описывается уравнением (8.61) с идеальным процессом «белого шума» $f(t)$ в правой части с корреляционной функцией $B_f(t) = 2\sigma_f^2 \tau_0 \delta(t)$ и это уравнение должно пониматься в обобщенном смысле, так как марковские процессы, в обычном смысле, не дифференцируемы. В то же время процесс $x(t)$, чьи статистические характеристики совпадают с характеристиками марковского процесса, — достаточно хорошая функция и дифференцируем в обычном смысле. Например,

$$x(t) \frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2(t),$$

и, в частности, при $t_0 \rightarrow -\infty$

$$\left\langle x(t) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle = 0. \quad (8.66)$$

С другой стороны для идеального марковского процесса $x(t)$, удовлетворяющего уравнению Ланжевена (8.61) в обобщенном смысле с «белым шумом» в правой части, равенство (8.66) вообще не имеет смысла и соотношение

$$\left\langle x(t) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle = -\lambda \langle x^2(t) \rangle + \langle f(t)x(t) \rangle \quad (8.67)$$

зависит от того, как понимаются средние значения. В самом деле, если мы определим равенство (8.67) как предел равенства

$$\left\langle x(t+\Delta) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle = -\lambda \langle x(t)x(t+\Delta) \rangle + \langle f(t)x(t+\Delta) \rangle \quad (8.68)$$

при $\Delta \rightarrow 0$, то результат будет существенно разным в зависимости от предельных переходов $\Delta \rightarrow +0$ или $\Delta \rightarrow -0$. Так для $\Delta \rightarrow +0$ имеем

$$\lim_{\Delta \rightarrow +0} \langle f(t)x(t+\Delta) \rangle = 2\sigma_f^2 \tau_0$$

и, принимая во внимание равенство (8.65), выражение (8.68) можно переписать в виде

$$\left\langle x(t+0) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle = \sigma_f^2 \tau_0. \quad (8.69)$$

Если же $\Delta \rightarrow -0$, то $\langle f(t)x(t-0) \rangle = 0$ из-за условия динамической причинности, и равенство (8.68) принимает вид

$$\left\langle x(t-0) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle = -\sigma_f^2 \tau_0. \quad (8.70)$$

Сравнивая (8.66) с (8.69) и (8.70), видим, что для идеального марковского процесса, описываемого решением уравнением Ланжевена с «белым шумом», и обычно называемом процессом Орнштейна-Уленбека, имеет место

$$\left\langle x(t+0) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle \neq \left\langle x(t-0) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle \neq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle.$$

Отметим, что равенства (8.69) и (8.70) можно также получить из корреляционной функции

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \frac{\sigma_f^2 \tau_0}{\lambda} e^{-\lambda|\tau|}$$

процесса $x(t)$.

В заключение обсуждения приближения дельта-коррелированного случайного процесса (поля) подчеркнем, что во всех дальнейших примерах под фразой типа «динамическая система (уравнение) с дельта-коррелированными флуктуациями параметров» подразумевается асимптотический случай, в котором временные радиусы корреляции для этих параметров малы по сравнению со всеми характерными временами, возникающими в рассматриваемой задаче.

8.5. Причинные интегральные уравнения

Для задач, рассмотренных в предыдущей главе, удастся получить замкнутое статистическое описание в приближении дельта-коррелированного случайного поля, благодаря тому факту, что эти задачи соответствуют системе дифференциальных уравнений первого порядка по времени с начальными условиями при $t = 0$. Для них выполняется условие динамической причинности, которое заключается в том, что решение задачи в момент времени t определяется только флуктуациями параметров системы в предшествующие моменты времени и не зависит от последующих.

Условие причинности, однако, может выполняться и для задач, описываемых интегральными уравнениями, которые, вообще говоря, не всегда сводятся к системе дифференциальных уравнений. Чтобы не загромождать изложение рассмотрим простейший пример одномерного причинного уравнения ($t > t'$)

$$G(t; t') = g(t; t') + \Lambda \int_{t'}^t d\tau g(t; \tau) z(\tau) G(\tau; t'), \quad (8.71)$$

где функция $g(t; t')$ — функция Грина в отсутствие случайностей, а случайную функцию $z(t)$ считаем гауссовой функцией, дельта-коррелированной во времени с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2D\delta(t-t') \quad (D = \sigma_z^2 \tau_0).$$

В этом случае при усреднении уравнения (8.71) по ансамблю реализаций случайной функции $z(t)$, получаем уравнение

$$\langle G(t; t') \rangle = g(t; t') + \Lambda \int_{t'}^t d\tau g(t; \tau) \langle z(\tau)G(\tau; t') \rangle. \quad (8.72)$$

Учитывая теперь, равенство

$$\frac{\delta}{\delta z(t)} G(t; t') = g(t; t) \Lambda G(t; t') \quad (8.73)$$

вытекающее из (8.71), корреляцию в правой части уравнения (8.72) можно записать в виде

$$\langle z(\tau)G(\tau; t') \rangle = D \left\langle \frac{\delta}{\delta z(\tau)} G(\tau; t') \right\rangle = \Lambda D g(\tau; \tau) \langle G(\tau; t') \rangle,$$

и мы видим, что уравнение (8.72) переходит в замкнутое интегральное уравнение для средней функции Грина

$$\langle G(t; t') \rangle = g(t; t') + \Lambda^2 D \int_{t'}^t d\tau g(t; \tau) g(\tau; \tau) \langle G(\tau; t') \rangle, \quad (8.74)$$

которое, имеет форму *уравнения Дайсона* (по терминологии квантовой теории поля)

$$\langle G(t; t') \rangle = g(t; t') + \Lambda \int_{t'}^t d\tau g(t; \tau) \int_{t'}^{\tau} d\tau' Q(\tau; \tau') \langle G(\tau'; t') \rangle, \quad (8.75)$$

или

$$\langle G(t; t') \rangle = g(t; t') + \Lambda \int_{t'}^t d\tau \langle G(t; \tau) \rangle \int_{t'}^{\tau} d\tau' Q(\tau; \tau') g(\tau'; t'),$$

с *массовой функцией* вида

$$Q(\tau; \tau') = \Lambda^2 D g(\tau; \tau) \delta(\tau - \tau').$$

Получим теперь уравнение для корреляционной функции

$$\Gamma(t, t'; t_1, t'_1) = \langle G(t; t') G^*(t_1; t'_1) \rangle \quad (t > t', \quad t_1 > t'_1),$$

где $G^*(t; t')$ — комплексно сопряженная функция Грина. Для этого умножим уравнение (8.71) на $G^*(t_1; t'_1)$ и усредним по ансамблю реализаций случайной функции $z(t)$. В результате получаем уравнение, которое запишем в символическом виде

$$\Gamma = g \langle G^* \rangle + \Lambda g \langle z G G^* \rangle. \quad (8.76)$$

Учитывая уравнение Дайсона (8.75)

$$\langle G \rangle = \{1 + \langle G \rangle Q\} g,$$

подействуем на (8.76) оператором $\{1 + \langle G \rangle Q\}$. В результате получаем уравнение, записанное в символическом виде,

$$\Gamma = \langle G \rangle \langle G^* \rangle + \langle G \rangle \Lambda \{ \langle z G G^* \rangle - Q \Gamma \},$$

которое можно переписать в виде уравнения

$$\begin{aligned} \Gamma(t, t'; t_1, t'_1) &= \langle G(t; t') \rangle \langle G^*(t_1; t'_1) \rangle \\ &+ \Lambda D \int_0^t d\tau \langle G(t; \tau) \rangle \left[\left\langle \frac{\delta G(\tau; t')}{\delta z(\tau)} G^*(t_1; t'_1) + 2G(\tau; t') \frac{\delta G^*(t_1; t'_1)}{\delta z(\tau)} \right\rangle \right] \\ &- \Lambda^2 D \int_0^t d\tau \langle G(t; \tau) \rangle g(\tau; \tau) \Gamma(\tau, t'; t_1, t'_1). \quad (8.77) \end{aligned}$$

При выводе уравнения (8.77) мы также воспользовались формулой (5.31) на с. 126 для расщепления корреляций гауссова дельта-коррелированного процесса $z(t)$ с функциями от него:

$$\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle = \begin{cases} D \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t)} R[t; z(\tau)] \right\rangle & (t' = t, \quad \tau < t), \\ 2D \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t')} R[t; z(\tau)] \right\rangle & (t' < t, \quad \tau < t). \end{cases}$$

Учитывая теперь формулы (8.73) и равенство

$$\frac{\delta}{\delta z(\tau)} G^*(t_1; t'_1) = \Lambda G^*(t_1; \tau) G^*(\tau; t'_1),$$

вытекающее из (8.71), уравнение (8.77) можно переписать в виде

$$\Gamma(t, t'; t_1, t'_1) = \langle G(t; t') \rangle \langle G^*(t_1; t'_1) \rangle + 2|\Lambda|^2 D \int_0^t d\tau \langle G(t; \tau) \rangle \langle G^*(t_1; \tau) G(\tau; t') G^*(\tau; t'_1) \rangle. \quad (8.78)$$

Теперь учтем то обстоятельство, что функция $G^*(t_1; \tau)$ функционально зависит от случайного процесса $z(\tilde{\tau})$ при $\tilde{\tau} \geq \tau$, а функции $G(\tau; t')$ и $G^*(\tau; t'_1)$ — при $\tilde{\tau} \leq \tau$ и, следовательно, для дельта-коррелированного процесса $z(\tilde{\tau})$ статистически независимы. Следовательно уравнение (8.78) можно переписать в виде замкнутого уравнения ($t_1 \geq t$)

$$\Gamma(t, t'; t_1, t'_1) = \langle G(t; t') \rangle \langle G^*(t_1; t'_1) \rangle + 2|\Lambda|^2 D \int_0^t d\tau \langle G(t; \tau) \rangle \langle G^*(t_1; \tau) \rangle \Gamma(\tau; t'; \tau; t'_1). \quad (8.79)$$

8.6. Диффузионное приближение

Условием применимости приближения дельта-коррелированности случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ (т. е. уравнения Фоккера–Планка) является условие малости временного радиуса корреляции случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \tau_0$ по сравнению со всеми временными масштабами, имеющимися в рассматриваемой задаче. Учет конечности временного радиуса корреляции случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ можно провести в рамках диффузионного приближения. Это приближение более наглядно и физично, чем формальное математическое приближение дельта-коррелированного случайного поля. Это приближение справедливо также для достаточно малых флуктуаций параметров стохастической динамической системы и позволяет получить не только условия применимости дельта-коррелированного приближения, но и описать новые физические эффекты, порожденные конечностью временного радиуса корреляции случайных параметров.

В рамках диффузионного приближения предполагается, что влияние случайных воздействий на временных масштабах порядка τ_0 не существенно, т. е. система на этих масштабах эволюционирует как свободная.

Пусть опять векторная функция $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет динамическому уравнению (8.1) на с. 175

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (8.80)$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — векторная детерминированная функция, а $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — случайное статистически однородное в пространстве и стационарное во времени гауссово векторное поле со статистическими характеристиками

$$\langle f(\mathbf{x}, t) \rangle = 0, \quad B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = B_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; t - t') = \langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t') \rangle.$$

Введем индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}), \quad (8.81)$$

где $\mathbf{x}(t)$ — решение уравнения (8.80), удовлетворяющую уравнению Лиувилля (8.6) на с. 176

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (8.82)$$

Уравнение для плотности вероятностей решения уравнения (8.80)

$$P(\mathbf{x}, t) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle$$

получим, как и ранее, усредняя уравнение (8.82) по ансамблю реализаций поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad P(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (8.83)$$

Используя формулу Фурутцу–Новикова (8.10) на с. 177

$$\langle f_k(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \rangle = \int d\mathbf{x}' \int dt' B_{kl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \right\rangle,$$

уравнение (8.83) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{t_0}^t dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} \varphi(\mathbf{x}, t) \right\rangle. \quad (8.84)$$

В диффузионном приближении уравнение (8.84) является точным, а вариационная производная и индикаторная функция на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \tau_0$ описываются системой динамических уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} \right\},$$

$$\frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} \Big|_{t=t'} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}, t') \}, \quad (8.85)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \}, \quad \varphi(\mathbf{x}, t) \Big|_{t=t'} \varphi(\mathbf{x}, t').$$

Решение задачи (8.84), (8.85) справедливо для всех времен t . Однако, в этом случае решение задачи (8.80) $\mathbf{x}(t)$ не является векторным марковским случайным процессом, так как ее многовременная плотность вероятностей не допускает факторизации с помощью плотности вероятностей перехода. В асимптотическом случае $t \gg \tau_0$ решение исходной динамической системы (8.80) в диффузионном приближении уже будет марковским случайным процессом и условиями применимости его является малость всех статистических эффектов на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции τ_0 .

Таким образом, диффузионное приближение позволяет снять основное ограничение, связанное с малостью временного радиуса корреляции τ_0 , оставаясь при этом в рамках марковского процесса.

Задачи

Задача 8.1. Получить уравнение Фоккера–Планка для диффузии лучей, описываемых системой уравнений (1.95) на с. 50

$$\frac{d}{dx}\mathbf{R}(x) = \mathbf{p}(x), \quad \frac{d}{dx}\mathbf{p}(x) = \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{R}}\varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (8.86)$$

для однородного, изотропного гауссова дельта-коррелированного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$B_\varepsilon(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') = \langle \varepsilon(x, \mathbf{R})\varepsilon(x', \mathbf{R}') \rangle = A(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\delta(x - x'), \quad (8.87)$$

Решение. Функция $P(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \langle \delta(\mathbf{R}(x) - \mathbf{R})\delta(\mathbf{p}(x) - \mathbf{p}) \rangle$ описывается уравнением Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) P(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = D \Delta_{\mathbf{R}} P(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}),$$

где коэффициент диффузии

$$D = -\frac{1}{8} \Delta_{\mathbf{R}} A(\mathbf{R})|_{\mathbf{R}=0} = \pi^2 \int_0^\infty d\kappa \kappa^3 \Phi_\varepsilon(0, \kappa).$$

Здесь через функцию

$$\Phi_\varepsilon(q, \kappa) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^\infty dx \int d\mathbf{R} B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) e^{-i(qx + \kappa \mathbf{R})}, \quad A(\mathbf{R}) = 2\pi \int d\kappa \Phi_\varepsilon(0, \kappa) e^{i\kappa \mathbf{R}},$$

обозначена трехмерная спектральная плотность случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

Решение, соответствующее начальному условию $P(0, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \delta(\mathbf{R})\delta(\mathbf{p})$, является гауссовой плотностью вероятностей с параметрами

$$\langle R_j(x) R_k(x) \rangle = \frac{2}{3} D \delta_{jk} x^3, \quad \langle R_j(x) p_k(x) \rangle = D \delta_{jk} x^2, \quad \langle p_j(x) p_k(x) \rangle = 2D \delta_{jk} x.$$

Задача 8.2. Исходя из уравнений (8.86) получить продольную корреляционную функцию смещения луча, для однородного, изотропного гауссова дельта-коррелированного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией (8.87).

Решение.

$$\langle \mathbf{R}(x)\mathbf{R}(x') \rangle = 2D(x')^2 \left(x - \frac{1}{3}x' \right).$$

Задача 8.3. Рассмотреть диффузию двух лучей, описываемых системой уравнений

$$\frac{d}{dx}\mathbf{R}_\nu(x) = \mathbf{p}_\nu(x), \quad \frac{d}{dx}\mathbf{p}_\nu(x) = \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{R}_\nu}\varepsilon(x, \mathbf{R}_\nu),$$

где индексом $\nu = 1, 2$ обозначены номера соответствующих лучей.

Решение. Для совместной плотности вероятностей

$$P(x; \mathbf{R}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{p}_2) = \langle \delta(\mathbf{R}_1(x) - \mathbf{R}_1)\delta(\mathbf{p}_1(x) - \mathbf{p}_1)\delta(\mathbf{R}_2(x) - \mathbf{R}_2)\delta(\mathbf{p}_2(x) - \mathbf{p}_2) \rangle$$

получаем уравнение Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_1} + \mathbf{p}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_2} \right) P(x; \mathbf{R}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{p}_2) = \hat{L} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) P(x; \mathbf{R}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{p}_2),$$

где оператор

$$\hat{L} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) = \frac{\pi}{4} \int d\kappa \Phi_\varepsilon(0, \kappa) \left[\left(\kappa \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \right)^2 + \left(\kappa \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right)^2 + 2 \cos[\kappa(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)] \left(\kappa \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \right) \left(\kappa \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) \right].$$

Задача 8.4. Рассмотреть относительную диффузию двух лучей.

Решение. Плотность вероятностей для относительной диффузии двух лучей

$$P(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \langle \delta(\mathbf{R}_1(x) - \mathbf{R}_2(x) - \mathbf{R})\delta(\mathbf{p}_1(x) - \mathbf{p}_2(x) - \mathbf{p}) \rangle,$$

описывается уравнением Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) P(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} P(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}), \quad (8.88)$$

где через матрицу $D_{\alpha\beta}(\mathbf{R})$ обозначена величина

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = 2\pi \int d\kappa [1 - \cos(\kappa \mathbf{R})] \kappa_\alpha \kappa_\beta \Phi_\varepsilon(0, \kappa).$$

Замечание. Если обозначить через l_0 корреляционный радиус случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, то при условии $R \gg l_0$ функция

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = 2D\delta_{\alpha\beta},$$

т. е. относительная диффузия лучей характеризуется удвоенным коэффициентом диффузия отдельных лучей, что соответствует статистической независимости лучей. В этом предельном случае совместная плотность вероятностей относительной диффузии лучей является гауссовой.

В общем случае уравнение (8.88) не может быть решено в аналитическом виде. Ясно лишь, что в этом случае решение, соответствующее переменному коэффициенту диффузии, не является гауссовым.

Асимптотический случай $R \ll l_0$ можно проанализировать более детально. В этом случае можно разложить функцию $\{1 - \cos(\kappa \mathbf{R})\}$ в ряд Тейлора, и диффузионная матрица примет вид

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = \pi B \left(\mathbf{R}^2 \delta_{\alpha\beta} + 2R_\alpha R_\beta \right), \quad (8.89)$$

где параметр

$$B = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty d\kappa \kappa^5 \Phi_\varepsilon(0, \kappa).$$

Из уравнения (8.88) с коэффициентами (8.89) следуют уравнения для моментных функций:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \langle \mathbf{p}^2(x) \rangle &= 8\pi B \langle \mathbf{R}^2(x) \rangle, & \frac{d}{dx} \langle \mathbf{R}^2(x) \rangle &= 2 \langle \mathbf{R}(x) \mathbf{p}(x) \rangle, \\ \frac{d}{dx} \langle \mathbf{R}(x) \mathbf{p}(x) \rangle &= \langle \mathbf{p}^2(x) \rangle, \end{aligned}$$

которые легко решить. Из решения этой системы следует, что если существует такой интервал значений x , на котором $\alpha x \gg 1$ ($\alpha = (16\pi B)^{1/3}$), но все еще $R_0^2 e^{\alpha x} \ll l_0^2$ (он всегда существует для достаточно малых значений R_0 — начальных расстояний между лучами), то в этой области происходит экспоненциальный рост величин $\langle \mathbf{R}^2(x) \rangle$, $\langle \mathbf{R}(x) \mathbf{p}(x) \rangle$ и $\langle \mathbf{p}^2(x) \rangle$ с расстоянием x .

Задача 8.5. Для простейшей модели поля скоростей (1.3), (1.4) на с. 15

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t) f(kx),$$

где $\mathbf{v}(t)$ — гауссов случайный, дельта-коррелированный во времени векторный процесс с параметрами (1.11) на с. 17, получить уравнение для плотности вероятностей магнитного поля для однородных начальных условий.

Решение. Индикаторная функция для поперечной части магнитного поля в безразмерных переменных (1.12) на с. 18 описывается уравнением (3.27) на с. 79. Усредняя это уравнение по ансамблю реализаций векторной функции $\mathbf{v}(t)$, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t; \mathbf{H}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(f^2(x) \frac{\partial}{\partial x} - f(x) f'(x) \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} \mathbf{H} \right) P(x, t; \mathbf{H}) + \\ &+ \left(1 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} \mathbf{H} \right) \left(-f(x) f'(x) \frac{\partial}{\partial x} + [f'(x)]^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} \mathbf{H} \right) P(x, t; \mathbf{H}) + \\ &+ [f'(x)]^2 E_{x0} \frac{\partial}{\partial H_i} \frac{\partial}{\partial H_i} P(x, t; \mathbf{H}). \end{aligned}$$

Замечание. Если теперь функция $f(x)$ имеет характерный масштаб изменения по $x - k^{-1}$ и является периодической функцией ("быстрое изменение"), то дополнительно усредняя это уравнение по этим масштабам (по x), получаем уравнение для "медленных" пространственных изменений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t; \mathbf{H}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{f^2(x)} \frac{\partial}{\partial x} \right) P(x, t; \mathbf{H}) + \overline{[f'(x)]^2} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} \mathbf{H} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} \mathbf{H} P(x, t; \mathbf{H}) + \\ &+ \overline{[f'(x)]^2} E_{x0} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{H}^2} P(x, t; \mathbf{H}). \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что в силу начальных условий функция $P(x, t; \mathbf{H})$ не зависит от x , получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \mathbf{H}) = D \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} \mathbf{H} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} \mathbf{H} \right) P(t; \mathbf{H}) + D E_{x0} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{H}^2} P(t; \mathbf{H}),$$

где $D = \overline{[f'(x)]^2}$. Нормируя теперь время $t \rightarrow D k^2 \sigma^2 \tau_0 t$, получаем окончательное уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \mathbf{H}) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} \mathbf{H} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} \mathbf{H} \right) P(t; \mathbf{H}) + E_{x0} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{H}^2} P(t; \mathbf{H}). \quad (8.90)$$

Задача 8.6. Для простейшей модели поля скоростей (1.3), (1.4) на с. 15 исходя из уравнения (8.90) получить уравнение для плотности вероятностей генерируемой энергии поперечной части магнитного поля $E(t) = \mathbf{H}^2(t)$.

Решение. Умножая уравнение (8.90) на $\delta(\mathbf{H}^2 - E)$ и интегрируя по \mathbf{H} , получаем уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; E) = \left(2 \frac{\partial}{\partial E} E + 4 \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} E \right) P(t; E) + 4 E_{x0} \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} P(t; E). \quad (8.91)$$

Обезразмерим энергию на E_{x0} . В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; E) = \left(2 \frac{\partial}{\partial E} E + 4 \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} E \right) P(t; E) + 4 \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} P(t; E), \quad (8.92)$$

с начальным условием

$$P(0; E) = \delta(E - \beta),$$

где параметр $\beta = E_{\perp 0} / E_{x0}$.

Замечание. Следует иметь в виду, что задача (8.92) является краевой задачей и краевыми условиями по E являются условия равенства плотности вероятности нулю при $E = 0$ и $E = \infty$ в любой момент времени $t > 0$. При этом в общем случае уравнения (8.92) для распределения вероятностей существует стационарное распределение с бесконечными моментами, не зависящее от параметра β ,

$$P(\infty; E) = \frac{1}{2(E+1)^{3/2}}. \quad (8.93)$$

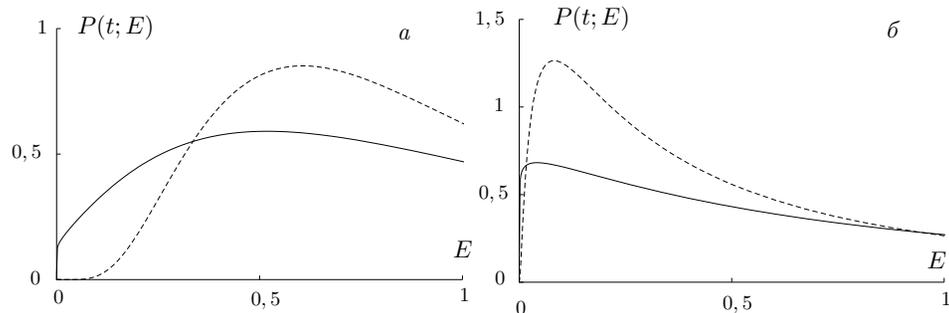


Рис. 8.7. Распределения плотностей вероятностей при $\beta = 1$ в моменты времени $t = 0,05$ (а) и $t = 0,25$ (б).

Следует также иметь в виду, что это распределение является обобщенной функцией и справедливо на интервале $(0, \infty)$. В точке же $x = 0$ плотность вероятностей должна обращаться в нуль.

Отметим, что при $\beta = 1$ и $E_{x0} = 0$ плотность вероятностей для энергии, нормированной на $E_{\perp 0}$, описывается уравнением (8.92) при отсутствии последнего члена и, следовательно, ее распределение вероятностей является логнормальным

$$P(t; E) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t E}} \exp \left\{ -\frac{1}{16t} \ln^2 (E e^{2t}) \right\}. \quad (8.94)$$

Такая структура плотности вероятностей будет, очевидно, определяющей только для очень малых значений времени, на которых генерирующий член еще не существен. Так на рис. 8.7 приведены решения уравнения (8.92) (сплошные кривые), полученные численным интегрированием, для параметра $\beta = 1$ при $t = 0,05$ (а) и $t = 0,25$ (б). Пунктирной кривой на этих рисунках изображено логнормальное распределение (8.94). Из этих рисунков видно, что уже на малых временах член в уравнении (8.92), обеспечивающий генерацию энергии, является преобладающим.

На рис. 8.8 а и б изображено решение уравнения (8.92) (сплошная кривая) для параметра $\beta = 0$ (т.е. плотность вероятностей генерируемой магнитной энергии) при $t = 10$ и асимптотическая кривая (8.93) (пунктирная линия). Эти рисунки свидетельствуют о том, что только "хвост" решения уравнения (8.92) выходит на асимптотическое решение (8.93) (а), но при этом очень медленно (б). Пересечение этих кривых происходит в силу нормировки рассматриваемых плотностей вероятностей. По-видимому, далее плотность вероятностей $P(t; E)$ будет сближаться с "хвостом" стационарного распределения.

Задача 8.7. Исходя из уравнения (8.92) получить выражение для среднего значения логарифма энергии $\langle \ln E(t) \rangle$ и асимптотику при $t \rightarrow \infty$ моментных функций энергии $\langle E^n(t) \rangle$ (при $\beta = 0$).

Решение. $\langle \ln E(t) \rangle = \ln \beta - 2t$ и $\langle E^n(t) \rangle = \frac{2^n (n!)^2}{(4n - 3)!!} e^{2n(2n-1)t}$.

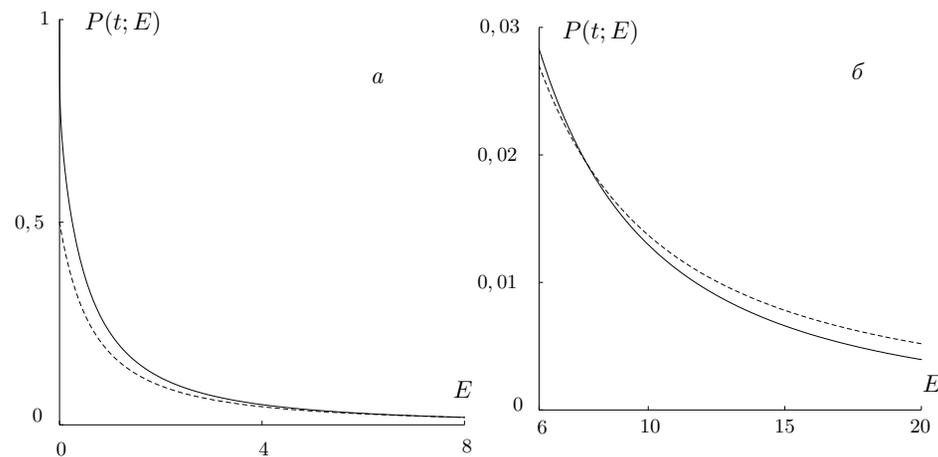


Рис. 8.8. Распределение плотности вероятностей при $\beta = 0$ в момент времени $t = 10$ на интервалах значений энергии $(0, 8)$ (а) и $(6, 20)$ (б).

Задача 8.8. Установить связь между полями $q(\mathbf{r}, t)$ и $p(\mathbf{r}, t)$, моментные функции которых описываются выражениями

$$\langle q^n(\mathbf{r}, t) \rangle = \exp \{n(n + 0,5)t\}, \quad \langle p^n(\mathbf{r}, t) \rangle = \exp \{n(n - 0,5)t\}.$$

Для какого поля имеет место кластеризация?

Решение. Функция $q(\mathbf{r}, t) = 1/p(\mathbf{r}, t)$ и кластеризация осуществляется для поля $p(\mathbf{r}, t)$.

Задача 8.9. Показать, что интегральное уравнение (8.71) эквивалентно уравнению в вариационных производных

$$\frac{\delta}{\delta z(\tau)} G(t, t') = G(t, \tau) \Lambda G(\tau, t') \quad (t' \leq \tau \leq t)$$

с начальным условием

$$G(t, t')|_{z(\tau)=0} = g(t, t').$$

Задача 8.10. Построить диффузионное приближение для задачи о динамике частицы в поле случайных сил, описываемой стохастической системой (1.14) на с. 20

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t), \quad \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = -\lambda \mathbf{v}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0.$$

Решение. Совместная одновременная плотность вероятностей положения частицы и ее скорости

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \langle \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}) \rangle$$

описывается уравнением Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{\partial}{\partial v_i} \left\{ D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial v_j} + D_{ij}^{(2)}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial r_j} \right\} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (8.95)$$

с коэффициентами диффузии

$$D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v}) = \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} B_{ij} \left(\frac{1}{\lambda} [e^{\lambda\tau} - 1] \mathbf{v}, \tau \right), \quad (8.96)$$

$$D_{ij}^{(2)}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty d\tau [1 - e^{-\lambda\tau}] B_{ij} \left(\frac{1}{\lambda} [e^{\lambda\tau} - 1] \mathbf{v}, \tau \right).$$

Задача 8.11. Получить в диффузионном приближении стационарное распределение вероятностей для скорости частицы для динамической системы (1.14) на с. 20 в одномерном случае для корреляционной функции случайной внешней силы вида

$$B_f(x, t) = \sigma_f^2 \exp \left\{ -\frac{|x|}{l_0} - \frac{|t|}{\tau_0} \right\}.$$

Решение. Стационарная плотность вероятностей для скорости частицы (т. е. плотность вероятностей в пределе $t \rightarrow \infty$) описывается уравнением, вытекающим из (8.95):

$$-\lambda v P(v) = D(v) \frac{\partial}{\partial v} P(v), \quad (8.97)$$

где, согласно (8.96),

$$D(v) = \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} B \left(\frac{1}{\lambda} [e^{\lambda\tau} - 1] v, \tau \right).$$

Для достаточно малого трения ($\lambda\tau_0 \ll 1$) решение уравнения (8.97) имеет вид

$$P(v) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda v^2}{2\sigma_f^2 \tau_0} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{|v|\tau_0}{l_0} \right] \right\}. \quad (8.98)$$

Для малых значений скорости частицы $|v|\tau_0 \ll l_0$ распределение вероятностей (8.98) переходит в гауссово распределение, соответствующее приближению дельта-коррелированности во времени случайного поля $f(x, t)$. Однако, в обратном предельном случае $|v|\tau_0 \gg l_0$ распределение вероятностей (8.98) убывает значительно быстрее, а именно

$$P(v) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda v^2 |v|}{3\sigma_f^2 l_0} \right\}, \quad (8.99)$$

что соответствует убыванию коэффициента диффузии по закону $D(v) \sim 1/|v|$ для больших значений скорости частицы. С физической точки зрения, это означает, что влияние поля случайных сил $f(x, t)$ на быстро двигающиеся частицы существенно меньше, чем на более медленно двигающиеся частицы.

Очерк 9

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ И АНАЛИЗА УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА

Уравнение Фоккера–Планка для одноточечной плотности вероятностей (8.11) на с. 177 и для плотности вероятностей перехода (8.16) на с. 178 относятся к параболическому типу уравнений в частных производных, и для их решения можно использовать методы теории уравнений математической физики. Основными методами при этом являются метод разделения переменных, преобразование Фурье по пространственным координатам и другие интегральные преобразования.

9.1. Интегральные преобразования

Весьма мощным методом решения уравнения Фоккера–Планка является метод, основанный на использовании интегральных преобразований. Так, как указывалось ранее, если тензор коэффициентов диффузии $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t)$ в (8.11) не зависит от \mathbf{x} , то можно использовать интегральное преобразование Фурье. В других случаях используются интегральные преобразования связанные с собственными функциями диффузионного оператора

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t).$$

Например, для оператора Лежандра

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x}$$

естественно воспользоваться интегральным преобразованием, связанным с функциями Лежандра. Это преобразование называется *преобразованием Мелера–Фока* и определяется посредством интеграла

$$F(\mu) = \int_1^\infty dx f(x) P_{-1/2+i\mu}(x) \quad (\mu > 0), \quad (9.1)$$

где $P_{-1/2+i\mu}(x)$ — функция Лежандра первого рода, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d}{dx} (x^2 - 1) \frac{d}{dx} P_{-1/2+i\mu}(x) = -\left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) P_{-1/2+i\mu}(x). \quad (9.2)$$

Формула обращения для преобразования (9.1) имеет вид

$$f(x) = \int_0^\infty d\mu \mu \tanh(\pi\mu) F(\mu) P_{-1/2+i\mu}(x) \quad (1 \leq x \leq \infty), \quad (9.3)$$

где $F(\mu)$ описывается формулой (9.1).

Другое интегральное преобразование, называемое интегральным *преобразованием Контровича–Лебедева*, связано с диффузионным оператором

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial x} x^2 \frac{\partial}{\partial x}$$

и имеет вид

$$F(\tau) = \int_0^{\infty} dx f(x) K_{i\tau}(x) \quad (\tau > 0),$$

где $K_{i\tau}(x)$ — функция Макдональда первого рода, удовлетворяющая уравнению

$$\left(\frac{d}{dx} x^2 \frac{d}{dx} - x \frac{d}{dx} \right) K_{i\tau}(x) = (x^2 - \tau^2) K_{i\tau}(x). \quad (9.4)$$

Формула обращения при этом имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2 x} \int_0^{\infty} d\tau \sinh(\pi\tau) F(\tau) K_{i\tau}(x). \quad (9.5)$$

9.2. Стационарные решения уравнения Фоккера–Планка

Выше мы говорили об общих методах решения уравнения Фоккера–Планка как для плотности вероятностей перехода, так и для одноточечной плотности вероятностей. Задача о нахождении одноточечной плотности вероятностей, однако, может иметь и специфические черты, связанные с возможностью существования стационарного решения, которое в ряде случаев удается найти непосредственно. Это стационарное решение, если оно существует, не зависит от начальных условий и представляет предельное при $t \rightarrow \infty$ решение уравнения Фоккера–Планка.

Существуют два класса задач, для которых стационарное решение уравнения Фоккера–Планка находится легко. Это, во-первых, случай одномерных нелинейных уравнений и, во-вторых, случай гамильтоновых систем уравнений. Рассмотрим эти случаи более подробно.

9.2.1. Одномерное нелинейное уравнение

Одномерные нелинейные системы с флуктуирующими параметрами описываются стохастическим уравнением

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x) + z(t)g(x), \quad x(0) = x_0, \quad (9.6)$$

где, как и ранее, $z(t)$ — гауссов дельта-коррелированный процесс с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2D\delta(t-t') \quad (D = \sigma_z^2 \tau_0).$$

Соответствующее уравнение Фоккера–Планка имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right) P(x, t) = D \frac{\partial}{\partial x} g(x) \frac{\partial}{\partial x} g(x) P(x, t). \quad (9.7)$$

Стационарное распределение вероятностей $P(x)$, если оно существует, удовлетворяет уравнению

$$f(x)P(x) = Dg(x) \frac{d}{dx} g(x) P(x) \quad (9.8)$$

(мы считаем, что функция $P(x)$ сосредоточена во всей области пространства, т. е. $-\infty < x < \infty$), решение которого таково:

$$P(x) = \frac{C}{|g(x)|} \exp \left\{ \frac{1}{D} \int dx \frac{f(x)}{g^2(x)} \right\}, \quad (9.9)$$

где постоянная C определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx P(x) = 1.$$

В частном случае уравнения Ланжевена (8.61) на с. 195, соответствующему в уравнении (9.6) значениям функций $f(x) = -\lambda x$ и $g(x) = 1$, выражение (9.9) принимает вид гауссова распределения вероятностей:

$$P(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi D}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2D} x^2 \right\}. \quad (9.10)$$

9.2.2. Гамильтоновы системы

Другой тип уравнений, позволяющий получать стационарное распределение вероятностей для N частиц, описывается гамильтоновой системой уравнений для i -ой частицы с линейным трением и внешней случайной силой:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_i(t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} H(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}), \quad (9.11)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_i(t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} H(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}) - \lambda \mathbf{p}_i(t) + \mathbf{f}_i(t),$$

где $i = 1, 2, \dots, N$, а функция Гамильтона

$$H(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}) = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2(t)}{2} + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N).$$

Здесь через $\{\mathbf{r}_i\}$, $\{\mathbf{p}_i\}$ обозначены совокупности всех величин $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{p}(t)$, т. е. $\{\mathbf{r}_i\} = \{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N\}$, $\{\mathbf{p}_i\} = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N\}$, λ — постоянный коэффициент (трение), а случайные силы $\mathbf{f}_i(t)$ — гауссовы дельта-коррелированные случайные векторные функции с тензором корреляций

$$\langle f_i^\alpha(t) f_j^\beta(t') \rangle = 2D \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \delta(t-t'), \quad D = \sigma_f^2 \tau_0. \quad (9.12)$$

Здесь α и β — векторные индексы.

Система уравнений (9.11) описывает броуновское движение системы N взаимодействующих частиц. Соответствующая индикаторная функция $\varphi(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}, t) + \sum_{k=1}^N \{H, \varphi\}_{(k)} - \lambda \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_k} \{\mathbf{p}_k \varphi\} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_k} \{\mathbf{f}_k(t) \varphi\},$$

обобщающему уравнение (3.58) на с. 87, и, следовательно, уравнение Фоккера–Планка для совместной плотности вероятностей решения системы (9.11) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}, t) + \sum_{k=1}^N \{H, P\}_{(k)} - \lambda \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_k} \{\mathbf{p}_k P\} = D \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}_k^2} P(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}, t), \quad (9.13)$$

где

$$\{\varphi, \psi\}_{(k)} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}_k} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}_k} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}_k} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_k}$$

— скобка Пуассона для k -ой частицы.

Легко проверить, что стационарное решение уравнения (9.13) имеет вид *канонического распределения Гиббса*:

$$P(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} H(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}) \right\}. \quad (9.14)$$

Характерной чертой этого распределения является гауссовость по импульсным переменным и статистическая независимость координат и импульсов частиц.

Проинтегрировав (9.14) по всем \mathbf{r} , можно получить *максвелловское распределение* по скоростям, описывающие флуктуации скорости броуновских частиц. Случай $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0$ соответствует описанию броуновского движения свободных частиц.

Если проинтегрировать распределение вероятностей (9.14) по импульсам (скоростям), то получаем *больцмановское распределение* по координатам частицы:

$$P(\{\mathbf{r}_i\}) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} U(\{\mathbf{r}_i\}) \right\}. \quad (9.15)$$

При достаточно большом коэффициенте трения равновесное распределение (9.14) устанавливается в две стадии. Сперва достаточно быстро устанавливается гауссово распределение по импульсам (максвелловское распределение), а затем уже значительно медленнее устанавливается распределение по пространственной координате (больцмановское распределение). Последняя стадия описывается при этом уравнением Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\{\mathbf{r}_i\}, t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} \left(\frac{\partial U(\{\mathbf{r}_i\})}{\partial \mathbf{r}_k} P(\{\mathbf{r}_i\}, t) \right) + \frac{D}{\lambda^2} \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_k^2} P(\{\mathbf{r}_i\}, t), \quad (9.16)$$

которое обычно называется *уравнением Эйнштейна–Смолуховского*. Переход от уравнения Фоккера–Планка (9.13) к уравнению (9.16) также называется *проблемой Крамера* (см. обсуждение этого вопроса на примере динамики частиц под действием

случайной силы в разделе 6.2.1. на с. 142). Отметим, что уравнению (9.16) статистически эквивалентно стохастическое уравнение

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_i(t) = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U(\{\mathbf{r}_i\}) + \frac{1}{\lambda} \mathbf{f}_i(t),$$

которое, однако, нельзя рассматривать как предел уравнения (9.11) при $\lambda \rightarrow \infty$.

В одномерном случае уравнения (9.11) упрощаются и принимают вид системы уравнений

$$\frac{d}{dt} x(t) = y(t), \quad \frac{d}{dt} y(t) = -\frac{\partial}{\partial x} U(x) - \lambda y(t) + f(t), \quad (9.17)$$

стационарное распределение вероятностей для которой имеет вид

$$P(x, y) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} H(x, y) \right\}, \quad H(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x). \quad (9.18)$$

9.2.3. Системы гидродинамического типа

Общая динамика простейших систем гидродинамического типа (СГТ) рассматривалась в п. 1.1.3 на с. 23. Рассмотрим теперь статистическое описание этих систем.

Системы гидродинамического типа при наличии линейного трения описываются динамическими уравнениями

$$\frac{d}{dt} v_i(t) = F_i(\mathbf{v}) - \lambda^{(i)} v_i(t) \quad (i = 1, \dots, N), \quad (9.19)$$

где $\lambda^{(i)}$ — коэффициент трения i -й компоненты N -мерного вектора \mathbf{v}^1 , а $F_i(\mathbf{v})$ — квадратичная по \mathbf{v} функция, обладающая свойствами:

- $v_i F_i(\mathbf{v}) = 0$ (при $\lambda^{(i)} = 0$ имеет место закон сохранения энергии $\frac{d}{dt} E(t) = 0$, $E(t) = \frac{1}{2} \mathbf{v}_i^2(t)$);
- $\frac{\partial}{\partial v_i} F_i(\mathbf{v}) = 0$ (при $\lambda^{(i)} = 0$ выполняются условия теоремы Лиувилля и это равенство является уравнением несжимаемости в фазовом пространстве).

Равновесные тепловые флуктуации в системах гидродинамического типа

Остановимся на классе явлений, тесно примыкающих к броуновскому движению, а именно на равновесных тепловых флуктуациях в сплошных средах.

Макроскопические уравнения описывают поведение физических систем только для пространственных масштабов, больших по сравнению с длиной свободного пробега молекул в среде, и для времен, больших по сравнению со временем между соударениями молекул. В этом смысле макроскопические уравнения правильно описывают

¹В общем случае диссипативный член в (9.19) имеет вид $\lambda_{ik} v_k$. Однако всегда можно выбрать систему координат, в которой две положительно определенные формы, энергия $E = v_i^2/2$ и диссипация $\lambda_{ik} v_i v_k$, имеют диагональный вид. Вид уравнения (9.19) соответствует записи в такой системе координат.

поведение систем только в среднем. Однако наличие теплового движения молекул приводит к тому, что, вообще говоря, макроскопические переменные являются стохастическими и полная макроскопическая теория должна описывать не только поведение системы в среднем, но и флуктуации относительно среднего.

Такое описание можно провести в рамках тех же макроскопических переменных, включив в соответствующие макроскопические уравнения «сторонние силы»: гауссовы случайные поля, дельта-коррелированные во времени (это имеет непосредственное отношение к флуктуационно-диссипативной теореме см., например, [55]). Построенные на этой основе корреляционные теории равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, гидродинамике и в упруго-вязких средах изложены в работах [54–56].

Равновесные тепловые флуктуации в СГТ будут описываться уравнением (9.19) с включением в него «сторонних сил» $f_i(t)$:

$$\frac{d}{dt}v_i(t) = F_i(\mathbf{v}) - \lambda^{(i)}v_i(t) + f_i(t) \quad (i = 1, \dots, N), \quad (9.20)$$

которые являются гауссовыми дельта-коррелированными во времени случайными функциями с тензором корреляций

$$\langle f_i(t)f_j(t') \rangle = 2\delta_{ij}\sigma_{(i)}^2\delta(t-t') \quad (\langle f(t) \rangle = 0). \quad (9.21)$$

Отметим, что систему уравнений (9.20) можно трактовать как систему, описывающую броуновское движение СГТ. В этом случае коэффициенты $\lambda^{(i)}$ являются некими эффективными коэффициентами трения. Так, в случае $N = 3$ система (9.20) описывает вращательное броуновское движение твердого тела в среде (в пространстве скоростей) и величины $\lambda^{(i)}v_i(t)$ определяются как соответствующие силы сопротивления.

Плотность вероятностей для решения $\mathbf{v}(t)$ уравнения (9.20), т.е. функция $P(\mathbf{v}, t) = \langle \delta(\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}) \rangle$, удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\mathbf{v}, t) = -\frac{\partial}{\partial v_i}\{F_i(\mathbf{v})P(\mathbf{v}, t)\} + \lambda^{(i)}\frac{\partial}{\partial v_i}\{v_iP(\mathbf{v}, t)\} + \sigma_{(i)}^2\frac{\partial^2}{\partial v_i^2}P(\mathbf{v}, t). \quad (9.22)$$

Стационарное решение уравнения (9.22), не зависящее от начальных данных, должно иметь характер максвелловского распределения, соответствующего закону равномерного распределения энергии по степеням свободы:

$$P(\mathbf{v}) = C \exp\left\{-\frac{v_i^2}{2kT}\right\}, \quad (9.23)$$

где k — постоянная Больцмана, а T — равновесная температура в системе.

Подставляя (9.23) в (9.22), получаем для величин $\sigma_{(i)}^2$ равенство

$$\sigma_{(i)}^2 = \lambda^{(i)}kT, \quad (9.24)$$

которое называется *формулой Эйнштейна*. При этом, в силу условий (а) и (б) имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial v_i}\{F_i(\mathbf{v})P(\mathbf{v}, t)\} = 0.$$

Соотношения (9.21) и (9.24), таким образом, полностью определяют статистику «сторонних сил», и нелинейный член в уравнении (9.20) для одновременных флуктуации $\mathbf{v}(t)$ роли не играет. Это свойство и составляет содержание флуктуационно-диссипативной теоремы (см. [55, 56]) в применении к СГТ.

Отметим, что уравнения (9.20) с соотношениями корреляции (9.21) могут описывать не только равновесные тепловые флуктуации в СГТ, но и воздействие мелкомасштабных движений (например, микротурбулентности) на более крупномасштабные движения. Если при этом СГТ может быть описана системой феноменологических уравнений (9.20) с $\lambda^{(i)} = \lambda = \text{const}$, $\sigma_{(i)}^2 = \sigma^2 = \text{const}$, то стационарное распределение вероятностей для \mathbf{v} имеет вид, аналогичный распределению (9.23), а именно

$$P(\mathbf{v}) = C \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\sigma^2}v_i^2\right\}. \quad (9.25)$$

Шумы в системах гидродинамического типа при наличии регулярной силы

В качестве иллюстрации статистического описания СГТ рассмотрим простейшую систему с тремя степенями свободы (S_3), описываемую системой уравнений (1.25) на с. 25:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_0(t) &= v_2^2(t) - v_1^2(t) - v_0(t) + R + f_0(t), \\ \frac{d}{dt}v_1(t) &= v_0(t)v_1(t) - v_1(t) + f_1(t), \\ \frac{d}{dt}v_2(t) &= -v_0(t)v_2(t) - v_2(t) + f_2(t). \end{aligned} \quad (9.26)$$

Считаем, что $f_i(t)$ — гауссовы случайные силы, дельта-коррелированные во времени с тензором корреляции

$$\langle f_i(t)f_j(t') \rangle = 2\delta_{ij}\sigma^2\delta(\tau).$$

При отсутствии «сторонних сил» эта система эквивалентна уравнениям Эйлера динамики гироскопа с изотропным трением, возбуждаемого постоянным моментом внешних сил относительно неустойчивой оси. Стационарное решение этой системы определяется параметром R (аналогом числа Рейнольдса). Критическим значением при этом является $R_{\text{кр}} = 1$.

При $R < 1$ имеется устойчивое стационарное решение

$$v_{1\text{ст}} = v_{2\text{ст}} = 0, \quad v_{0\text{ст}} = R. \quad (9.27)$$

При $R > 1$ это решение становится неустойчивым по отношению к малым возмущениям параметров и устанавливается новый стационарный режим

$$v_{0\text{ст}} = 1, \quad v_{2\text{ст}} = 0, \quad v_{1\text{ст}} = \pm\sqrt{R-1}. \quad (9.28)$$

При этом имеется элемент случайности, а именно: величина $v_{1\text{ст}}$ может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от амплитуды малых возмущений.

Если $R = 0$, то, как указывалось выше, стационарное распределение вероятностей имеет вид

$$P(\mathbf{v}) = C \exp \left\{ -\frac{v_i^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (9.29)$$

Пусть теперь $R \neq 0$ и $R < 1$. Тогда для флуктуации компонент относительно их стационарных значений ($\tilde{v}_i = v_i - v_{i \text{ ст}}$) получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{v}_0(t) &= \tilde{v}_2^2(t) - \tilde{v}_1^2(t) - \tilde{v}_0(t) + f_0(t), \\ \frac{d}{dt} \tilde{v}_1(t) &= \tilde{v}_0(t)\tilde{v}_1(t) - (1 - R)\tilde{v}_1(t) + f_1(t), \\ \frac{d}{dt} \tilde{v}_2(t) &= -\tilde{v}_0(t)\tilde{v}_2(t) - (1 + R)\tilde{v}_2(t) + f_2(t). \end{aligned} \quad (9.30)$$

Для нахождения статистических характеристик решения системы (9.30) можно воспользоваться теорией возмущений по малому параметру σ^2 . Вторые моменты компонент \tilde{v}_i будут описываться при этом линеаризованной системой уравнений (9.30), а средние значения можно получить затем уже непосредственным усреднением системы (9.30). Стационарные значения дисперсии флуктуации \tilde{v}_i найденные таким образом, имеют вид

$$\langle \tilde{v}_0^2(t) \rangle = \sigma^2, \quad \langle \tilde{v}_1^2(t) \rangle = \frac{\sigma^2}{1 - R}, \quad \langle \tilde{v}_2^2(t) \rangle = \frac{\sigma^2}{1 + R}. \quad (9.31)$$

Отметим, что формулы (9.31) применимы при $R \ll 1$. При увеличении R увеличивается как интенсивность, так и временной радиус корреляций для компоненты \tilde{v}_1 , в то время как интенсивность флуктуации величины \tilde{v}_2 уменьшается. Максимум флуктуации для величины \tilde{v}_1 при этом достигается при переходе динамической системы через критический режим.

Рассмотрим теперь случай, когда $R > 1$. Стационарное распределение вероятностей для компоненты v_1 имеет вид с двумя максимумами в окрестности $v_1 = \pm\sqrt{R-1}$, соответствующими устойчивым стационарным состояниям, и минимум $v_1 = 0$, соответствующий неустойчивому состоянию. Это распределение вероятностей возникает при усреднении по ансамблю реализаций случайных сил $f_i(t)$. Если же имеется одна реализация, то система с вероятностью $1/2$ придет в одно из положений, соответствующих максимуму распределения. В этом случае будет формироваться распределение вероятностей (усреднение по времени или по ансамблю сил, приводящих систему в это состояние) в окрестности положений максимума, и для нахождения статистических характеристик решения может быть использована теория возмущений по параметру σ^2 .

Пусть система приходит в состояние, соответствующее устойчивому положению равновесия $v_{2 \text{ ст}} = 0$, $v_{1 \text{ ст}} = \sqrt{R-1}$. Тогда для флуктуации относительно этого состо-

яния имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{v}_0(t) &= \tilde{v}_2^2(t) - \tilde{v}_1^2(t) - 2\sqrt{R-1}\tilde{v}_1(t) - \tilde{v}_0(t) + f_0(t), \\ \frac{d}{dt} \tilde{v}_1(t) &= \tilde{v}_0(t)\tilde{v}_1(t) + \sqrt{R-1}\tilde{v}_0(t) + f_1(t), \\ \frac{d}{dt} \tilde{v}_2(t) &= -\tilde{v}_0(t)\tilde{v}_2(t) - 2\tilde{v}_2(t) + f_2(t). \end{aligned} \quad (9.32)$$

При $R \gg 1$ вторые моменты флуктуации \tilde{v}_i описываются линеаризованной системой (9.32), а средние значения величин определяются затем непосредственным усреднением (9.32). Таким образом, получаем при $R \gg 1$ стационарные значения дисперсии и корреляции компонент триплета

$$\begin{aligned} \langle \tilde{v}_0(t)\tilde{v}_2(t) \rangle &= \langle \tilde{v}_1(t)\tilde{v}_2(t) \rangle = 0, & \langle \tilde{v}_0(t)\tilde{v}_1(t) \rangle &= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{R}}, \\ \langle \tilde{v}_0^2(t) \rangle &= 3\sigma^2, & \langle \tilde{v}_1^2(t) \rangle &= \frac{3}{2}\sigma^2, & \langle \tilde{v}_2^2(t) \rangle &= \frac{\sigma^2}{2}. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Как отмечалось выше, эти статистические характеристики соответствуют усреднению по времени или по ансамблю реализаций сил $f_i(t)$, приводящих систему в указанное состояние. Следует отметить, что если мы имеем некую реализацию $f_i(t)$ и система пришла в одно из наиболее вероятных состояний, то благодаря существованию достаточно больших значений $f_i(t)$ система по прошествии некоторого времени T (тем большего, чем меньше σ^2 и больше R) будет переброшена в другое наиболее вероятное состояние. Результат численного моделирования этого процесса приведен на рис. 1.5 на с. 25 для одной реализации случайных сил.

Рассмотрим теперь флуктуации компонент $v_i(t)$ при критическом режиме (т. е. при $R = 1$). Уравнения для флуктуации относительно состояния $v_{1 \text{ ст}} = v_{2 \text{ ст}} = 0$, $v_{0 \text{ ст}} = R$ можно получить, полагая $R = 1$ либо в (9.30), либо в (9.32). Флуктуации компоненты $\tilde{v}_2(t)$ в этом случае можно описывать линеаризованным уравнением ($\sigma^2 \ll 1$), и для стационарного значения ее дисперсии получаем

$$\langle \tilde{v}_2^2(t) \rangle = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Компоненты $\tilde{v}_0(t)$ и $\tilde{v}_1(t)$ будут описываться уже нелинейной системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{v}_0(t) &= -\tilde{v}_1^2(t) - \tilde{v}_0(t) + f_0(t), \\ \frac{d}{dt} \tilde{v}_1(t) &= \tilde{v}_0(t)\tilde{v}_1(t) + f_1(t), \end{aligned} \quad (9.34)$$

и линеаризация недопустима.

Усредняя систему (9.34), получаем для стационарных значений флуктуаций

$$\langle \tilde{v}_0(t)\tilde{v}_1(t) \rangle = 0, \quad \langle \tilde{v}_0(t) \rangle = -\langle \tilde{v}_1^2(t) \rangle.$$

Как отмечалось выше, при критическом режиме усиливается интенсивность флуктуации \tilde{v}_1 и, следовательно, увеличивается величина $\langle \tilde{v}_0(t) \rangle$. В то же время дисперсия флуктуации $\tilde{v}_0(t)$ существенно не изменяется. В самом деле, из системы (9.34) получаем для дисперсии стационарных флуктуаций $\tilde{v}_0(t)$ выражение

$$\langle \tilde{v}_0^2(t) \rangle = 2\sigma^2.$$

Поэтому ясно, что для оценки флуктуаций $\tilde{v}_0(t)$ и $\tilde{v}_1(t)$ можно заменить во втором уравнении системы (9.34) величину $\tilde{v}_0(t)$ на $\langle \tilde{v}_0(t) \rangle$ и, следовательно, рассматривать упрощенную систему:

$$\frac{d}{dt} \tilde{v}_0(t) = -\tilde{v}_1^2(t) - \tilde{v}_0(t) + f_0(t),$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{v}_1(t) = \langle \tilde{v}_0(t) \rangle \tilde{v}_1(t) + f_1(t).$$

Отсюда получаем для стационарных флуктуации $\tilde{v}_0(t)$ и $\tilde{v}_1(t)$ выражения

$$\langle \tilde{v}_1^2(t) \rangle = -\langle \tilde{v}_0(t) \rangle = \sigma.$$

Аналогичным образом для временного радиуса корреляции флуктуаций величины $\tilde{v}_1(t)$ получаем оценку

$$\tau \sim 1/\sigma.$$

Выше мы рассматривали поведение триплета, когда случайные силы действовали на все переменные. Посмотрим, что изменится, когда случайная сила действует только на одну неустойчивую компоненту, а именно $v_0(t)$ (т. е. сила, действующая на компоненту $v_0(t)$, имеет регулярную R и случайную составляющие). Динамическая система в этом случае принимает вид ($R > 1$)

$$\frac{d}{dt} v_0(t) = -v_1^2(t) - v_0(t) + R + f(t),$$

$$\frac{d}{dt} v_1(t) = v_0(t)v_1(t) - v_1(t).$$

В системе (9.35) опущены члены, связанные с компонентой $v_2(t)$, так как легко видеть, что она в рассматриваемой задаче возбуждаться не будет.

Представим компоненту $v_0(t)$ в виде $v_0(t) = 1 + \tilde{v}_0(t)$. Тогда система уравнений (9.35) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \tilde{v}_0(t) = -v_1^2(t) - \tilde{v}_0(t) + (R-1) + f(t),$$

$$\frac{d}{dt} v_1(t) = \tilde{v}_0(t)v_1(t),$$

и эволюция компоненты $v_1(t)$ определяется ее начальным значением. Если $v_1(0) > 0$, то и $v_1(t) > 0$. Представляя в этом случае $v_1(t)$ как

$$v_1(t) = e^{\varphi(t)},$$

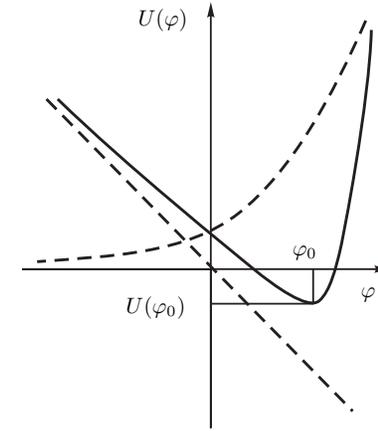


Рис. 9.1. График зависимости потенциальной функции $U(\varphi)$. Штриховыми линиями обозначены кривая $U(\varphi) = \frac{1}{2}e^{2\varphi}$ и прямая $U(\varphi) = -(R-1)\varphi$

систему уравнений (9.36) можно записать в гамильтоновом виде (9.17)

$$\frac{d}{dt} \tilde{v}_0(t) = -\frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi} - \tilde{v}_0(t) + f(t),$$

$$\frac{d}{dt} \varphi(t) = \tilde{v}_0(t),$$

где

$$U(\varphi) = \frac{1}{2}e^{2\varphi} - (R-1)\varphi.$$

Здесь переменная $\varphi(t)$ играет роль координаты частицы, а переменная $v_0(t)$ — ее скорости. На рис. 9.1 сплошной линией изображено поведение функции $U(\varphi)$.

Эта функция имеет минимум $U(\varphi_0) = \frac{1}{2}(R-1)[1 - \ln(R-1)]$ в точке $\varphi_0 = \ln \sqrt{R-1}$, соответствующий устойчивому положению равновесия $v_1 = \sqrt{R-1}$. Таким образом, стационарное распределение вероятностей для $\varphi(t)$ и $\tilde{v}_0(t)$ аналогично распределению Гиббса (9.18):

$$P(\tilde{v}_0, \varphi) = C \exp \left\{ -\frac{1}{D} H(\tilde{v}_0, \varphi) \right\}, \quad H(\tilde{v}_0, \varphi) = \frac{\tilde{v}_0^2}{2} + U(\varphi). \quad (9.38)$$

Из формулы (9.38) следует, что при $R > 1$ стационарное распределение вероятностей для компоненты $v_0(t)$ системы уравнений (9.35) будет гауссовым:

$$P(v_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp \left\{ -\frac{(v_0-1)^2}{2D} \right\}, \quad (9.39)$$

а распределение вероятностей для величины $\varphi(t)$ не является гауссовым, и они не коррелируют между собой. Возвращаясь к переменной $v_1(t)$, получаем для нее стационарное распределение вероятностей в виде

$$P(v_1) = \text{const } v_1^{(R-1)/D-1} \exp \left\{ -\frac{v_1^2}{2D} \right\}. \quad (9.40)$$

При критическом режиме ($R = 1$), как видно из (9.40), не существует стационарного распределения вероятностей для компоненты $v_1(t)$, в отличие от рассмотренного выше случая, когда случайные силы действуют на все компоненты триплета.

Как отмечалось ранее, установление распределения (9.38) происходит в две стадии: сначала быстро устанавливается максвелловское распределение по v_0 (9.39), и после этого значительно медленнее происходит установление распределения по φ . Вторая стадия описывается уравнением Эйнштейна–Смолуховского (9.16), которое для переменной v_1 принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(v_1, t) = \frac{\partial}{\partial v_1} \left\{ v_1 [v_1^2 - (R - 1)] P(v_1, t) \right\} + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial v_1} \left\{ v_1 \frac{\partial}{\partial v_1} [v_1 P(v_1, t)] \right\}. \quad (9.41)$$

Это уравнение является уравнением Фоккера–Планка для стохастического динамического уравнения

$$\frac{d}{dt} v_1(t) = -v_1(t) [v_1^2(t) - (R - 1)] + v_1(t) f(t).$$

При критическом значении параметра $R = 1$ это уравнение принимает вид

$$\frac{d}{dt} v_1(t) = -v_1^3(t) + v_1(t) f(t),$$

откуда видно, что, несмотря на сильное нелинейное трение, его решение стохастически неустойчиво вследствие специфического вида случайного члена. Включение же случайных сил в уравнения для других компонент, как мы видели выше, обеспечивает стохастическую стабилизацию.

9.3. Краевые задачи для уравнения Фоккера–Планка (явление переброса)

Уравнения Фоккера–Планка являются уравнениями в частных производных и для них, вообще говоря, необходимо ставить краевые условия, в зависимости от того, какие задачи рассматриваются. При этом можно исходить как из прямого уравнения Фоккера–Планка, так и из обратного, которые эквивалентны друг другу. Рассмотрим один типичный пример, описывающий явление переброса в регулярных системах. Относительно явления переброса в сингулярных системах смотри Задачи 9.2–9.4.

Рассмотрим нелинейный осциллятор с трением, описываемый уравнением

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \lambda \frac{d}{dt} x(t) + \omega_0^2 x(t) + \beta x^3(t) = f(t) \quad (\beta, \lambda > 0), \quad (9.42)$$

где случайную силу $f(t)$ считаем гауссовой дельта-коррелированной случайной функцией с параметрами

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t) f(t') \rangle = 2D \delta(t - t') \quad (D = \sigma_f^2 \tau_0).$$

При $\lambda = 0$ и $f(t) = 0$ это уравнение называется *уравнением Дюффинга*.

Уравнение (9.42) можно переписать в стандартной форме Гамильтоновой системы для функций $x(t)$ и $v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$:

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{\partial}{\partial v} H(x, v), \quad \frac{d}{dt} v(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(x, v) - \lambda v + f(t),$$

где функция Гамильтона

$$H(x, v) = \frac{v^2}{2} + U(x), \quad U(x) = \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \beta \frac{x^4}{4}.$$

Стационарное решение соответствующего уравнения Фоккера–Планка, согласно (9.18), имеет вид

$$P(x, v) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} H(x, v) \right\}. \quad (9.43)$$

Из вида этого распределения ясно, что стационарное распределение вероятностей для $v(t)$ является гауссовым, а распределение вероятностей для величины $x(t)$ негауссово, и они не коррелируют между собой. Интегрируя (9.43) по v , получаем стационарное распределение вероятностей для $x(t)$:

$$P(x) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} \left(\frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \beta \frac{x^4}{4} \right) \right\}.$$

Это распределение имеет максимум в точке $x = 0$, соответствующей положению устойчивого равновесия.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \lambda \frac{d}{dt} x(t) - \omega_0^2 x(t) + \beta x^3(t) = f(t) \quad (\beta, \lambda > 0). \quad (9.44)$$

В этом случае стационарное распределение вероятностей имеет тот же вид (9.43), где теперь

$$H(x, v) = \frac{v^2}{2} + U(x), \quad U(x) = -\frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \beta \frac{x^4}{4}.$$

Стационарное распределение вероятностей для величины $x(t)$ теперь имеет вид

$$P(x) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} \left(-\frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \beta \frac{x^4}{4} \right) \right\} \quad (9.45)$$

и имеет максимумы в точках $x = \pm \sqrt{\omega_0^2 / \beta}$ и минимум в точке $x = 0$, соответствующим устойчивым и неустойчивой точкам равновесия задачи (9.44) при $f(t) = 0$. Распределение вероятностей (9.45) изображено на рис. 9.2. При этом, как указывалось ранее, установление распределения (9.45) описывается уравнением Эйнштейна–Смолуховского (9.16), которое в нашем случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x} P(x, t) \right) + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t), \quad (9.46)$$

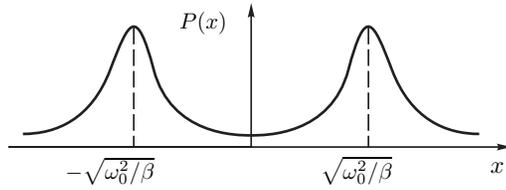


Рис. 9.2. Распределение вероятностей (9.45)

которому статистически эквивалентно динамическое уравнение

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial U(x)}{\partial x} + \frac{1}{\lambda}f(t). \quad (9.47)$$

Распределение вероятностей (9.45) соответствует усреднению по ансамблю реализаций случайного процесса $f(t)$. Если же имеется одна реализация, то система с вероятностью 1/2 придет в одно из положений, соответствующих максимуму распределения. В этом случае будет формироваться распределение вероятностей (усреднение по времени) в окрестности положения максимума. Однако, благодаря существованию достаточно больших значений функции $f(t)$, система будет переброшена из окрестности одного максимума в окрестность другого максимума по прошествии некоторого времени T (тем большего, чем меньше D). Таким образом, распределение вероятностей (9.46) будет формироваться только за время $t \gg T$.

Вводя безразмерные координату $x \rightarrow \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta}}x$ и время $t \rightarrow \frac{\lambda}{\omega_0^2}t$, уравнение (9.46) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x} P(x, t) \right) + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t), \quad (9.48)$$

где

$$\mu = \frac{\beta D}{\lambda \omega_0^4}, \quad U(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

При этом эквивалентное стохастическое уравнение (9.47) принимает вид уравнения (1.17) на с. 20:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} + f(t). \quad (9.49)$$

Оценим время, за которое система перейдет из одного наиболее вероятного состояния ($x = -1$) в другое ($x = 1$).

Пусть в момент времени t_0 система, описываемая стохастическим уравнением (9.49) находилась в точке внутри интервала (a, b) . Соответствующая вероятность выхода из этого интервала

$$G(t; x_0, t_0) = 1 - \int_a^b dx p(x, t | x_0, t_0)$$

описывается уравнением (8.21), вытекающим из обратного уравнения Фоккера–Планка (8.20) на с. 179, т. е. уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t_0} G(t; x_0, t_0) = \frac{\partial U(x_0)}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial x_0} G(t; x_0, t_0) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} G(t; x_0, t_0)$$

с краевыми условиями

$$G(t; x_0, t) = 0, \quad G(t; a, t_0) = G(t; b, t_0) = 1.$$

Учитывая, что в нашей задаче $G(t; x_0, t_0) = G(t - t_0; x_0)$, эту краевую задачу можно переписать в виде краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} G(\tau; x_0) = \frac{\partial U(x_0)}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial x_0} G(\tau; x_0) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} G(\tau; x_0), \quad (9.50)$$

$$G(0; x_0) = 0, \quad G(\tau; a, \cdot) = G(\tau; b) = 1 \quad \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} G(\tau; x_0) = 0 \right).$$

Здесь введено обозначение $(t - t_0) = \tau$.

Из (9.50) легко видеть, что среднее время выхода системы из интервала (a, b)

$$T(x_0) = \int_0^{\infty} d\tau \tau \frac{\partial G(\tau; x_0)}{\partial \tau}$$

удовлетворяет краевой задаче

$$\mu \frac{d^2 T(x_0)}{dx_0^2} - \frac{dU(x_0)}{dx_0} \frac{dT(x_0)}{dx_0} = -1, \quad T(a) = T(b) = 0. \quad (9.51)$$

Уравнение (9.51) легко решается, и мы получаем для среднего времени перехода системы под действием случайных сил из состояния $x_0 = -1$ в состояние $x_0 = 1$, которое обычно называется *временем Крамера*, выражение

$$T = \frac{1}{\mu} \int_{-1}^1 d\xi \int_{-\infty}^{\xi} d\eta \exp \left\{ \frac{1}{\mu} [U(\xi) - U(\eta)] \right\} = \frac{C(\mu)}{\mu} \int_0^1 d\xi \exp \left\{ \frac{1}{\mu} U(\xi) \right\}, \quad (9.52)$$

где $C(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \left\{ \frac{1}{\mu} U(\xi) \right\}$. При $\mu \ll 1$

$$T \approx \sqrt{2\pi} \exp \left\{ \frac{1}{4\mu} \right\},$$

т. е. среднее время перехода растет экспоненциально с уменьшением интенсивности флуктуаций силы.

9.4. Метод усреднения по быстрым осцилляциям

Если флуктуации параметров динамической системы достаточно малы, то возможно использовать различные асимптотические и приближенные методы анализа уравнения Фоккера–Планка. Остановимся подробнее на одном из таких методов, наиболее часто используемом в статистическом анализе.

Пусть стохастическая система описывается динамическими уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= A(x, \tilde{\phi}) + z(t)B(x, \tilde{\phi}), \\ \frac{d}{dt}\phi(t) &= C(x, \tilde{\phi}) + z(t)D(x, \tilde{\phi}),\end{aligned}\tag{9.53}$$

где $\tilde{\phi}(t) = \omega_0 t + \phi(t)$, функции $A(x, \tilde{\phi})$, $B(x, \tilde{\phi})$, $C(x, \tilde{\phi})$, и $D(x, \tilde{\phi})$ — периодические функции по переменной $\tilde{\phi}$, а $z(t)$ — гауссов дельта-коррелированный процесс с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2D\delta(t - t'), \quad D = \sigma^2\tau_0.$$

Переменная $x(t)$ может, например, быть модулем вектора, а $\phi(t)$ — его фазой. Для системы уравнений (9.53) соответствующее уравнение Фоккера–Планка имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(x, \phi, t) &= -\frac{\partial}{\partial x}A(x, \tilde{\phi})P(x, \phi, t) - \frac{\partial}{\partial \phi}C(x, \tilde{\phi})P(x, \phi, t) + \\ &+ D \left[\frac{\partial}{\partial x}B(x, \tilde{\phi}) + \frac{\partial}{\partial \phi}D(x, \tilde{\phi}) \right]^2 P(x, \phi, t).\end{aligned}\tag{9.54}$$

Уравнение (9.54) обычно является сложным для непосредственного анализа совместной плотности вероятностей. Перепишем его в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(x, \phi, t) &= -\frac{\partial}{\partial x}A(x, \tilde{\phi})P(x, \phi, t) - \frac{\partial}{\partial \phi}C(x, \tilde{\phi})P(x, \phi, t) - \\ &- D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B^2(x, \tilde{\phi})}{2\partial x} + \frac{\partial B(x, \tilde{\phi})}{\partial \tilde{\phi}} D(x, \tilde{\phi}) \right) P(x, \phi, t) - \\ &- D \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial D(x, \tilde{\phi})}{\partial x} B(x, \tilde{\phi}) + \frac{\partial D^2(x, \tilde{\phi})}{2\partial \tilde{\phi}} \right) P(x, \phi, t) + \\ &+ D \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} B^2(x, \tilde{\phi}) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} B(x, \tilde{\phi}) D(x, \tilde{\phi}) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} D^2(x, \tilde{\phi}) \right\} P(x, \phi, t).\end{aligned}\tag{9.55}$$

Пусть теперь функции $A(x, \tilde{\phi})$ и $C(x, \tilde{\phi})$ достаточно малы, а также мала интенсивность флуктуаций $z(t)$. В этом случае статистические характеристики системы уравнений (9.53) мало меняются за времена $\sim 1/\omega_0$. И для изучения таких малых изменений (накапливающихся эффектов) можно усреднить уравнение (9.55) по периоду колебаний всех функций. Считая, что сама функция $P(x, \phi, t)$ при этом не меняется,

получаем уравнение

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \overline{P(x, \phi, t)} &= -\frac{\partial}{\partial x} \overline{A(x, \tilde{\phi}) P(x, \phi, t)} - \frac{\partial}{\partial \phi} \overline{C(x, \tilde{\phi}) P(x, \phi, t)} - \\ &- D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B^2(x, \tilde{\phi})}{2\partial x} + \frac{\partial B(x, \tilde{\phi})}{\partial \tilde{\phi}} D(x, \tilde{\phi}) \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial D(x, \tilde{\phi})}{\partial x} B(x, \tilde{\phi}) \right\} \overline{P(x, \phi, t)} + \\ &+ D \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{B^2(x, \tilde{\phi})} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \phi} \overline{B(x, \tilde{\phi}) D(x, \tilde{\phi})} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \overline{D^2(x, \tilde{\phi})} \right\} \overline{P(x, \phi, t)},\end{aligned}\tag{9.56}$$

где чертой обозначены величины, усредненные по периоду колебаний.

Интегрируя уравнение (9.56) по ϕ , получаем для функции $\overline{P(x, t)}$ уравнение Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \overline{P(x, t)} &= -\frac{\partial}{\partial x} \overline{A(x, \tilde{\phi}) P(x, t)} + \\ &+ D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B^2(x, \tilde{\phi})}{2\partial x} + \frac{\partial B(x, \tilde{\phi})}{\partial \tilde{\phi}} D(x, \tilde{\phi}) \right) \overline{P(x, t)} + D \frac{\partial}{\partial x} \overline{B^2(x, \tilde{\phi})} \frac{\partial}{\partial x} \overline{P(x, t)}.\end{aligned}\tag{9.57}$$

Отметим, что в этом приближении величина $x(t)$ является марковским одномерным случайным процессом.

Если же в уравнении (9.56) $\overline{B(x, \tilde{\phi}) D(x, \tilde{\phi})} = \frac{\partial D(x, \tilde{\phi})}{\partial x} \overline{B(x, \tilde{\phi})} = 0$, а $\overline{C(x, \tilde{\phi})} = \text{const}$, $\overline{D^2(x, \tilde{\phi})} = \text{const}$, то процессы $x(t)$ и $\phi(t)$ статистически независимы и процесс $\phi(t)$ является марковским гауссовым процессом, дисперсия которого линейно растет с ростом времени t . Это означает, что при больших t (при $\overline{C(x, \tilde{\phi})} = 0$) распределение вероятностей для величины $\phi(t)$ становится равномерным на отрезке $[0, 2\pi]$.

Задачи

Задача 9.1. Решить уравнение Фоккера–Планка

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} p(x, t|x_0, t_0) &= D \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} p(x, t|x_0, t_0) \quad (x \geq 1), \\ p(x, t_0|x_0, t_0) &= \delta(x - x_0).\end{aligned}$$

Указание. Использовать интегральное преобразование Мелера–Фока.

Решение.

$$p(x, t|x_0, t_0) = \int_0^\infty d\mu \mu \tanh(\pi\mu) \exp \left\{ -D \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) (t - t_0) \right\} P_{-1/2+i\mu}(x) P_{-1/2+i\mu}(x_0).$$

Если в начальный момент времени $t_0 = 0$ величина $x_0 = 1$, то

$$P(x, t) = \int_0^\infty d\mu \mu \tanh(\pi\mu) \exp \left\{ -D \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) (t - t_0) \right\} P_{-1/2+i\mu}(x).$$

Задача 9.2. Для стохастической задачи с сингулярными особенностями, описываемую уравнением (1.31), где 29 для $\lambda = 1$

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x^2(t) + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad (9.58)$$

где $f(t)$ — гауссов дельта-коррелированный во времени процесс с параметрами

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle = 2D\delta(t-t') \quad (D = \sigma_f^2\tau_0),$$

оценить среднее время, за которое система перейдет из состояния x_0 в состояние $(-\infty)$ и среднее время между двумя сингулярностями.

Решение.

$$\langle T(x_0) \rangle = \int_{-\infty}^{x_0} d\xi \int_{\xi}^{\infty} d\eta \exp \left\{ \frac{1}{3} (\xi^3 - \eta^3) \right\}, \quad \langle T(\infty) \rangle = \sqrt{\pi} \frac{12^{1/6}}{3} \Gamma \left(\frac{1}{6} \right) \approx 4.976.$$

Задача 9.3. Получить стационарное распределение вероятностей для стохастической задачи (9.58).

Указание. Решать уравнение Фоккера–Планка при условии, что функция $x(t)$ разрывна и определена для всех значений времени t . При этом ее обращение в $(-\infty)$ в момент времени $t \rightarrow t_0 - 0$ немедленно сопровождается ее появлением при $t \rightarrow t_0 + 0$ со значением ∞ . Это соответствует краевому условию для уравнения Фоккера–Планка условию непрерывности плотности потока вероятностей.

Решение.

$$P(x) = J \int_{-\infty}^x d\xi \exp \left\{ \frac{1}{3} (\xi^3 - x^3) \right\}, \quad (9.59)$$

где стационарная плотность потока вероятностей

$$J = \frac{1}{\langle T(\infty) \rangle}.$$

Замечание. Для больших значений x из (9.59) следует асимптотическая формула

$$P(x) \approx \frac{1}{\langle T(\infty) \rangle x^2}. \quad (9.60)$$

Задача 9.4. Показать, что асимптотическая формула (9.60) формируется разрывами функции $x(t)$.

Указание. Воспользоваться решением функция $x(t)$ в окрестности точки разрыва t_k вида

$$x(t) = \frac{1}{t - t_k}.$$

Решение. Для достаточно больших t и x , а именно при $t \gg \langle T(\infty) \rangle$ имеем:

$$\begin{aligned} p(x, t|x_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \delta \left(x - \frac{1}{t - t_k} \right) \right\rangle = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta(t - t_k) \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} \langle e^{i\omega t_k} \rangle = \frac{1}{2\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \frac{\Phi_0(\omega)}{1 - \Phi(\omega)}, \end{aligned}$$

где $\Phi_0(\omega) = \langle e^{i\omega t_0} \rangle$ — характеристическая функция первой сингулярной точки, а $\Phi(\omega) = \langle e^{i\omega T} \rangle$ — характеристическая функция времени между сингулярностями. Следовательно, при $t \rightarrow \infty$ получаем асимптотику (9.60)

$$P(x) = -\frac{1}{2\pi i x^2 \langle T(\infty) \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \frac{1}{\omega + i0} = \frac{J}{x^2}.$$

Задача 9.5. Получить уравнение Фоккера–Планка для медленных изменений амплитуды и фазы решения задачи

$$\frac{d}{dt}x(t) = y(t), \quad \frac{d}{dt}y(t) = -2\gamma y(t) - \omega_0^2[1 + z(t)]x(t), \quad (9.61)$$

где $z(t)$ — гауссов процесс с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0\delta(t-t').$$

Указание. Ввести вместо функций $x(t)$ и $y(t)$ новые переменные — амплитуду и фазу колебаний — с помощью равенств

$$x(t) = A(t) \sin(\omega_0 t + \phi(t)), \quad y(t) = \omega_0 A(t) \cos(\omega_0 t + \phi(t)),$$

и представить амплитуду $A(t)$ в виде $A(t) = e^{u(t)}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{P(u, \phi, t)} &= \gamma \frac{\partial}{\partial u} \overline{P(u, \phi, t)} - \frac{D}{4} \frac{\partial}{\partial u} \overline{P(u, \phi, t)} + \\ &+ \frac{D}{8} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \overline{P(t; u, \phi)} + \frac{3D}{8} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \overline{P(u, \phi, t)}, \end{aligned} \quad (9.62)$$

где $D = \sigma^2\tau_0\omega_0^2$. Из уравнения (9.62) следует, что статистические характеристики амплитуды и фазы колебаний (усредненные по периоду колебаний) статистически независимы и соответствующие плотности вероятностей являются гауссовыми

$$\begin{aligned} \overline{P(u, t)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{(u - \langle u(t) \rangle)^2}{2\sigma_u^2(t)} \right\}, \\ \overline{P(\phi, t)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\phi^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{(\phi - \phi_0)^2}{2\sigma_\phi^2(t)} \right\}, \end{aligned} \quad (9.63)$$

где

$$\langle u(t) \rangle = u_0 - \gamma t + \frac{D}{4}t, \quad \sigma_u^2(t) = \frac{D}{4}t,$$

$$\langle \phi(t) \rangle = \phi_0, \quad \sigma_\phi^2(t) = \frac{3D}{4}t.$$

Задача 9.6. Используя распределения вероятностей (9.63) вычислить величины $\langle x(t) \rangle$ и $\langle x^2(t) \rangle$. Получить условие стохастического возбуждения второго момента.

Решение. Для среднего значения получаем выражение

$$\langle x(t) \rangle = e^{-\gamma t} \sin(\omega_0 t),$$

совпадающее с решением задачи при отсутствии флуктуаций.

Для величины $\langle x^2(t) \rangle$ же получаем выражение

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{2}e^{(D-2\gamma)t} \left\{ 1 - e^{-3Dt/2} \cos(2\omega_0 t) \right\}, \quad (9.64)$$

совпадающее при отсутствии поглощения с выражением (6.90) на с. 161 с точностью до членов порядка $D/\omega_0 \ll 1$.

Задача 9.7. Получить условие статистического параметрического возбуждения функции $\langle A^n(t) \rangle$.

Решение. Для функции $\langle A^n(t) \rangle$ имеем

$$\langle A^n(t) \rangle = \langle e^{nu(t)} \rangle = A_0^n \exp \left\{ -n\gamma t + \frac{1}{8}n(n+2)Dt \right\},$$

и, следовательно, при выполнении условия

$$8\gamma < (n+2)D$$

стохастическая динамическая система статистически параметрически возбуждается начиная с моментной функции порядка n .

Замечание. Типичная реализация случайной амплитуды имеет вид

$$A^*(t) = A_0 \exp \left\{ - \left(\gamma - \frac{D}{4} \right) t \right\}$$

и при достаточно малом поглощении, а именно,

$$1 < 4\frac{\gamma}{D} < 1 + \frac{1}{2}n,$$

что выполняется для достаточно больших значений n , типичная реализация экспоненциально убывает во времени, в то время как все моментные функции случайной амплитуды $A(t)$ порядка n и выше, экспоненциально растут во времени. Это означает, что в этом случае статистика случайной амплитуды $A(t)$ формируется большими выбросами относительно экспоненциально спадающей кривой типичной реализации. Это обстоятельство обусловлено логнормальностью случайной амплитуды $A(t)$.

О черк 10

ДРУГИЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В предыдущих очерках мы обсуждали строгий подход к анализу статистики решений некоторых нелинейных уравнений гидродинамики, основанный на выводе и исследовании точных уравнений в вариационных производных для характеристических функционалов нелинейных случайных полей. Однако на этом пути возникают громадные трудности, связанные с неразвитостью теории уравнений в вариационных производных. Поэтому многие исследователи предпочитают исходить из более привычных уравнений в частных производных для различных моментных функций рассматриваемых полей. Нелинейность же исходных динамических уравнений для случайных полей приводит к тому, что в уравнение для каждой данной моментной функции входят моментные функции высших порядков. В итоге даже для нахождения среднего поля или корреляционных функций необходимо, строго говоря, решать бесконечную иерархию зацепляющихся уравнений.

Таким образом, при этом подходе основная проблема состоит в обрыве указанной цепочки уравнений с помощью тех или иных физических гипотез. Наиболее известным примером здесь может служить *гипотеза Миллионщикова*, согласно которой высшие четные моментные функции выражают через низшие по законам гауссовой статистики. Недостатком подобных подходов является то, что практически невозможно строго обосновать справедливость привлекаемых гипотез, а также тот факт, что обрывание цепочек уравнений часто ведет к физически противоречивым результатам, например к отрицательности энергетических спектров турбулентности для некоторых волновых чисел. Тем не менее такие приближенные подходы помогают лучше осмыслить физические механизмы формирования статистики сильно нелинейных случайных полей и получить количественные выражения для их корреляционных функций и спектров. Так, гипотеза Миллионщикова, по-видимому, дает правильные спектры развитой турбулентности в вязком интервале [35].

Подчеркнем еще, что упомянутые приближенные уравнения позволяют обнаружить многие нетривиальные эффекты, присущие нелинейным случайным полям и не имеющие аналогов в поведении детерминированных полей и волн. Здесь мы проиллюстрируем подобные методы анализа, обсудив интересный физический эффект проявления квазиупругих волновых свойств у средних потоков несжимаемой жидкости на фоне развитых турбулентных пульсаций. На этот эффект впервые обращено вни-

мание в работе [58], где изучалась реакция турбулентности на изменение поперечного градиента средней скорости. В этой работе отмечается, что турбулентная среда в некотором смысле ведет себя как упругая среда, а именно: для плоскопараллельного потока изменение профиля средней скорости описывается волновым уравнением.

10.1. О квазиупругих свойствах однородной и стационарной несжимаемой турбулентной среды

Пусть $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$ — случайное поле скорости развитой, стационарной во времени однородной и изотропной в пространстве турбулентности $\langle \mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t) = 0 \rangle$. В реальных условиях на турбулентные пульсации жидкости накладываются регулярные средние потоки, поле скорости которых обозначим через $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$. Турбулентные пульсации и средние потоки нелинейно взаимодействуют, так что полное поле скорости представимо в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t). \quad (10.1)$$

Здесь $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$ — «невозмущенное» турбулентное поле в отсутствие средних потоков, а $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$ — возмущение турбулентного поля, обусловленное его взаимодействием с регулярным потоком ($\langle \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$).

Вообще говоря, проблема исследования нелинейных взаимодействий регулярных потоков с турбулентными пульсациями, как впрочем и проблема анализа самих турбулентных пульсации $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$, весьма сложна. Все же, если средние потоки слабы, т. е. если выполнено неравенство

$$\mathbf{U}^2(\mathbf{r}, t) \ll 2T(t),$$

где $T(t) = \frac{1}{2} \langle [\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)]^2 \rangle$ — средняя плотность энергии турбулентных пульсаций, то в линейном приближении по малым возмущениям $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$ и при заданных спектральных свойствах турбулентных пульсаций $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$ удастся достаточно подробно обсудить влияние турбулентности на эволюцию средних потоков $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$.

Полное поле скорости (10.1), а также его турбулентная составляющая $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяют уравнению Навье–Стокса (1.98) на с. 52. Поэтому подставив (10.1) в (1.98) и линеаризовав уравнения для среднего поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и флуктуационной составляющей $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$, придем к приближенным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t} U_i(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial r_k} T_{ik}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial r_i} P(\mathbf{r}, t), \quad (10.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u'_i(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial r_k} [u_i(\mathbf{r}, t)u_k(\mathbf{r}, t) - \langle u_i(\mathbf{r}, t)u_k(\mathbf{r}, t) \rangle] + \\ + u_l^T(\mathbf{r}, t) \frac{\partial U_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} + U_l(\mathbf{r}, t) \frac{\partial u_l^T(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} = -\frac{\partial}{\partial r_i} p'(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (10.3)$$

где $T_{ik}(\mathbf{r}, t) = \langle u_i(\mathbf{r}, t)u_k(\mathbf{r}, t) \rangle$ — тензор напряжений Рейнольдса, а функции $P(\mathbf{r}, t)$ и $p'(\mathbf{r}, t)$ — соответственно средняя и возмущенная турбулентная составляющие давления. Здесь и далее мы пренебрегаем влиянием вязкости на динамику и статистику

возмущенных полей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$. Будем, кроме того, иметь в виду, что поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяют условию несжимаемости (1.98), с. 52:

$$\operatorname{div} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (10.4)$$

Для эволюции тензора напряжений Рейнольдса $T_{ik}(\mathbf{r}, t)$ из уравнения (10.3) с привлечением уравнения (1.98), с. 52 для поля турбулентных пульсаций $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T_{ik}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial r_l} \langle u_i(\mathbf{r}, t)u_k(\mathbf{r}, t)u_l(\mathbf{r}, t) \rangle + \\ + \langle u_k^T(\mathbf{r}, t)u_l^T(\mathbf{r}, t) \rangle \frac{\partial U_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} + \langle u_i^T(\mathbf{r}, t)u_l^T(\mathbf{r}, t) \rangle \frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} + \\ + U_l(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \langle u_i^T(\mathbf{r}, t)u_k^T(\mathbf{r}, t) \rangle}{\partial r_l} = - \left\langle \left[u_k^T(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial r_i} p'(\mathbf{r}, t) + u_i^T(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial r_k} p'(\mathbf{r}, t) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Здесь введено обозначение

$$u_i(\mathbf{r}, t)u_k(\mathbf{r}, t)u_l(\mathbf{r}, t) = u_i^T(\mathbf{r}, t)u_k^T(\mathbf{r}, t)u_l'(\mathbf{r}, t) + \dots$$

Пульсации давления, входящие в это уравнение, связаны с возмущенными скоростями $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$ соотношением

$$\begin{aligned} -p'(\mathbf{r}, t) = \Delta^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \\ \times \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r'_m \partial r'_n} [u_m(\mathbf{r}', t)u_n(\mathbf{r}', t) - \langle u_m(\mathbf{r}', t)u_n(\mathbf{r}', t) \rangle] + 2 \frac{\partial u_l^T(\mathbf{r}', t)}{\partial r'_m} \frac{\partial U_m(\mathbf{r}', t)}{\partial r'_l} \right\}, \end{aligned}$$

где интегральный оператор $\Delta^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — обратный к оператору Лапласа. Уравнения (10.2), (10.5) вместе с выражением для $p'(\mathbf{r}, t)$ образуют систему уравнений относительно среднего поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и тензора напряжений $T_{ik}(\mathbf{r}, t)$. Эти уравнения не замкнуты, поскольку в них входят более высокие тройные корреляции скорости типа $\langle u_i^T(\mathbf{r}, t)u_k^T(\mathbf{r}, t)u_l'(\mathbf{r}, t) \rangle$. Предполагая несущественность влияния таких корреляций на динамику возмущений, а также учитывая условия (10.4) и статистическую однородность поля $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$, сводим систему уравнений (10.2), (10.5) к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} U_i(\mathbf{r}, t) + \tau_i(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial r_i} P(\mathbf{r}, t) \quad \left(\tau_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial r_k} T_{ik}(\mathbf{r}, t) \right), \quad (10.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tau_i(\mathbf{r}, t) + \langle u_k^T(\mathbf{r}, t)u_l^T(\mathbf{r}, t) \rangle \frac{\partial^2 U_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l \partial r_k} = \\ = 2 \frac{\partial}{\partial r_k} \left[\left\langle u_k^T(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial r_i} \Delta^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left(\frac{\partial u_l^T(\mathbf{r}', t)}{\partial r'_m} \frac{\partial U_m(\mathbf{r}', t)}{\partial r'_l} \right) \right\rangle + \right. \\ \left. + \left\langle u_i^T(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial r_k} \Delta^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left(\frac{\partial u_l^T(\mathbf{r}', t)}{\partial r'_m} \frac{\partial U_m(\mathbf{r}', t)}{\partial r'_l} \right) \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Это уже полностью замкнутая относительно $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ система уравнений. Коэффициенты в левой части уравнения (10.7) и стоящий в правой его части интегральный оператор определяются корреляционным тензором вихревого поля «невозмущенной» турбулентности $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$:

$$\langle u_i^T(\mathbf{r}, t) u_j^T(\mathbf{r}', t) \rangle = \int d\mathbf{q} \Phi_{ij}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}. \quad (10.8)$$

Причем в силу соленоидальности поля $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$

$$\Phi_{ij}(\mathbf{q}) = \Delta_{ij}(\mathbf{q}) F(q).$$

Здесь, как и ранее, использовано обозначение

$$\Delta_{ij}(\mathbf{q}) = \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2}.$$

Будем считать энергетический спектр турбулентных пульсаций $F(q)$ заданным. Из (10.8), в частности, следует, что энергия турбулентных пульсаций выражается через энергетический спектр равенством

$$T = \frac{1}{2} \langle [\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)]^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty dq q^2 F(q),$$

а коэффициенты в левой части уравнения (10.7) равны

$$\langle u_k^T(\mathbf{r}, t) u_l^T(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{2}{3} T \delta_{kl}. \quad (10.9)$$

Наконец, правую часть уравнения (10.7) можно, с помощью (10.8), представить в виде

$$- \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} U_m(\mathbf{q}, t) g_{im}(\mathbf{q}), \quad (10.10)$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{q}, t)$ — пространственный фурье-образ поля средней скорости $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, а тензор $g_{im}(\mathbf{q})$ определяется выражением

$$g_{im}(\mathbf{p}) = 2 \int d\mathbf{q} \frac{q_m p_l p_k}{(\mathbf{q} + \mathbf{p})^2} [(q_i + p_i) \Delta_{kl}(\mathbf{q}) + (q_k + p_k) \Delta_{il}(\mathbf{q})] F(q). \quad (10.11)$$

Из очевидного свойства инвариантности тензора $g_{im}(\mathbf{p})$ относительно вращений в пространстве следует, что он обладает структурой

$$g_{im}(\mathbf{p}) = A(p) \delta_{im} + B(p) \frac{p_i p_m}{p^2}, \quad (10.12)$$

причем в силу несжимаемости среднего поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, выраженного уравнением (10.4) и вытекающим из него тождеством $\mathbf{p}\mathbf{U}(\mathbf{p}, t) = 0$, член с $B(p)$ в (10.12) исчезает, и правая часть (10.10) уравнения (10.7) равна

$$- \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} U_i(\mathbf{q}, t) A(q).$$

Подставив это выражение в правую часть (10.7) и учитывая (10.9), перепишем уравнения (10.6), (10.7) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U_i(\mathbf{r}, t) + \tau_i(\mathbf{r}, t) &= - \frac{\partial}{\partial r_i} P(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \tau_i(\mathbf{r}, t) + \frac{2}{3} T \Delta U_i(\mathbf{r}, t) &= -A(-i\nabla) U_i(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (10.13)$$

Ядро входящего в правую часть второго уравнения интегрального оператора получим, сопоставив (10.11) с (10.12):

$$A(p) = \int d\mathbf{q} \frac{F(q)}{(q^2 + p^2)} \left[p^2 - \frac{(\mathbf{q}\mathbf{p})^2}{q^2} \right] \left[q^2 - (\mathbf{q}\mathbf{p}) - 2 \frac{(\mathbf{q}\mathbf{p})^2}{p^2} \right]. \quad (10.14)$$

В интеграле (10.14) можно выполнить интегрирование по углам и получить в результате выражение

$$A(p) = 2\pi p^2 \int_0^\infty dq F(q) \left\{ \frac{2q^2}{3p^2} - \frac{q^4 - p^4}{4p^4} + \frac{(q^2 - p^2)^3}{8qp^5} \ln \left| \frac{q+p}{q-p} \right| \right\}. \quad (10.15)$$

Заметив еще, что из уравнений (10.13) с учетом равенств (10.4) вытекает тождество $\Delta P(\mathbf{r}, t) = 0$, а следовательно, $P(\mathbf{r}, t) = P_0 = \text{const}$, и исключив из системы уравнений (10.11), (10.4) величину $\tau_i(\mathbf{r}, t)$, придем к одному уравнению для векторного поля средней скорости жидкости $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) - \left[\frac{2}{3} T \Delta + A(-i\nabla) \right] \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (10.16)$$

Соответствующее этому уравнению дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2(p) = \frac{2}{3} T p^2 - A(p).$$

Его можно записать в виде

$$\omega^2(p) = 2\pi p^2 \int_0^\infty dq F(q) f\left(\frac{q}{p}\right),$$

где

$$f(x) = \frac{2-x^2}{3} + \frac{x^4-1}{8} - \frac{(x^2-1)^3}{16x} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|.$$

Функция $f(x)$ имеет асимптотики

$$f(x) = \begin{cases} 2/3, & x \ll 1, \\ 4/15, & x \gg 1. \end{cases}$$

Кроме того, при любых x выполняются неравенства

$$\frac{2}{3} \geq f(x) \geq \frac{4}{15}.$$

Таким образом, динамика развития возмущений среднего потока во времени описывается гиперболическим уравнением (10.16), и турбулентная среда обладает определенными квазиупругими свойствами, а именно: возмущения распространяются в ней в виде поперечных волн с дисперсией. Фазовые и групповые скорости при этом заключены в пределах

$$\sqrt{\frac{2}{3}T} \geq c \geq \sqrt{\frac{4}{15}T}.$$

10.2. Излучение звука вихревыми движениями

Выше мы рассмотрели физический эффект, тесно связанный со статистическим усреднением нелинейной системы гидродинамических уравнений в несжимаемой среде. Рассмотрим теперь эффект, связанный со слабой сжимаемостью среды — задачу об излучении звука слабосжимаемой турбулентной средой. Эта задача соответствует включению случайных сил в линеаризованные уравнения гидродинамики. Отметим, что параметрическое воздействие турбулентной среды в рамках линейных уравнений приводит, например, к уравнениям акустики со случайным показателем преломления. Турбулентное движение жидкости в некоторой конечной области пространства вне этой области в сжимаемой среде излучает акустические волны. При этом поле звука таково, как будто бы оно производится статистическим распределением акустических квадрупольей с мгновенной «мощностью» на единицу объема для слабосжимаемой среды, равной

$$T_{ij}(\mathbf{r}, t) = \rho_0 v_i^T(\mathbf{r}, t) v_j^T(\mathbf{r}, t),$$

где ρ_0 — средняя плотность, а $v_i^T(\mathbf{r}, t)$ — компоненты вектора скорости жидкости в турбулентной области V , внутри которой турбулентность предполагается однородной и изотропной в пространстве и стационарной во времени (в рассматриваемой системе координат отсутствует перемещение жидкости в целом). Вызванные турбулентным движением флуктуационные волны плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяют при этом волновому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \right) \rho(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} T_{ij}(\mathbf{r}, t), \quad (10.17)$$

где c_0 — скорость звука в однородной среде, не охваченной турбулентным движением.

Решение этого уравнения имеет вид «запаздывающего решения»:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \int_V d\mathbf{y} T_{ij} \left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{y}|}{c_0} \right).$$

На расстояниях, много больших линейных размеров турбулентной области V , это решение описывается асимптотическим выражением

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{r_i r_j}{x^3} \int_V d\mathbf{y} \ddot{T}_{ij} \left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{y}|}{c_0} \right), \quad (10.18)$$

где обозначено

$$\ddot{T}_{ij}(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{ij}(\mathbf{y}, t).$$

Соответственно для средней плотности потока энергии акустической волны, порожденной турбулентным движением:

$$q(\mathbf{r}, t) = \frac{c_0^3 \langle \rho^2(\mathbf{r}, t) \rangle}{\rho_0},$$

получаем выражение

$$q(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{16\pi^2 c_0^5} \frac{r_i r_j r_k r_l}{r^6} \int_V d\mathbf{y} \int_V d\mathbf{z} \left\langle \ddot{T}_{ij} \left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{y}|}{c_0} \right) \ddot{T}_{kl} \left(\mathbf{z}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{z}|}{c_0} \right) \right\rangle. \quad (10.19)$$

Дальнейшие вычисления требуют знания пространственно-временных корреляций поля скорости, которых современная теория сильной турбулентности дать не может. Поэтому исследователи ограничиваются использованием различных правдоподобных гипотез, позволяющих провести вычисления до конца (см., например, [59–61]). В частности, исходя из (10.19), с учетом несжимаемости жидкости в объеме V , с использованием гипотезы Колмогорова–Обухова и ряда упрощающих гипотез, позволяющих расщепить пространственно-временные корреляции, было показано, что средняя плотность потока энергии, а также акустическая мощность пропорциональны $\sim M^5$, где

$$M = \frac{\sqrt{\langle \mathbf{v}^2(\mathbf{r}, t) \rangle}}{c_0}$$

— число Маха (существенно меньшее единицы).

Отметим, что данный результат допускает чисто детерминированную гидродинамическую интерпретацию, основанную на анализе взаимодействия вихрей в слабосжимаемой среде [62]. Простейшими вихревыми системами, излучающими звук, будут две вихревые нити, излучающие цилиндрические волны, и два вихревых кольца, излучающие сферические волны.

10.2.1. Излучение звука вихревыми нитями

Рассмотрим две параллельные вихревые нити, расположенные на расстоянии $2h$ одна от другой, с одинаковыми интенсивностями

$$\kappa = \frac{1}{2} \pi \xi \sigma,$$

где ξ — завихренность (величина вихря, равномерно распределенного по площади бесконечно малого сечения σ), т.е. циркуляция вокруг каждой из вихревых нитей равна

$$\Gamma = 2\pi\kappa.$$

Эти вихревые нити будем называть просто вихрями. В несжимаемой жидкости эти вихри вращаются относительно точки, расположенной посредине соединяющей их прямой (см. рис. 10.1, *a*), с угловой скоростью ω (см., например, [63])

$$\omega = \frac{\kappa}{2h^2}.$$

Выберем систему координат с началом в неподвижной точке и осью z , направленной вдоль вихревой нити. Тогда для потенциала скорости движения $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) = -\text{Re}\nabla\varphi_0(\mathbf{r}, t)$ и квадрата скорости имеем

$$\begin{aligned}\varphi_0(\mathbf{r}, t) &= ik \ln \left[r^2 e^{2i\theta} - h^2 e^{2i\omega t} \right], \\ \mathbf{v}_0^2(\mathbf{r}, t) &= \frac{4\kappa^2 r^2}{r^4 + h^4 - 2r^2 h^2 \cos 2(\omega t - \theta)}.\end{aligned}\quad (10.20)$$

Здесь $r e^{i\theta}$ — радиус-вектор точки наблюдения.

Согласно уравнению Бернулли, локальные пульсации скорости, описываемые (10.20), должны создавать соответствующие пульсации давления, которые в случае слабосжимаемой среды, а именно при $M \ll 1$ (где $M = \frac{\kappa}{2hc_0}$ — число Маха, c_0 — скорость звука), будут распространяться на больших расстояниях от вихрей в виде звуковых волн.

Опишем вокруг начала координат окружность радиуса R , такую что $h \ll R \ll \lambda$, где λ — длина звуковой волны. Заметим, что

$$\frac{\lambda}{h} = \frac{\pi}{M} \gg 1 \quad \text{при} \quad M \ll 1.$$

В области $r < R$ динамика жидкости приближенно совпадает с динамикой жидкости, рассматриваемой как несжимаемая, т.е. описывается формулами (10.20).

В области же $r > R$ уравнения движения будут обычными уравнениями акустики (см., например, [64])

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \right) \varphi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad p'(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t), \quad (10.21)$$

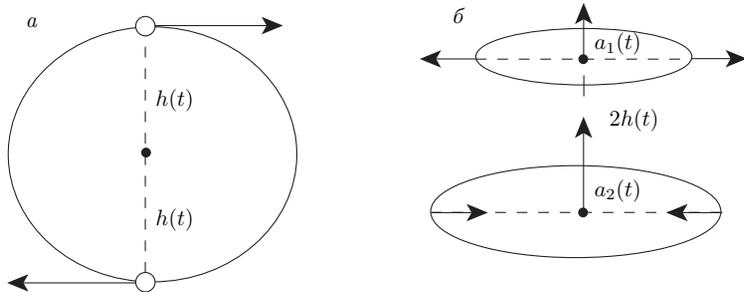


Рис. 10.1. Схемы динамики вихревых линий (*a*) и вихревых колец (*b*)

Здесь $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал скорости движения в акустической волне, $p'(\mathbf{r}, t)$ — давление в ней, а ρ_0 — плотность жидкости.

Учитывая, что $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t)$ зависит от t и θ только в комбинации $2(\omega t - \theta)$, будем искать решение уравнения (10.21) в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = f(r) e^{2i(\omega t - \theta)}. \quad (10.22)$$

Подставляя (10.22) в уравнение (10.21) и решая уравнение для функции $f(r)$ с условием излучения волн, получаем

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = AH_2^2(2\omega r/c_0) e^{2i(\omega t - \theta)}, \quad (10.23)$$

где $H_2^2(z)$ — функция Ганкеля второго рода, A — некоторая постоянная.

В случае $r \gg c_0/2\omega$ имеем обычную расходящуюся цилиндрическую волну с длиной волны $\lambda = \pi c_0/\omega$:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = A \sqrt{\frac{c}{\pi\omega r}} \exp \left\{ 2i \left(\omega t - \frac{\omega r}{c_0} - \theta - \frac{3\pi}{8} \right) \right\}.$$

В случае же $r \ll \lambda$ получаем

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = i \frac{A}{\pi} \left(\frac{c}{\omega r} \right)^2 e^{2i(\omega t - \theta)}.$$

Учитывая, что в области $h \ll r \ll \lambda$ потенциал $\varphi(\mathbf{r}, t)$ должен совпадать с переменной частью $\varphi_0(\mathbf{r}, t)$ (см., например, [64]), которая равна

$$\varphi_0^{(1)}(\mathbf{r}, t) = -i\kappa \frac{h^2}{r^2} e^{2i(\omega t - \theta)},$$

получаем для постоянной величины A значение

$$A = -\pi\kappa M^2 = -\frac{\pi\kappa^3}{4h^2 c_0^2}.$$

Следовательно, потенциал $\varphi(\mathbf{r}, t)$ в волновой зоне имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\kappa M^{3/2} \sqrt{\frac{\pi h}{r}} \exp \left\{ 2i \left(\omega t - \frac{\omega r}{c_0} - \theta - \frac{3\pi}{8} \right) \right\}. \quad (10.24)$$

Из (10.24) при помощи (10.21) находим давление в звуковой волне:

$$p'(\mathbf{r}, t) = -2\kappa\omega\rho_0 M^{3/2} \sqrt{\frac{\pi h}{r}} \exp \left\{ 2i \left(\omega t - \frac{\omega r}{c_0} - \theta - \frac{3\pi}{8} \right) \right\}.$$

Для интенсивности звука (энергии, излучаемой в единицу времени), интегрируя по окружности радиуса $R \gg \lambda$, получаем

$$I = \frac{c_0}{\rho_0} \oint dl \langle [p'(r, t)]^2 \rangle = 2\pi^2 \rho_0 M^4 \frac{\kappa^3}{h^2}. \quad (10.25)$$

Эта излучаемая энергия должна поступать из энергии взаимодействия вихрей, находящихся в области $r < R$. Полная энергия, заключенная в области $r < R$, равна

$$E = \frac{\rho_0}{2} \int dS \mathbf{v}_0^2(\mathbf{r}, t). \quad (10.26)$$

Подставляя (10.20) в (10.26) и исключая бесконечные энергии, соответствующие энергии движения самих вихрей (так как считаем вихри точечными), получаем для энергии взаимодействия

$$E_1 = 4\pi\kappa^2\rho_0 \ln(R/h). \quad (10.27)$$

Изменение энергии взаимодействия может происходить только за счет изменения расстояния между вихрями, т. е. $h = h(t)$, так как циркуляция сохраняется, поскольку рассматривается невязкая среда.

Дифференцируя (10.27) по времени, получаем изменение энергии

$$I(t) = -4\pi\rho_0 \frac{\kappa^2}{h(t)} \frac{d}{dt} h(t), \quad (10.28)$$

которое и переходит в энергию акустических волн. Из (10.25) и (10.28) получаем для скорости разбегания вихрей уравнение

$$\frac{d}{dt} h(t) = \frac{\pi\kappa M^4}{2h(t)}. \quad (10.29)$$

Интегрируя (10.29) с учетом того, что $M = M(t) = \kappa/(2h(t)c_0)$, получаем выражение

$$h(t) = h_0 \left[1 + 6\pi M_0^4 \omega_0 t \right]^{1/6}.$$

Таким образом, интенсивность излучаемого звука $I \sim M^4$. В случае статистически распределенной системы пар вихревых нитей на некоторой части плоскости эта оценка, очевидно, не изменяется.

10.2.2. Излучение звука вихревыми кольцами

В несжимаемой жидкости вихревое кольцо с интенсивностью κ вызывает движение жидкости со скоростью, равной, согласно *закону Био-Савара* (см., например, [63]),

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\kappa}{2} a \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Здесь \mathbf{s} — единичный вектор касательной к вихревому кольцу, совпадающий по направлению с вектором вихря; a — радиус кольца; \mathbf{r} — вектор, характеризующий положение точки наблюдения относительно точек на кольце. В цилиндрических координатах с началом в центре кольца и осью z , направленной вдоль оси кольца, получаем

$$v_R = \frac{\kappa}{2} a \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\cos \phi}{r^3}, \quad v_\theta = 0, \quad v_z = \frac{\kappa}{2} a \int_0^{2\pi} d\phi \frac{a - R \cos \phi}{r^3}, \quad (10.30)$$

где

$$r = \left(R^2 + z^2 + a^2 - 2Rac \cos \phi \right)^{1/2}.$$

Здесь радиус-вектор точки наблюдения имеет координаты (R, θ, z) .

Пусть теперь имеются два вихревых кольца с одинаковыми интенсивностями, одинаковых радиусов a_0 , находящиеся на расстоянии $2h_0$ одно от другого. В этом случае переднее кольцо начнет увеличиваться в размерах, заднее же — уменьшаться и будет догонять переднее (см. рис. 10.1, б). В некоторый момент времени оно пройдет сквозь переднее и кольца поменяются местами. Этот эффект называется *игрой вихревых колец*. В слабосжимаемой среде эти движения колец создают локальные сжатия и разрежения среды, которые на больших расстояниях будут распространяться в виде сферических акустических волн. Для определения структуры излучаемого звука необходимо знать движение одного кольца относительно другого в несжимаемой жидкости.

Пусть в некоторый момент времени t кольца имеют радиусы $a_1(t)$ и $a_2(t)$ соответственно и находятся на расстоянии $2h(t)$ друг от друга. Скорости изменения радиусов колец равны радиальным скоростям, индуцированным кольцами друг на друга, а скорость изменения расстояния между кольцами равна разности z компонент скоростей, индуцированных кольцами. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_1(t) &= 2\kappa a_2(t) h(t) \int_0^\pi d\phi \frac{\cos \phi}{|a_1(t) - a_2(t)|^3}, \\ \frac{d}{dt} a_2(t) &= -2\kappa a_1(t) h(t) \int_0^\pi d\phi \frac{\cos \phi}{|a_1(t) - a_2(t)|^3}, \\ \frac{d}{dt} h(t) &= -\frac{\kappa}{2} \left[a_1^2(t) - a_2^2(t) \right] \int_0^\pi d\phi \frac{1}{|a_1(t) - a_2(t)|^3}, \end{aligned} \quad (10.31)$$

где

$$|a_1(t) - a_2(t)| = \left[a_1^2(t) + a_2^2(t) + 4h^2(t) - 2a_1(t)a_2(t) \cos \phi \right]^{1/2}.$$

Уравнения (10.31) надо решать с начальными условиями при $t = 0$:

$$a_1(0) = a_2(0) = a_0, \quad h(0) = h_0.$$

Первые два уравнения сразу дают связь между $a_1(t)$ и $a_2(t)$, а именно:

$$a_1^2(t) + a_2^2(t) = 2a_0^2, \quad (10.32)$$

которая показывает, что сохраняется момент инерции колец относительно оси z .

Интегралы, входящие в правую часть (10.31), выражаются через эллиптические функции. Если кольца находятся далеко друг от друга ($\gamma = h_0/a_0 \gg 1$), то их взаимодействие мало и они движутся в первом приближении независимо друг от друга с постоянной скоростью, определяемой размером сечения колец. В другом предельном случае ($\gamma \ll 1$), который и будет далее рассматриваться, кольца активно взаимодействуют. Основной вклад в интегралы, входящие в правую часть (10.31), вносит

окрестность точки $\phi = 0$. Поэтому можно заменить в первых двух уравнениях $\cos \phi$, входящий в числитель, на единицу. Тогда получаем второй интеграл движения

$$4h^2(t) + [a_1(t) - a_2(t)]^2 = 4h_0^2. \quad (10.33)$$

Интеграл (10.33) означает, что сохраняется величина расстояния между точками на разных кольцах, имеющих один и тот же полярный угол.

Существование интегралов (10.32) и (10.33) позволяет свести систему (10.31) к одному уравнению относительно переменной $\theta(t)$, вводимой согласно равенствам

$$a_1(t) = \sqrt{2}a_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \gamma \sin \theta(t)\right), \quad a_2(t) = \sqrt{2}a_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma \sin \theta(t)\right), \quad (10.34)$$

$$h(t) = h_0 \cos \theta(t).$$

Тогда (в первом порядке по γ) законы сохранения (10.32) и (10.33) будут автоматически выполняться. Подставляя (10.34) в (10.31), разлагая в ряд и вычисляя интеграл, получаем

$$\theta(t) = \frac{\kappa}{2h_0^2} t.$$

Следовательно, для радиусов колец и расстояния между ними имеем

$$a_1(t) = a_0 (1 + \gamma \sin(\omega t)), \quad a_2(t) = a_0 (1 - \gamma \sin(\omega t)), \quad (10.35)$$

$$h(t) = h_0 \cos(\omega t),$$

где, как и в случае вихревых нитей,

$$\omega = \frac{\kappa}{2h_0^2}. \quad (10.36)$$

Отметим, что бесконечно тонкие кольца движутся с бесконечно большой скоростью. Реальные же вихревые кольца движутся с конечной скоростью, много меньшей скорости звука, а динамика движения колец друг относительно друга мало чем отличается от рассмотренной выше. Совпадение (10.36) с соответствующей угловой скоростью для вихревых нитей показывает, что точки на кольцах, имеющие один и тот же полярный угол, вращаются относительно точки, находящейся посередине прямой, их соединяющей, с той же частотой, что и вихревые нити, находящиеся на том же расстоянии с теми же интенсивностями, что и кольца.

Для изучения структуры излучаемого нашей системой звука необходимо знать поле скоростей на больших расстояниях от колец. Свяжем систему координат с точкой, находящейся посередине между кольцами на их общей оси. Скорость движения жидкости вне колец равна

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\kappa}{2} a_1(t) \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} + \frac{\kappa}{2} a_2(t) \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\mathbf{s}_2 \times \mathbf{r}_2}{r_2^3}. \quad (10.37)$$

Здесь \mathbf{s}_1 и \mathbf{s}_2 — единичные векторы, касательные к вихревым кольцам, а \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — векторы, характеризующие положение точки наблюдения относительно точек на кольцах. На больших расстояниях от колец в цилиндрических координатах переменные части скорости имеют вид

$$v_R^{(1)}(t) = \frac{3\kappa R (4z^2 - R^2)}{4 (R^2 + z^2)^{3/2}} h (a_1^2 - a_2^2), \quad v_\theta^{(1)}(t) = 0, \quad (10.38)$$

$$v_z^{(1)}(t) = \frac{3\kappa z (2z^2 - 3R^2)}{4 (R^2 + z^2)^{3/2}} h (a_1^2 - a_2^2).$$

Вводя потенциал $\mathbf{v}^{(1)} = -\nabla\varphi^{(1)}$, получаем

$$\varphi^{(1)} = -\frac{\kappa}{4} \frac{R^2 - 2z^2}{(R^2 + z^2)^{5/2}} h (a_1^2 - a_2^2). \quad (10.39)$$

Подставляя (10.35) в (10.39) и переходя к сферическим координатам, можно (10.39) переписать в комплексном виде

$$\varphi^{(1)} = i \frac{\kappa}{2} a_0^3 \gamma^2 \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3} e^{2i\omega t}. \quad (10.40)$$

Далее будем действовать аналогично случаю двух вихревых нитей. Окружим начало координат сферой радиуса L такой, что $a_0 \ll L \ll \lambda$, где λ — длина волны излучаемых звуковых волн. Будем пользоваться тем, что внутри сферы движение жидкости приближенно совпадает с движением несжимаемой жидкости. Вне сферы уравнения движения будут иметь вид (10.21) с той лишь разницей, что теперь Δ — пространственный оператор Лапласа.

Представим потенциал φ в виде

$$\varphi(r, \theta) = f(r, \theta) e^{2i\omega t}.$$

Подставляя это выражение в (10.21) и учитывая, что при $r \gg \lambda$ должны быть расходящиеся сферические волны, получаем для $f(r, \theta)$ выражение

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{r}} H_{n+1/2}^{(2)}\left(\frac{2\omega r}{c_0}\right) P_n(\cos \theta),$$

где $H_{n+1/2}^{(2)}(z)$ — функция Ганкеля второго рода, а $P_n(z)$ — полином Лежандра.

Сравнивая потенциал $\varphi(r, \theta)$ для $r \ll \lambda$ с $\varphi^{(1)}(r, \theta)$, получаем, что $n = 2$, и постоянная

$$A_2 = \frac{2\sqrt{\pi} \kappa \gamma^2 a_0^3 \omega^{5/2}}{3 c_0^{5/2}}.$$

Следовательно, в волновой зоне потенциал и давление имеют вид

$$\varphi(r, \theta) = \frac{2\kappa}{3} \left(\frac{\kappa}{2h_0 c_0}\right)^2 \frac{a_0}{r} (1 - 3 \cos^2 \theta) \exp\left\{2i\left(\omega t - \frac{\omega r}{c_0} - \frac{3\pi}{4}\right)\right\},$$

$$p'(r, \theta) = \frac{4i\kappa}{3} \left(\frac{\kappa}{2h_0 c_0}\right)^2 \frac{a_0 \omega}{r} \rho_0 (1 - 3 \cos^2 \theta) \exp\left\{2i\left(\omega t - \frac{\omega r}{c_0} - \frac{3\pi}{4}\right)\right\},$$

и для распределения по углам излучаемой энергии за единицу времени получаем

$$I(\theta) = \frac{8\pi}{9} \frac{\kappa^3 a_0^2}{h_0^3} \left(\frac{\kappa}{2h_0 c_0} \right)^5 \rho_0 (1 - 3 \cos^2 \theta)^2.$$

Излучение энергии вихревыми кольцами носит квадрупольный характер, и основная часть энергии излучается в конусе с осью z с углом раствора 106° как в положительном направлении z , так и в отрицательном. Интегрируя по θ , получаем для полной энергии за единицу времени выражение

$$I = \frac{64\pi}{45} \frac{\kappa^3 a_0^2}{h_0^3} \left(\frac{\kappa}{2h_0 c_0} \right)^5 \rho_0.$$

Таким образом, интенсивность звука, излучаемого двумя вихревыми кольцами, $\sim M^5$. В случае статистически распределенной системы пар вихревых колец в некоторой части пространства интенсивность звука также будет $\sim M^5$, что согласуется с оценками [59–61].

Часть III

ПРИМЕРЫ КОГЕРЕНТНЫХ ЯВЛЕНИЙ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

О черк 11

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ И ДИФФУЗИЯ ЧАСТИЦ И ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В СЛУЧАЙНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ И МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

11.1. Общие замечания

Диффузия таких пассивных полей, как поле плотности примеси (концентрация частиц) и магнитного поля, является одной из важных проблем теории турбулентности в магнитной гидродинамике. Исходными стохастическими уравнениями для поля плотности примеси $\rho(\mathbf{r}, t)$ и магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ являются уравнение непрерывности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = \mu \Delta \rho(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (11.1)$$

и уравнение индукции (1.61) на с. 39

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \left(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + \mu_H \Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (11.2)$$

дополненные членами, связанными с диссипативными процессами, где μ_ρ – динамический коэффициент диффузии для поля плотности, а $\mu_H = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ – динамический коэффициент диффузии магнитного поля, связанный с проводимостью среды σ .

В этих уравнениях $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)$ – детерминированная составляющая поля скоростей (средний поток), а $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – случайная составляющая. В общем случае случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ может иметь как соленоидальную (для которой $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$), так и потенциальную (для которой $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$) составляющие. Поле $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ при этом бездивергентно, т. е. $\text{div } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0$.

Следует специально отметить, что уравнение (11.2) описывает диффузию магнитного поля в трехмерном пространстве $\mathbf{r} = \{\mathbf{R}, z\}$ ($\mathbf{R} = \{x, y\}$) трехмерным полем скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \{u_x, u_y, u_z\}$ ($d = 3$).

В случае плоскопараллельного потока двумерное поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = \{u_x, u_y\}$ ($d = 2$). В этом случае для трехмерного магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{R}, t) = \{\mathbf{H}_\perp, H_z\}$, где $\mathbf{H}_\perp(\mathbf{R}, t) = \{H_x, H_y\}$, уравнение (11.2) расщепляется. А именно, двумерная компонента магнитного поля в плоскости \mathbf{R} – $\mathbf{H}_\perp(\mathbf{R}, t)$ описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) \right) \mathbf{H}_\perp(\mathbf{R}, t) = \left(\mathbf{H}_\perp(\mathbf{R}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) + \mu_H \Delta \mathbf{H}_\perp(\mathbf{R}, t),$$

$$\mathbf{H}_\perp(\mathbf{R}, 0) = \mathbf{H}_{\perp 0}(\mathbf{R}),$$

а компонента магнитного поля $H_z(\mathbf{R}, t)$ описывается уравнением непрерывности для пассивного скаляра

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) \right) H_z(\mathbf{R}, t) = \mu_H \Delta H_z(\mathbf{R}, t), \quad H_z(\mathbf{R}, 0) = H_{z0}(\mathbf{R}),$$

типа уравнения для поля плотности (11.1).

Динамические системы (11.1) и (11.2) – консервативны и в процессе эволюции в общем случае сохраняются как общая масса примеси

$$M = M(t) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r}) = \text{const},$$

так и поток магнитного поля

$$\int d\mathbf{r} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \text{const}.$$

Для однородных начальных условий следствием консервативности динамических систем (11.1) и (11.2) являются равенства

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0, \quad \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathbf{H}_0,$$

где через $\langle \dots \rangle$ обозначено усреднение по ансамблю реализаций случайного поля $\{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\}$. В общем случае статистическое среднее, например, для магнитного поля $\int d\mathbf{r} \langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \rangle$ для однородных начальных условий переходит в выражение $\langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \rangle$, т. е.

$$\int d\mathbf{r} \langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \rangle \Leftrightarrow \langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \rangle,$$

и, следовательно, величина $\langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \rangle$ является удельной величиной, приходящейся на единицу объема, и таким образом – интегральной величиной. Так, например, для однородных начальных условий величина $\langle \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ является средней удельной энергией, приходящейся на единицу объема, в то время как для неоднородных начальных условий эта величина является средней плотностью энергии. Интегральные величины характеризуют динамические системы в целом на всем пространстве, выделяя процессы генерации полей, что позволяет не отвлекаться на детали динамики, связанной с адвекцией этих величин случайным полем скоростей [65].

Нас интересует эволюция во времени из заданных начальных распределений $\rho_0(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ (и в частности однородных $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0$ и $\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0$) различных одноточечных статистических характеристик поля плотности и его градиента – $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$, а также магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ и его различных пространственных производных. Такими характеристиками являются – плотности вероятностей самих этих полей, изо-тропизация векторных корреляций, спиральность этих векторных полей, и их диссипация.

На начальных этапах развития диффузии можно пренебречь эффектами динамической диффузии. Тогда уравнения (11.1) и (11.2) упрощаются и принимают вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (11.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \left(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{U}(\mathbf{r}, t). \quad (11.4)$$

Тогда в этих системах происходят такие нестационарные и стохастические явления, как перемешивание, генерация и быстрый рост во времени более мелкомасштабных

возмущений (например, стохастическое (турбулентное) динамо) и, в некоторых случаях, кластеризация в фазовом и физическом пространствах. Кластеризация какого-либо поля (плотности примеси, энергии магнитного поля и т. п.) есть возникновение компактных областей повышенного содержания этого поля, окруженных областями с относительно пониженным содержанием этих полей.

Так при однородных начальных условиях поле плотности остается постоянным во времени для несжимаемой жидкости (бездивергентное поле скоростей) и, следовательно, его градиент тождественно равен нулю в любой точке пространства. Но в сжимаемых потоках (дивергентное поле скоростей) всегда осуществляется кластеризация поля плотности. И поэтому, естественно, возникают большие градиенты поля плотности. Подобную картину мы видели на примере простейшей задачи, решение которой представлено на рис. 1.12 на с. 37. Характерное время образования кластерной структуры поля плотности определяется равенством $D^P t \sim 1$, где величина D^P , описываемая равенством (4.58) на с. 108, связана с потенциальной составляющей спектральной плотности поля скоростей.

Для магнитного же поля при определенных условиях также может осуществляться кластеризация его энергии и пример такой кластеризации в случае простейшего потенциального поля скорости мы видели на рис. 1.14 на с. 43. Однако, даже в несжимаемом потоке жидкости происходит общая генерация магнитного поля, появляется сильная изменчивость структуры поля и различные моментные функции как самого магнитного поля, так и его пространственных производных, экспоненциально быстро растут во времени. Поэтому в некоторый момент времени диссипация полей, связанная с производными более высокого порядка, быстро усиливается и влияние коэффициентов динамической диффузии становится определяющим.

Это *эйлерово описание* эволюции поля плотности и магнитного поля.

Уравнения (11.3), (11.4) – уравнения в частных производных 1-го порядка и, как указывалось в первой главе, может быть решено методом характеристик. Вводя характеристическую кривую $\mathbf{r}(t)$, описывающую уравнение движения частицы

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (11.5)$$

перейдем от (11.3) к обыкновенному дифференциальному уравнению для плотности частицы

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(t), \quad \rho(0) = \rho_0(\mathbf{r}_0). \quad (11.6)$$

Решения уравнений (11.5), (11.6) имеют наглядную геометрическую интерпретацию. Они описывают эволюцию плотности в окрестности фиксированной частицы примеси, траектория которой задается равенством $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Причем, как видно из (11.6), плотность в дивергентных потоках меняется, увеличиваясь в областях сжатия и уменьшаясь в областях разрежения среды.

Решения системы (11.5), (11.6) зависят от характеристического параметра \mathbf{r}_0 – начальной координаты частицы

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0), \quad \rho(t) = \rho(t|\mathbf{r}_0), \quad (11.7)$$

что будем отмечать вертикальной чертой. Компоненты вектора \mathbf{r}_0 , однозначно определяющего положение произвольной частицы, называют ее *лагранжевыми координатами*. При этом уравнения (11.5), (11.6) соответствуют *лагранжеву описанию* эволюции поля плотности. Связь между эйлеровым и лагранжевым описаниями задается первым из равенств (11.7). Разрешив его относительно \mathbf{r}_0 , получим соотношение, выражающее лагранжевы координаты через эйлеровы

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t). \quad (11.8)$$

Исключая затем, с помощью (11.8), зависимость от \mathbf{r}_0 в последнем равенстве (11.7), вернемся к эйлерову описанию плотности

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(t|\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)) = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(t|\mathbf{r}_0) j(t|\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \quad (11.9)$$

где введена новая функция, называемая *расходимость*,

$$j(t|\mathbf{r}_0) = \det \|j_{ik}(t|\mathbf{r}_0)\| = \det \left\| \frac{\partial r_i(t|\mathbf{r}_0)}{\partial r_{0k}} \right\|,$$

которая является количественной мерой степени сжатия или растяжения физически бесконечно малых жидких частиц. Для нее легко получить уравнение

$$\frac{d}{dt} j(t|\mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} j(t|\mathbf{r}_0), \quad j(0|\mathbf{r}_0) = 1. \quad (11.10)$$

сопоставление которого с уравнением (11.6) дает равенство

$$\rho(t|\mathbf{r}_0) = \frac{\rho_0(\mathbf{r}_0)}{j(t|\mathbf{r}_0)}. \quad (11.11)$$

Таким образом, выражение (11.9) можно переписать в виде равенства

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \quad (11.12)$$

устанавливающего связь между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками плотности примеси. Дельта функция, в правой части (11.12) является *индикаторной функцией* для положения лагранжевой частицы и, следовательно, после усреднения равенства (11.12) по ансамблю реализаций случайного поля скоростей, получаем связь средней плотности в эйлеровом описании с одновременной плотностью вероятностей

$$P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0) = \langle \delta(\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) \rangle$$

лагранжевой частицы

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0).$$

Аналогичным образом получаем и связь одновременной пространственной корреляционной функции поля плотности в эйлеровом описании

$$\langle R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) \rangle = \langle \rho(\mathbf{r}_1, t) \rho(\mathbf{r}_2, t) \rangle,$$

где $R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \rho(\mathbf{r}_1, t)\rho(\mathbf{r}_2, t)$, с совместной плотностью вероятностей положения двух частиц

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t | \mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_{02}) = \langle \delta(\mathbf{r}_1(t | \mathbf{r}_{01}) - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_2(t | \mathbf{r}_{02}) - \mathbf{r}_2) \rangle$$

в виде равенства

$$\langle R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) \rangle = \int d\mathbf{r}_{01} \int d\mathbf{r}_{02} \rho_0(\mathbf{r}_{01}) \rho_0(\mathbf{r}_{02}) P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t | \mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_{02}).$$

Для бездивергентного поля скоростей ($\text{div } \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0$) расходимость частицы, также как и ее плотность сохраняются, т. е.

$$j(t | \mathbf{r}_0) = 1, \quad \rho(t | \mathbf{r}_0) = \rho_0(\mathbf{r}_0).$$

Случайную составляющую поля скоростей будем предполагать в общем случае дивергентным ($\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$) гауссовым полем статистически однородным, обладающим сферической симметрией, но не имеющее, вообще говоря, отражательной симметрии в пространстве, и стационарным во времени с корреляционным и спектральным тензорами ($\tau = t - t_1$)

$$B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \tau) = \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle = \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)},$$

$$E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{r} B_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

где параметр d – размерность пространства. В силу предполагаемых условий симметрии, корреляционный тензор $B_{ij}(\mathbf{r}, \tau)$ имеет векторную структуру (4.48) на с. 106 ($\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}$)

$$B_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = B_{ij}^{\text{iso}}(\mathbf{r}, \tau) + C(r, \tau) \varepsilon_{ijk} r_k,$$

где изотропная часть корреляционного тензора

$$B_{ij}^{\text{iso}}(\mathbf{r}, \tau) = A(r, \tau) r_i r_j + B(r, \tau) \delta_{ij},$$

а ε_{ijk} – антисимметричный псевдотензор по любой паре индексов. Изотропной части корреляционного тензора соответствует пространственный спектральный тензор вида

$$E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = E_{ij}^{\text{s}}(\mathbf{k}, \tau) + E_{ij}^{\text{p}}(\mathbf{k}, \tau),$$

где спектральные составляющие тензора поля скоростей имеют структуру

$$E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = E^{\text{s}}(k, \tau) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad E_{ij}^{\text{p}}(\mathbf{k}, \tau) = E^{\text{p}}(k, \tau) \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

Здесь через $E^{\text{s}}(k, \tau)$ и $E^{\text{p}}(k, \tau)$ обозначены соответственно соленоидальная и потенциальная компоненты спектральной плотности поля скоростей.

В дальнейшем, при расчете статистических характеристик частиц и поля плотности воспользуемся приближением дельта-коррелированности во времени поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, в рамках которого корреляционный тензор $B_{ij}(\mathbf{r}, t)$ аппроксимируется выражением

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t) = 2B_{ij}(\mathbf{r})\delta(t), \quad (11.13)$$

где

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau B_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = \int_0^{\infty} d\tau B_{ij}(\mathbf{r}, \tau).$$

Корреляции гауссового случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ с функционалами от него можно расщепить на основе формулы Фурутцу–Новикова (8.10) на с. 177. Для случая дельта-коррелированного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ эта формула упрощается и имеет вид

$$\langle u_k(\mathbf{r}, t) R[t; \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)] \rangle = \int d\mathbf{r}' B_{kl}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\langle \frac{\delta R[t; \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)]}{\delta u_l(\mathbf{r}', t - 0)} \right\rangle, \quad (11.14)$$

где $0 \leq \tau \leq t$.

11.2. Диффузия частиц в случайном поле скоростей

11.2.1. Одноточечные статистические характеристики

Итак, в лагранжевом представлении диффузия частицы в случайном поле скоростей описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (11.5), (11.6) и (11.10). От них легко перейти к линейному уравнению Лиувилля в соответствующем фазовом пространстве для индикаторной функции

$$\varphi_{\text{Lag}}(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) \delta(\rho(t | \mathbf{r}_0) - \rho) \delta(j(t | \mathbf{r}_0) - j), \quad (11.15)$$

в форме записи которой явно учтено, что решение исходных динамических уравнений зависит от лагранжевых координат \mathbf{r}_0 . Дифференцируя уравнение (11.15) по времени и используя равенства (11.5), (11.6) и (11.10), приходим к уравнению Лиувилля, эквивалентному исходной задаче

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \varphi_{\text{Lag}}(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial}{\partial j} j \right) \varphi_{\text{Lag}}(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0), \quad (11.16)$$

$$\varphi_{\text{Lag}}(\mathbf{r}, \rho, j, 0 | \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \delta(\rho_0(\mathbf{r}_0) - \rho) \delta(j - 1).$$

Одновременная плотность вероятностей для решения динамических задач (11.5), (11.6) и (11.10) совпадает с усредненной по ансамблю реализаций значениям индикаторной функции

$$P(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0) = \langle \varphi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) \rangle.$$

Усреднив уравнение (11.16) по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, используя формулу Фурутцу – Новикова (11.14) и принимая во внимание равенство

$$\frac{\delta}{\delta u_{\beta}(\mathbf{r}', t - 0)} \varphi_{\text{Lag}}(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0) = \left\{ -\frac{\partial}{\partial r_{\beta}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_{\beta}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial}{\partial j} j \right) \right\} \varphi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0),$$

и выражения (4.56) на с. 108, приходим к следующему уравнению Фоккера–Планка для одновременной лагранжевой плотности вероятностей $P(\mathbf{r}, \rho, j, t|\mathbf{r}_0)$ координаты частицы $\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0)$, ее плотности $\rho(t|\mathbf{r}_0)$ и расходимости $j(t|\mathbf{r}_0)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0\Delta\right) P(\mathbf{r}, \rho, j, t|\mathbf{r}_0) = D^p \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial j} \rho j + \frac{\partial^2}{\partial j^2} j^2 \right) P(\mathbf{r}, \rho, j, t|\mathbf{r}_0),$$

$$P(\mathbf{r}, \rho, j, 0|\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\rho - \rho_0(\mathbf{r}_0)) \delta(j - 1). \quad (11.17)$$

Решение уравнения (11.17) имеет вид

$$P(\mathbf{r}, \rho, j, t|\mathbf{r}_0) = P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0) P(j, t|\mathbf{r}_0) P(\rho, t|\mathbf{r}_0), \quad (11.18)$$

где $P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}')$ — вероятностное распределение координат частицы, удовлетворяющее уравнению, вытекающему из (11.17),

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0) = D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0), \quad P(\mathbf{r}, 0|\mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

и, следовательно, является гауссовым распределением

$$P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0) = \exp \left\{ D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{(4\pi D_0 t)^{d/2}} \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{4D_0 t} \right\}, \quad (11.19)$$

где d — размерность пространства.

Функция $P(j, t|\mathbf{r}_0)$ — вероятностное распределение поля расходимости в окрестности частицы, удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка, вытекающему из (11.17),

$$\frac{\partial}{\partial t} P(j, t|\mathbf{r}_0) = D^p \frac{\partial^2}{\partial j^2} j^2 P(j, t|\mathbf{r}_0), \quad P(j, 0|\mathbf{r}_0) = \delta(j - 1), \quad (11.20)$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} j P(j, t|\mathbf{r}_0) = D^p j \frac{\partial}{\partial j} \left(j \frac{\partial}{\partial j} + 1 \right) j P(j, t|\mathbf{r}_0), \quad P(j, 0|\mathbf{r}_0) = \delta(j - 1). \quad (11.21)$$

В уравнении (11.21) можно выполнить замену переменных

$$j = e^\eta, \quad \eta = \ln j, \quad (11.22)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = j \frac{\partial}{\partial j}.$$

Тогда, после замены переменных (11.22), уравнение (11.21) для функции

$$j P(j, t|\mathbf{r}_0)|_{j=e^\eta} = F(\eta, t)$$

принимает вид уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} F(\eta, t) = D^p \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + 1 \right) F(\eta, t), \quad (11.23)$$

с начальным условием

$$F(\eta, 0) = j P(j, 0|\mathbf{r}_0)|_{j=e^\eta} = e^\eta \delta(e^\eta - 1) = e^\eta \frac{\delta(\eta)}{e^\eta} = \delta(\eta). \quad (11.24)$$

Следовательно, решение задачи (11.23), (11.24) соответствует гауссову распределению вероятностей

$$F(\eta, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{(\eta + \tau)^2}{4\tau} \right\}. \quad (11.25)$$

В (11.25) и ниже используется безразмерное время $\tau = D^p t$. Переходя теперь к функции $F(\eta, t)|_{\eta=\ln j} = j P(j, t|\mathbf{r}_0)$, получаем решение уравнения (11.20) в виде

$$P(j, t|\mathbf{r}_0) = \exp \left\{ D^p t \frac{\partial^2}{\partial j^2} j^2 \right\} \delta(j - 1) = \frac{1}{2j\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{(\ln j + \tau)^2}{4\tau} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2j\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(je^\tau)}{4\tau} \right\}. \quad (11.26)$$

Подчеркнем, что полученное решение (11.18) означает статистическую независимость координат $\mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0)$ и расходимости $j(t|\mathbf{r}_0)$ в окрестности частицы с лагранжевой координатой \mathbf{r}_0 . Причем логарифмически нормальное распределение (11.26) означает, что величина $\eta(t|\mathbf{r}_0) = \ln j(t|\mathbf{r}_0)$ распределена по гауссову закону с параметрами

$$\langle \eta(t|\mathbf{r}_0) \rangle = -\tau, \quad \sigma_\eta^2(t) = 2\tau. \quad (11.27)$$

В частности, из (11.26), как впрочем и непосредственно из уравнения (11.20), вытекают следующие выражения для моментов случайного поля расходимости:

$$\langle j^n(t|\mathbf{r}_0) \rangle = e^{n(n-1)\tau}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots. \quad (11.28)$$

Отметим также, что средняя расходимость постоянна: $\langle j(t|\mathbf{r}_0) \rangle = 1$, а ее высшие моменты экспоненциально растут со временем.

Заметим еще, что согласно равенствам (11.11) на с. 247 и (11.28) имеем следующее выражение для лагранжевых моментов плотности:

$$\langle \rho^n(t|\mathbf{r}_0) \rangle = \rho_0^n(\mathbf{r}_0) e^{n(n+1)\tau},$$

означающее, в частности, экспоненциальный рост как средней плотности, так и ее высших моментов в лагранжевом представлении. При этом случайный процесс $\rho(t|\mathbf{r}_0)$ является логнормальным и плотность вероятностей для плотности частицы имеет вид

$$P(\rho, t|\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(\rho e^{-\tau}/\rho_0(\mathbf{r}_0))}{4\tau} \right\}. \quad (11.29)$$

Эту плотность вероятностей можно получить и как решение уравнения Фоккера–Планка, следующего из (11.17),

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(\rho, \tau|\mathbf{r}_0) = \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} P(\rho, \tau|\mathbf{r}_0), \quad P(\rho, 0|\mathbf{r}_0) = \delta(\rho - \rho_0(\mathbf{r}_0)). \quad (11.30)$$

Запишем уравнение (11.30) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho P(\rho, \tau | \mathbf{r}_0) = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - 1 \right) \rho P(\rho, \tau | \mathbf{r}_0), \quad P(\rho, 0 | \mathbf{r}_0) = \delta(\rho - \rho_0(\mathbf{r}_0)). \quad (11.31)$$

Тогда, после замены переменных, аналогичной (11.22),

$$\rho = e^\eta, \quad \eta = \ln \rho,$$

уравнение (11.31) для функции

$$\rho P(\rho, \tau | \mathbf{r}_0)|_{\rho=e^\eta} = F(\eta, \tau | \mathbf{r}_0)$$

принимает вид уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F(\eta, \tau | \mathbf{r}_0) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - 1 \right) F(\eta, \tau | \mathbf{r}_0), \quad (11.32)$$

с начальным условием

$$F(\eta, 0 | \mathbf{r}_0) = \rho P(\rho, 0 | \mathbf{r}_0)|_{\rho=e^\eta} = e^\eta \delta(e^\eta - \rho_0(\mathbf{r}_0)) = \delta(\eta - \ln \rho_0(\mathbf{r}_0)). \quad (11.33)$$

Следовательно, решение задачи (11.32), (11.33) соответствует гауссову распределению вероятностей

$$F(\eta, \tau | \mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{(\eta - \ln \rho_0(\mathbf{r}_0) - \tau)^2}{4\tau} \right\}. \quad (11.34)$$

Переходя теперь к функции $F(\eta, \tau | \mathbf{r}_0)|_{\eta=\ln \rho} = \rho P(\rho, \tau | \mathbf{r}_0)$, и получаем решение уравнения (11.30) в виде (11.29). Отметим, что теперь логарифмически нормальное распределение (11.29) означает, что величина $\eta(t | \mathbf{r}_0) = \ln \rho(t | \mathbf{r}_0)$ распределена по гауссову закону с параметрами

$$\langle \eta(t | \mathbf{r}_0) \rangle = \ln \rho_0(\mathbf{r}_0) + \tau, \quad \sigma_\eta^2(t) = 2\tau.$$

Выявленное выше парадоксальное поведение статистических характеристик расходимости и плотности, состоящее в одновременном росте со временем их моментных функций, объясняется свойствами логарифмически нормального распределения вероятностей. Так, в соответствии с формулами (4.59) и (4.60) на с. 109, кривой типичной реализации случайной расходимости является экспоненциально спадающая кривая

$$j^*(t) = e^{-\tau}.$$

Кроме того, для реализаций логарифмически нормального процесса существуют также мажорантные оценки. И, например, с вероятностью $p = 1/2$

$$j(t | \mathbf{r}_0) < 4e^{-\tau/2}$$

на всем интервале времени $t \in (t_1, t_2)$.

Аналогично, для реализаций плотности имеем типичную реализацию и минорантную оценку

$$\rho^*(t) = \rho_0 e^\tau, \quad \rho(t | \mathbf{r}_0) > \frac{\rho_0}{4} e^{\tau/2}.$$

Подчеркнем, что исследованные выше лагранжевы статистические свойства частицы в потоках, содержащих случайную дивергентную составляющую, качественно отличаются от статистических свойств частицы в бездивергентных потоках, где $j(t | \mathbf{r}_0) \equiv 1$, а плотность в окрестности фиксированной частицы сохраняется $\rho(t | \mathbf{r}_0) = \rho_0(\mathbf{r}_0) = \text{const}$. Приведенные выше статистические оценки для частицы означают, что статистика случайных процессов $j(t | \mathbf{r}_0)$ и $\rho(t | \mathbf{r}_0)$ формируется выбросами их реализаций относительно типичных реализаций.

В то же время распределения вероятностей координат частиц в обоих случаях дивергентного и бездивергентного поля скоростей по сути одинаковы.

11.2.2. Двухточечные статистические характеристики

Рассмотрим теперь совместную динамику двух частиц в отсутствии среднего потока. В этом случае индикаторная функция для двух частиц

$$\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \delta(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_2)$$

описывается уравнением Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = - \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t) \right] \varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t),$$

усреднение которой по ансамблю реализаций поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, с учетом формулы Фурутцу-Новикова (11.14) и равенства

$$\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}', t - 0)} \varphi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = - \left[\frac{\partial}{\partial r_{1j}} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') + \frac{\partial}{\partial r_{2j}} \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') \right] \varphi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2),$$

приводит для совместной плотности вероятностей положения двух частиц

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle \varphi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle$$

к уравнению Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = & \left[\frac{\partial^2}{\partial r_{1i} \partial r_{1j}} + \frac{\partial^2}{\partial r_{2i} \partial r_{2j}} \right] B_{ij}(0) P(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \\ & + 2 \frac{\partial^2}{\partial r_{1i} \partial r_{2j}} B_{ij}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t). \end{aligned} \quad (11.35)$$

Умножая теперь уравнение (11.35) на функцию $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{l})$ и интегрируя по \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 получаем для плотности вероятностей относительной диффузии двух частиц

$$P(\mathbf{l}, t) = \langle \delta(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{l}) \rangle$$

уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{l}, t) = \frac{\partial^2}{\partial l_\alpha \partial l_\beta} D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) P(\mathbf{l}, t), \quad P(\mathbf{l}, 0) = \delta(\mathbf{l} - \mathbf{l}_0), \quad (11.36)$$

где

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = 2 [B_{\alpha\beta}(0) - B_{\alpha\beta}(\mathbf{l})]$$

— структурная матрица векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, а \mathbf{l}_0 — начальное расстояние между частицами.

В общем случае решить уравнение (11.36) не удастся. Однако, если начальное расстояние между частицами $l_0 \ll l_{\text{cor}}$, где l_{cor} — пространственный радиус корреляции поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, то можно разложить функции $D_{\alpha\beta}(\mathbf{l})$ в ряд Тейлора, в результате чего в первом приближении получаем

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = - \left. \frac{\partial^2 B_{\alpha\beta}(\mathbf{l})}{\partial l_i \partial l_j} \right|_{\mathbf{l}=\mathbf{0}} l_i l_j.$$

С использованием представления (4.56) на с. 108, диффузионный тензор упрощается и может быть записан в виде

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = \frac{1}{d(d+2)} \left[(D^s(d+1) + D^p) \delta_{\alpha\beta} l^2 - 2(D^s - D^p) l_\alpha l_\beta \right], \quad (11.37)$$

где d — размерность пространства.

Подставляя теперь (11.37) в (11.36), умножая обе части получившегося уравнения на l^n и интегрируя по \mathbf{l} , получаем замкнутое уравнение

$$\frac{d}{dt} \ln \langle l^n(t) \rangle = \frac{1}{d(d+2)} \left[(D^s(d+1) + D^p) n(d+n-2) - 2(D^s - D^p) n(n-1) \right],$$

решение которого соответствует экспоненциально растущим во времени функциям для всех моментов ($n = 1, 2, \dots$). При этом распределение вероятностей для случайного процесса $l(t)/l_0$ будет логарифмически нормальным.

Отметим, что умножая уравнение (11.36) на $\delta(|\mathbf{l}| - l)$ и интегрируя по \mathbf{l} , легко получить уравнение для плотности вероятностей модуля вектора $\mathbf{l}(t)$,

$$P(l, t) = \langle \delta(|\mathbf{l}(t)| - l) \rangle = \int d\mathbf{l} \delta(|\mathbf{l}(t)| - l) P(\mathbf{l}, t),$$

вида

$$\frac{\partial}{\partial t} P(l, t) = - \frac{\partial}{\partial l} \frac{D_{ii}(l)}{l} P(l, t) + \frac{\partial}{\partial l} \frac{N(l)}{l} P(l, t) + \frac{\partial^2}{\partial l^2} N(l) P(l, t),$$

где $N(l) = l_i l_j D_{ij}(\mathbf{l})/l^2$. Отсюда легко получить уравнение для функции $\langle \ln l(t) \rangle$, а именно

$$\frac{d}{dt} \langle \ln l(t) \rangle = \left\langle \frac{D_{ii}(l)}{l^2} - 2 \frac{N(l)}{l^2} \right\rangle,$$

и, следовательно, для тензора $D_{ij}(\mathbf{l})$ вида (11.37) получаем выражение

$$\left\langle \ln \left(\frac{l(t)}{l_0} \right) \right\rangle = \frac{1}{d(d+2)} \{ D^s(d-1)d - D^p(4-d) \} t.$$

Следовательно, в соответствии с формулами (4.59) и (4.60) на с. 109, кривой типичной реализации для расстояния между двумя частицами будет экспоненциальная функция времени

$$l^*(t) = l_0 \exp \left\{ \frac{1}{d(d+2)} [D^s d(d-1) - D^p(4-d)] t \right\} \quad (11.38)$$

и эта функция связана с *ляпуновской экспонентой*.

Отсюда следует, что в двумерном случае ($d = 2$) выражение

$$l^*(t) = l_0 \exp \left\{ \frac{1}{4} (D^s - D^p) t \right\}$$

существенно зависит от знака разности $(D^s - D^p)$. В частности, для бездивергентного поля скоростей ($D^p = 0$) имеем экспоненциально растущую типичную реализацию, что соответствует экспоненциально быстрому разбеганию частиц при малых расстояниях между ними. Этот результат справедлив для времен

$$\frac{1}{4} D^s t \ll \ln \left(\frac{l_{\text{cor}}}{l_0} \right),$$

при которых справедливо разложение (11.37). В другом предельном случае — потенциальном поле скоростей ($D^s = 0$), кривой типичной реализации будет экспоненциально убывающая кривая, т.е. налицо стремление частиц "слиться". Учитывая, что при этом сами жидкие частицы сжимаются, мы видим, что в этом случае должны образовываться *кластеры*, т.е. зоны компактного сосредоточения частиц, расположенные в большей степени в разреженных зонах, что согласуется с результатами численного моделирования эволюции реализации однородного вначале распределения частиц в случайном потенциальном поле скоростей, приведенного на рис. 1.1, б на с. 16 (правда для совершенно другой статистической модели поля скоростей). Это означает, что само явление кластеризации не зависит от модели случайного поля скоростей, хотя, конечно, статистические параметры, характеризующие это явление, могут существенно зависеть от модели. Таким образом условием кластеризации частиц в двумерном случае является условие выполнения неравенства

$$D^s < D^p. \quad (11.39)$$

В трехмерном же случае ($d = 3$) из (11.38) следует, что

$$l^*(t) = l_0 \exp \left\{ \frac{1}{15} (6D^s - D^p) t \right\},$$

и типичная реализация будет экспоненциально затухать со временем при выполнении более жесткого (чем в двумерном случае) условия:

$$D^p > 6D^s.$$

В одномерном случае

$$l^*(t) = l_0 e^{-D^p t},$$

типичная реализация всегда убывает со временем, так как поле скоростей в этом случае всегда дивергентно.

11.3. Вероятностное описание поля плотности в случайном поле скоростей

Для описания локального поведения реализаций примеси в случайном поле скоростей, нужно знать вероятностное распределение ее плотности, которую можно получить только при отсутствии эффекта динамической диффузии.

Для описания поля плотности в эйлеровом представлении, введем индикаторную функцию, аналогичную (11.15)

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho), \quad (11.40)$$

сосредоточенную на поверхности $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$ в трехмерном случае или контуре в двумерном случае. Уравнение Лиувилля для нее, в случае отсутствия среднего потока, имеет вид уравнения (3.18) на с. 77

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho \varphi(\mathbf{r}, t; \rho)], \quad (11.41)$$

и одноточечная плотность вероятностей для решения динамического уравнения (11.3) в этом случае совпадает с усредненной индикаторной функцией по ансамблю реализаций случайного поля скоростей, которое, как и ранее, считаем гауссовым однородным и изотропным случайным полем, дельта-коррелированным во времени, т. е.

$$P(\mathbf{r}, t; \rho) = \langle \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \rangle.$$

Усредняя уравнение (11.41) в отсутствие среднего потока по ансамблю реализаций поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, с учетом формулы Фурутцу-Новикова (11.14) на с. 249 и равенства для вариационной производной

$$\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}', t - 0)} \varphi(\mathbf{r}, t; \rho) = - \left[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_j} \right] \varphi(\mathbf{r}, t; \rho),$$

вытекающего из уравнения (11.41), с помощью формул (4.55) и (4.56) на с. 108, получаем уравнение для плотности вероятностей поля плотности в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta \right) P(\mathbf{r}, t; \rho | \rho_0(\mathbf{r})) = D_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(\mathbf{r}, t; \rho | \rho_0(\mathbf{r})), \quad (11.42)$$

$$P(\mathbf{r}, 0; \rho | \rho_0(\mathbf{r})) = \delta(\rho - \rho_0(\mathbf{r})),$$

где коэффициенты диффузии в \mathbf{r} - пространстве D_0 и ρ - пространстве $D_\rho = D^P$ определяются равенствами (4.53) и (4.58) на с. 108 и мы обозначили вертикальной чертой зависимость плотности вероятностей эйлерового поля $\rho(\mathbf{r}, t)$ от начального распределения $\rho_0(\mathbf{r})$. Отметим, что это уравнение соответствует уравнению (8.55) на с. 190 с параметром $\alpha = D_\rho$.

Уравнение (11.42) можно также получить используя связь одноточечной плотности вероятностей поля плотности в эйлеровом описании с одновременной плотностью

вероятностей в лагранжевом описании в виде равенства

$$P(\mathbf{r}, t; \rho) = \int d\mathbf{r}_0 \int_0^\infty j dj P(\mathbf{r}, \rho, j, t | \mathbf{r}_0). \quad (11.43)$$

Решение уравнения (11.42) имеет вид

$$P(\mathbf{r}, t; \rho | \rho_0(\mathbf{r})) = \exp \left\{ D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right\} \tilde{P}(\mathbf{r}, t; \rho | \rho_0(\mathbf{r})),$$

где функция $\tilde{P}(\mathbf{r}, t; \rho | \rho_0(\mathbf{r}))$, описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}(\mathbf{r}, t; \rho | \rho_0(\mathbf{r})) = D_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 \tilde{P}(\mathbf{r}, t; \rho | \rho_0(\mathbf{r})), \quad (11.44)$$

$$\tilde{P}(\mathbf{r}, 0; \rho | \rho_0(\mathbf{r})) = \delta(\rho - \rho_0(\mathbf{r})),$$

параметрически зависящим от \mathbf{r} , которое совпадает с уравнением (11.20) на с. 250 для лагранжевой плотности вероятностей расходимости частицы и отличается от него только начальным условием. Следовательно, его решение имеет вид

$$\tilde{P}(\mathbf{r}, t; \rho | \rho_0(\mathbf{r})) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi D_\rho t}} \exp \left\{ - \frac{\ln^2(\rho e^{D_\rho t} / \rho_0(\mathbf{r}))}{4D_\rho t} \right\} \quad (11.45)$$

и плотность вероятностей эйлерового поля плотности принимает вид

$$P(\mathbf{r}, t; \rho | \rho_0(\mathbf{r})) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi D_\rho t}} \exp \left\{ D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right\} \exp \left\{ - \frac{\ln^2(\rho e^{D_\rho t} / \rho_0(\mathbf{r}))}{4D_\rho t} \right\}. \quad (11.46)$$

Если начальная плотность примеси всюду одинакова: $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$, то вероятностное распределение плотности не зависит от \mathbf{r} и в этом случае эйлерово поле плотности логнормально с плотностью вероятностей и соответствующей интегральной функцией распределения:

$$P(t; \rho | \rho_0) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ - \frac{\ln^2(\rho e^\tau / \rho_0)}{4\tau} \right\}, \quad F(t; \rho | \rho_0) = \text{Pr} \left(\frac{\ln(\rho e^\tau / \rho_0)}{2\sqrt{\tau}} \right), \quad (11.47)$$

где параметр $\tau = D_\rho t$, а $\text{Pr}(z)$ — интеграл вероятностей (4.18) на с. 94.

С точки зрения одноточечных характеристик поля плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ в этом случае задача статистически эквивалентна анализу случайного процесса и при этом все моментные функции начиная со второй экспоненциально растут со временем:

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0, \quad \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0^n e^{n(n-1)\tau}, \quad (11.48)$$

а в соответствии с формулами (4.59) и (4.60) на с. 109 кривая типичной реализации поля плотности в любой фиксированной точке пространства экспоненциально спадает во времени:

$$\rho^*(t) = \rho_0 e^{-\tau},$$

что свидетельствует о наличии кластерного характера флуктуаций плотности среды в произвольных дивергентных потоках. Формирование же эйлеровой статистики плотности в любой фиксированной точке пространства идет за счет флуктуаций плотности вокруг этой кривой.

Выше мы обсудили одноточечное вероятностное распределение плотности примеси в эйлеровом представлении, что уже позволило нам сделать ряд заключений о поведении реализаций поля плотности во времени в фиксированных точках пространства. Покажем теперь, что это распределение дает также возможность выяснить некоторые характерные особенности пространственно-временной структуры реализаций поля плотности.

Для наглядности ограничимся здесь двумерным случаем. Как говорилось выше, важные сведения о пространственном поведении реализаций несет анализ линий уровня, определяемых равенством

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const.}$$

В частности, такие функционалы поля плотности, как общая величина площади в области, где $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho - S(t, \rho)$, общая масса примеси, заключенная в этой области — $M(t, \rho)$, средние значения которых определяются одноточечной плотностью вероятностей, описываются выражениями

$$\langle S(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; \tilde{\rho} | \rho_0(\mathbf{r})), \quad \langle M(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} \tilde{\rho} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; \tilde{\rho} | \rho_0(\mathbf{r})). \quad (11.49)$$

Подставив сюда решение (11.46), после несложных преобразований легко найти явные выражения для этих величин:

$$\begin{aligned} \langle S(t, \rho) \rangle &= \int d\mathbf{r} \Pr \left(\frac{1}{\sqrt{2\tau}} \ln \left(\frac{\rho_0(\mathbf{r}) e^{-\tau}}{\rho} \right) \right), \\ \langle M(t, \rho) \rangle &= \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r}) \Pr \left(\frac{1}{\sqrt{2\tau}} \ln \left(\frac{\rho_0(\mathbf{r}) e^{\tau}}{\rho} \right) \right), \end{aligned} \quad (11.50)$$

где интеграл вероятностей $\Pr(z)$ определяется по формуле (4.18) на с. 94. Учитывая теперь асимптотику функции $\Pr(z)$ (4.21) на с. 94 получаем, что при $\tau \gg 1$ средняя площадь областей, где плотность выше уровня ρ , убывает со временем по закону

$$\langle S(t, \rho) \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\tau\rho}} e^{-\tau/4} \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})}, \quad (11.51)$$

в то время как заключенная в этих областях средняя масса примеси

$$\langle M(t, \rho) \rangle \approx M - \sqrt{\frac{\rho}{\pi\tau}} e^{-\tau/4} \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})} \quad (11.52)$$

монотонно стремится к полной ее массе $M = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r})$. Это еще раз подтверждает сделанный ранее вывод о том, что частицы примеси со временем стремятся собраться

в кластеры — компактные области повышенной плотности, окруженные разреженными областями.

Динамику формирования кластеров можно проиллюстрировать на примере, когда первоначально примесь равномерно распределена на плоскости: $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$. При этом средняя удельная площадь области (приходящаяся на единицу площади), внутри которой $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$, равна

$$s(t, \rho | \rho_0) = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} P(t; \tilde{\rho} | \rho_0) = \Pr \left(\frac{\ln(\rho_0 e^{-\tau}/\rho)}{\sqrt{2\tau}} \right), \quad (11.53)$$

где $P(t; \rho | \rho_0)$ — не зависящее от \mathbf{r} решение уравнения (11.44) (т.е. функция (11.47)), а удельная средняя масса примеси (приходящаяся на единицу площади), сосредоточенная в этой области, описывается выражением

$$m(t, \rho | \rho_0) / \rho_0 = \frac{1}{\rho_0} \int_{\rho}^{\infty} \tilde{\rho} d\tilde{\rho} P(t; \tilde{\rho} | \rho_0) = \Pr \left(\frac{\ln(\rho_0 e^{\tau}/\rho)}{\sqrt{2\tau}} \right). \quad (11.54)$$

Из (11.53), (11.54) следует, что на больших временах ($\tau \gg 1$) средняя удельная площадь убывает по закону

$$s(t, \rho | \rho_0) \approx \sqrt{\frac{\rho_0}{\pi\rho\tau}} e^{-\tau/4}, \quad (11.55)$$

в то время как внутри этой площади собирается практически вся масса примеси:

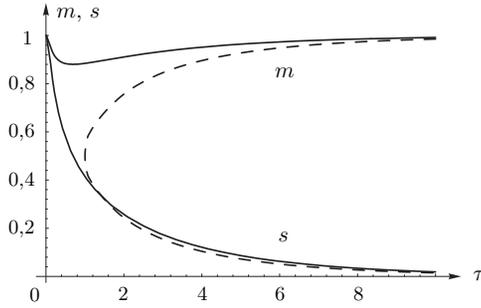
$$m(t, \rho | \rho_0) / \rho_0 \approx 1 - \sqrt{\frac{\rho}{\pi\rho_0\tau}} e^{-\tau/4}. \quad (11.56)$$

Характер же временной эволюции образования кластерной структуры существенно зависит от отношения ρ/ρ_0 . Так, если $\rho/\rho_0 < 1$, то в начальный момент времени $s(0, \rho) = 1$ и $m(0, \rho) = 1$. Далее, ввиду того что частицы примеси первое время стремятся разбежаться, образуются небольшие области, где $\rho(\mathbf{r}, t) < \rho$, и эти области содержат незначительную часть общей массы. С течением времени эти области быстро увеличиваются, а их масса перетекает в кластерные области, довольно быстро выходя на асимптотические зависимости (11.55), (11.56) (рис. 11.1).

Отметим, что в момент времени $\tau^* = \ln(\rho/\rho_0)$ величина площади $s(t^*, \rho) = 1/2$.

В обратном, более интересном случае $\rho/\rho_0 > 1$ в начальный момент времени $s(0, \rho) = 0$ и $m(0, \rho) = 0$. Из-за начального разбегания частиц образуются небольшие кластерные области, где $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$; эти области практически сохраняются во времени и интенсивно втягивают в себя значительную часть общей массы. В дальнейшем площади этих областей с течением времени уменьшаются, а содержащаяся в них масса увеличивается согласно асимптотическим зависимостям (11.55), (11.56) (рис. 11.2, а, б).

Для более детального описания поля плотности в случайном поле скоростей необходимо, как указывалось ранее, рассматривать его пространственный градиент $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$ и, вообще говоря, производные высшего порядка.

Рис. 11.1. Динамика образования кластеров для $\rho/\rho_0 = 0,5$

Градиент плотности описывается динамическим уравнением (1.52) на с. 38 и, следовательно, индикаторная функция

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p})$$

для бездивергентного поля скоростей описывается уравнением (3.24) на с. 78. Усредняя теперь (3.24) по ансамблю реализаций поля скоростей в приближении дельта-коррелированного во времени поля скоростей, получаем уравнение для одноточечной совместной плотности вероятностей плотности и его градиента

$$P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = \langle \varphi(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) \rangle,$$

зависящей от пространственно временной точки (\mathbf{r}, t) , вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) &= D_0 \Delta P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) + \\ &+ \frac{1}{d(d+2)} D^s \left((d+1) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}), \quad (11.57) \\ P(0, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) &= \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho) \delta(\mathbf{p}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{p}), \end{aligned}$$

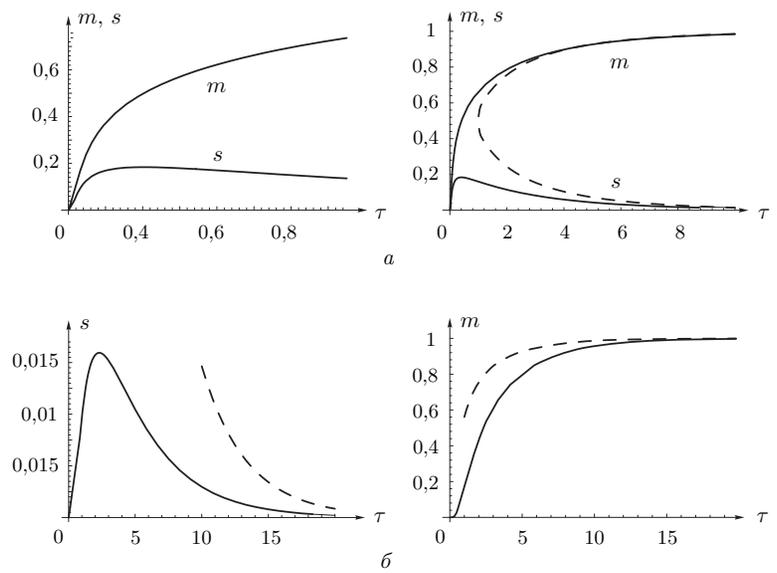
где коэффициенты диффузии в \mathbf{r} -пространстве D_0 и \mathbf{p} -пространстве D^s определяются равенствами (4.53) и (4.58) на с. 108.

Так как случайное поле скоростей является бездивергентным, то решение уравнения (11.57) имеет структуру

$$P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{r}_0 P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0) P(\mathbf{p}, t|\mathbf{r}_0), \quad (11.58)$$

где $P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0)$ и $P(\mathbf{p}, t|\mathbf{r}_0)$ — соответствующие лагранжевы плотности вероятностей положения частицы и ее градиента. Первая функция описывается выражением (11.19), а вторая описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{p}, t|\mathbf{r}_0) = \frac{1}{d(d+2)} D^s \left((d+1) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) P(\mathbf{p}, t|\mathbf{r}_0). \quad (11.59)$$

Рис. 11.2. Динамика образования кластеров для $\rho/\rho_0 = 1,5$ (а) и $\rho/\rho_0 = 10$ (б)

Следствием уравнения (11.59) является сохранение среднего значения градиента плотности частицы примеси

$$\langle \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0).$$

Что же касается моментных функций модуля градиента плотности, то они описываются уравнениями, вытекающими из (11.59)

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle p^n(t|\mathbf{r}_0) \rangle = \frac{n(d+n)(d-1)}{d(d+2)} D^s \langle p^n(t|\mathbf{r}_0) \rangle, \quad \langle p^n(0|\mathbf{r}_0) \rangle = p_0^n(\mathbf{r}_0). \quad (11.60)$$

Следовательно, модуль градиента поля плотности в лагранжевом описании является логарифмически нормальной величиной, типичная реализация которой так же как и его моментные функции экспоненциально растут во времени. В частности, первый и второй момент в двумерном случае описываются равенствами

$$\langle |\mathbf{p}(t|\mathbf{r}_0)| \rangle = |\mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0)| e^{3D^s t/8}, \quad \langle \mathbf{p}^2(t|\mathbf{r}_0) \rangle = \mathbf{p}_0^2(\mathbf{r}_0) e^{D^s t}. \quad (11.61)$$

Кроме того, из уравнения (11.57) с учетом формулы (4.37) третьей главы следует, что общая средняя длина контура $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$ (в двумерном случае) также экспоненциально растет во времени по закону

$$\langle l(t, \rho) \rangle = l_0 e^{D^s t},$$

где l_0 — начальная длина контура. Напомним, что в этом случае для бездивергентного поля скоростей, сохраняется число контуров, которые не могут исчезать и порождаться в среде, а лишь эволюционируют во времени, исходя из заданного в начальный момент времени их распределения в пространстве.

Таким образом, гладкое вначале распределение примеси становится все более и более пространственно неоднородным; пространственные градиенты обостряются и линии уровня приобретают фрактальный характер. Такую картину мы видели на рис. 1.1 *a*, на с. 16, соответствующей численному моделированию, правда для совершенно другой модели флуктуаций поля скоростей. Это означает, что общие особенности поведения, отмеченные выше, не существенны от типа моделей.

Выше мы изучали статистические характеристики решения уравнения (11.3) в лагранжевом и эйлеровом описании и было показано, что при наличии потенциальной составляющей у поля скорости происходит кластеризация с вероятностью единица в эйлеровом поле плотности, а также при выполнении определенных условий происходит кластеризация в динамике частиц.

Наряду с динамическим уравнением (11.3) представляет определенный интерес и уравнение, соответствующее переносу не консервативной примеси

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) q(\mathbf{r}, t) = 0, \quad q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}).$$

В этом случае в лагранжевом описании уравнение для динамики частиц совпадает с уравнением (11.5) и, следовательно, для частиц может при определенных условиях осуществляться кластеризация. Однако, в эйлеровом описании, как легко видеть, кластеризация не осуществляется. В этом случае, аналогично бездивергентному полю скоростей, сохраняется как среднее число контуров, так и средняя площадь, где $q(\mathbf{r}, t) > q$, и средняя "масса" примеси $\int dS q(\mathbf{r}, t)$, сосредоточенная в этих контурах.

Выше мы рассмотрели простейшую статистическую задачу о диффузии скалярной примеси в случайном поле скоростей в отсутствии регулярного потока и эффекта динамической диффузии. Также для статистического описания использовалось приближение дельта-коррелированного во времени случайного поля. Все неучтенные факторы начинают действовать с какого-то момента времени, так что полученные выше результаты справедливы лишь на начальном этапе диффузии. Кроме того эти факторы могут приводить и к новым физическим эффектам.

11.4. Вероятностное описание магнитного поля и его энергии в случайном поле скоростей

Рассмотрим теперь вероятностное описание магнитного поля на основе динамического уравнения (11.4). Как и для поля плотности случайную составляющую поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ будем предполагать дивергентным ($\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$) случайным гауссовым полем однородным и изотропным в пространстве и стационарным дельта-коррелированным во времени.

Введем индикаторную функцию магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = \delta(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H}).$$

Она удовлетворяет уравнению Лиувилля (3.26) на с. 79

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = - \frac{\partial}{\partial H_i} \left[\mathbf{H} \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} - H_i \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right] \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) \quad (11.62)$$

с начальным условием

$$\varphi(\mathbf{r}, 0; \mathbf{H}) = \delta(\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{H}).$$

Решение этого уравнения является функционалом поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, т. е.

$$\varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = \varphi[\mathbf{r}, t; \mathbf{H}; \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{r}}, \tau)],$$

где $0 \leq \tau \leq t$. Для него выполняется условие динамической причинности

$$\frac{\delta \varphi[\mathbf{r}, t; \mathbf{H}; \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{r}}, \tau)]}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} = 0 \text{ при } t' < 0 \text{ и } t' > t.$$

При этом для вариационной производной при $t' = t - 0$ выполняется равенство

$$\frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H})}{\delta u_j(\mathbf{r}', t - 0)} = \widehat{L}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t; \mathbf{H}) \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}), \quad (11.63)$$

где оператор

$$\widehat{L}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t; \mathbf{H}) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} - \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_l} \frac{\partial}{\partial H_j} H_l + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial H_l} H_l. \quad (11.64)$$

Одноточечная плотность вероятностей магнитного поля определяется равенством

$$P(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = \langle \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) \rangle_{\mathbf{u}}.$$

Усредним уравнение (11.62) по ансамблю реализаций поля $\{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\}$. Для расщепления возникающих корреляций воспользуемся формулой Фурутцу-Новикова (11.14) на с. 249. Учитывая при этом равенства (11.63) и (11.64), и выражения (4.53), (4.55) и (4.56) на с. 108 с параметрами (4.58) на с. 108, получаем искомое уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right) P(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = \left\{ D_1 \frac{\partial}{\partial H_l} \frac{\partial}{\partial H_k} H_l H_k + D_2 \frac{\partial}{\partial H_l} \frac{\partial}{\partial H_l} H_k^2 \right\} P(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}), \quad (11.65)$$

где коэффициенты диффузии

$$D_1 = \frac{(d^2 - 2) D^p - 2D^s}{d(d+2)}, \quad D_2 = \frac{(d+1)D^s + D^p}{d(d+2)},$$

где d – размерность пространства.

Отметим, что для однородных начальных условий одноточечная плотность вероятностей не зависит от переменной \mathbf{r} , и уравнение (11.65) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \mathbf{H}) = \left\{ D_1 \frac{\partial}{\partial H_l} \frac{\partial}{\partial H_k} H_l H_k + D_2 \frac{\partial}{\partial H_l} \frac{\partial}{\partial H_l} H_k^2 \right\} P(t; \mathbf{H}). \quad (11.66)$$

Получим теперь одноточечную корреляцию магнитного поля

$$\langle W_{ij}(t) \rangle = \langle H_i(\mathbf{r}, t) H_j(\mathbf{r}, t) \rangle$$

для этого случая. Умножая уравнение (11.66) на H_i и H_j , и интегрируя по \mathbf{H} , получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle W_{ij}(t) \rangle = 2D_1 \langle W_{ij}(t) \rangle + 2D_2 \delta_{ij} \langle E(t) \rangle,$$

откуда для средней энергии следует уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle E(t) \rangle = 2 \frac{d-1}{d} (D^s + D^p) \langle E(t) \rangle,$$

и, следовательно,

$$\langle E(t) \rangle = E_0 \exp \left\{ 2 \frac{d-1}{d} (D^s + D^p) t \right\}. \quad (11.67)$$

Теперь решение для корреляции магнитного поля легко находится и имеет вид

$$\frac{\langle W_{ij}(t) \rangle}{\langle E(t) \rangle} = \frac{1}{d} d_{ij} + \left(\frac{W_{ij}(0)}{E_0} - \frac{1}{d} d_{ij} \right) \exp \left\{ -2 \frac{(d+1)D^s + D^p}{d+2} t \right\}. \quad (11.68)$$

Таким образом, средняя энергия магнитного поля экспоненциально возрастает во времени, при этом происходит изотропизация магнитного поля также экспоненциальным образом. Отметим, что в соответствующие экспоненты спектральные составляющие поля скоростей входят аддитивным образом. Очевидно, что это обстоятельство сохраняется и для любых других корреляций магнитного поля и его энергии.

Введем теперь индикаторную функцию энергии магнитного поля $E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t)$

$$\varphi(\mathbf{r}, t; E) = \delta(E(\mathbf{r}, t) - E),$$

через которую ее плотность вероятностей $P(\mathbf{r}, t; E)$ определяется равенством

$$P(\mathbf{r}, t; E) = \langle \delta(E(\mathbf{r}, t) - E) \rangle_{\mathbf{u}} = \langle \delta(\mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) - E) \rangle_{\mathbf{H}}.$$

Для получения уравнения для этой функции, следует домножить уравнение (11.65) на функцию $\delta(\mathbf{H}^2 - E)$ и проинтегрировать по \mathbf{H} . В результате получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right) P(\mathbf{r}, t; E) = \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial E} E + D \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} E \right\} P(\mathbf{r}, t; E), \quad (11.69)$$

$$P(\mathbf{r}, 0; E) = \delta(E - E_0(\mathbf{r})),$$

совпадающее с уравнением (8.55) на с. 190 с параметрами

$$\alpha = 2 \frac{d-1}{d+2} (D^p - D^s), \quad D = 4(d-1) \frac{(d+1)D^p + D^s}{d(d+2)}.$$

При этом параметр α может быть как положительным, так и отрицательным. Изменения знака α для одноточечных характеристик означает переход от поля $E(\mathbf{r}, t)$ к полю $1/E(\mathbf{r}, t)$.

Решение этого уравнения имеет вид

$$P(\mathbf{r}, t; E) = \exp \left\{ D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right\} \tilde{P}(\mathbf{r}, t; E)$$

где функция $\tilde{P}(\mathbf{r}, t; E)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}(\mathbf{r}, t; E) = \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial E} E + D \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} E \right\} \tilde{P}(\mathbf{r}, t; E),$$

$$\tilde{P}(\mathbf{r}, 0; E) = \delta(E - E_0(\mathbf{r})).$$

При этом зависимость функции $\tilde{P}(\mathbf{r}, t; E)$ от параметра \mathbf{r} появляется только из начального значения $E_0(\mathbf{r})$, т. е.

$$\tilde{P}(\mathbf{r}, t; E) \equiv \tilde{P}(t; E | E_0(\mathbf{r}))$$

и, следовательно, функция $\tilde{P}(t; E | E_0(\mathbf{r}))$ является логнормальной плотностью вероятностей случайного процесса $E(t, |E_0(\mathbf{r}))$, параметрически зависящего от \mathbf{r} ,

$$\tilde{P}(t; E | E_0(\mathbf{r})) = \frac{1}{2E\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [Ee^{\alpha t}/E_0(\mathbf{r})]}{4Dt} \right\}. \quad (11.70)$$

Таким образом решение уравнения (11.69) имеет вид:

$$P(\mathbf{r}, t; E) = \frac{1}{2E\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [Ee^{\alpha t}/E_0(\mathbf{r})]}{4Dt} \right\}. \quad (11.71)$$

Из уравнения (11.69) или выражения (11.71) следуют выражения для интегралов по пространству от моментных функций

$$\int d\mathbf{r} \langle E^n(\mathbf{r}, t) \rangle = e^{n(nD-\alpha)t} \int d\mathbf{r} E_0^n(\mathbf{r}), \quad (11.72)$$

не зависящие от коэффициента диффузии в \mathbf{r} -пространстве (коэффициента D_0), и, в частности, выражение для средней полной энергии во всем пространстве

$$\int d\mathbf{r} \langle E(\mathbf{r}, t) \rangle = e^{\gamma t} \int d\mathbf{r} E_0(\mathbf{r}),$$

где параметр

$$\gamma = D - \alpha = \frac{2(d-1)}{d} (D^p + D^s). \quad (11.73)$$

Для пространственно однородного начального распределения энергии $E_0(\mathbf{r}) = E_0$ плотность вероятностей (11.71) не зависит от \mathbf{r} и описывается формулой

$$P(t; E) = \frac{1}{2E\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [Ee^{\alpha t}/E_0]}{4Dt} \right\}. \quad (11.74)$$

Таким образом в этом случае одноточечные статистические характеристики энергии магнитного поля $E(\mathbf{r}, t)$ статистически эквивалентны характеристикам случайного процесса

$$E(t; \alpha) = \exp \left\{ -\alpha t + \int_0^t d\tau \xi(\tau) \right\},$$

где $\xi(t)$ — гауссов процесс белого шума с параметрами

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t').$$

Он описывается стохастическим уравнением

$$\frac{d}{dt} E(t; \alpha) = \{-\alpha + \xi(t)\} E(t; \alpha), \quad E(0; \alpha) = E_0.$$

и его одновременная плотность вероятностей $P(t; E, \alpha)$ описывается уравнением Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; E) = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial E} E + D \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} E \right) P(t; E), \quad P(0; E) = \delta(E - E_0), \quad (11.75)$$

решение которого дается формулой (11.74).

Характерной особенностью распределения (11.74) является появление длинного пологого *хвоста* при $Dt \gg 1$, означающего усиление роли больших выбросов процесса $E(t; \alpha)$ в формировании одновременной статистики. Для этого распределения все моменты энергии магнитного поля экспоненциально растут со временем

$$\langle E^n(t) \rangle = E_0^n \exp \left\{ -2n \frac{d-1}{d+2} (D^p - D^s) t + 4n^2 (d-1) \frac{(d+1) D^p + D^s}{d(d+2)} t \right\}$$

и, в частности, при $n = 1$ средняя удельная энергия $\langle E(t) \rangle = E_0 e^{\gamma t}$, а величина

$$\langle \ln(E(t)/E_0) \rangle = -\alpha t = -2 \frac{d-1}{d+2} (D^p - D^s) t$$

и, следовательно, параметр $\{-\alpha\}$, является *ляпуновским характеристическим показателем* [12]. При этом *кривая типичной реализации* для случайного процесса $E(t)$, определяющая поведение энергии магнитного поля в конкретных реализациях в любой фиксированной точке пространства, является экспоненциальной величиной

$$E^*(t) = E_0 e^{-\alpha t} = E_0 \exp \left\{ -2 \frac{d-1}{d+2} (D^p - D^s) t \right\},$$

растущей или затухающей во времени. Так, при $\alpha > 0$ ($D^p > D^s$) кривая типичной реализации экспоненциально спадает в каждой точке пространства, что свидетельствует о кластерной структуре магнитного поля, и рост моментов энергии магнитного поля в этом случае определяется редкими, но большими выбросами энергии относительно кривой типичной реализации, характерными для логнормальных процессов. В другом случае, при $\alpha < 0$ ($D^p < D^s$), кривая типичной реализации экспоненциально растет во времени, что свидетельствует об общем росте магнитной энергии в каждой точке пространства. На рис. 8.6 на с. 192 схематически изображены реализации энергии магнитного поля в случайном поле скоростей для разных знаков параметра α .

Индикаторная функция энергии магнитного поля позволяет получить и общую информацию о пространственной структуре поля энергии. В частности, такие функционалы энергии магнитного поля, как общая величина объема (в 3-х мерном случае) или площади (в двумерном случае) области, где $E(\mathbf{r}, t) > E$

$$V(t, E) = \int d\mathbf{r} \theta(E(\mathbf{r}, t) - E) = \int d\mathbf{r} \int_E^\infty d\tilde{E} \delta(E(\mathbf{r}, t) - \tilde{E}),$$

и общая энергия магнитного поля, заключенная в этой области,

$$\mathcal{E}(t, E) = \int d\mathbf{r} E(\mathbf{r}, t) \theta(E(\mathbf{r}, t) - E) = \int d\mathbf{r} \int_E^\infty \tilde{E} d\tilde{E} \delta(E(\mathbf{r}, t) - \tilde{E}),$$

средние значения которых определяются одноточечной плотностью вероятностей (11.71), описываются в общем случае равенствами

$$\langle V(t, E) \rangle = \int d\tilde{E} \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; \tilde{E}),$$

$$\langle \mathcal{E}(t, E) \rangle = \int_E^\infty \tilde{E} d\tilde{E} \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; \tilde{E}).$$

Средние значения этих функционалов не зависят от диффузии в \mathbf{r} -пространстве (коэффициента D_0) и для распределения вероятностей (11.71) получаем выражения (8.58) на с. 192

$$\langle V(t, E) \rangle = \int d\mathbf{r} \Pr \left(\frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln \left(\frac{E_0(\mathbf{r})}{E} e^{-\alpha t} \right) \right),$$

$$\langle \mathcal{E}(t, E) \rangle = e^{\gamma t} \int d\mathbf{r} E_0(\mathbf{r}) \Pr \left(\frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln \left(\frac{E_0(\mathbf{r})}{E} e^{(2D-\alpha)t} \right) \right),$$

где функция интеграл вероятностей $\Pr(z)$ определяется равенством (4.18) на с. 94. Учитывая теперь асимптотики функции $\Pr(z)$ при $z \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow -\infty$ (4.21) на с. 94 можно изучить эволюцию во времени этих функционалов. А именно, асимптотика среднего объема при $t \rightarrow \infty$ (при $\alpha > 0$) затухает во времени по закону

$$\langle V(t, E) \rangle \approx \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{D}{\pi E^{\alpha/D} t}} e^{-\alpha^2 t / 4D} \int d\mathbf{r} \sqrt{E_0^{\alpha/D}(\mathbf{r})}.$$

При $\alpha < 0$ же средний объем при $t \rightarrow \infty$ занимает все пространство.

Для полной энергии в обоих случаях получаем асимптотику при $t \rightarrow \infty$ (так как $\alpha < 2D$)

$$\langle \mathcal{E}(t, E) \rangle \approx e^{\gamma t} \int d\mathbf{r} E_0(\mathbf{r}) \left[1 - \frac{1}{(2D-\alpha)} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \left(\frac{E}{E_0(\mathbf{r})} \right)^{(2D-\alpha)/D} e^{-(2D-\alpha)^2 t / 4} \right],$$

где параметр γ описывается равенством (11.73), что означает при $\alpha > 0$ содержание в кластерах 100% от общей средней энергии.

Соответствующие выражения для однородных начальных условий без интегрирования по \mathbf{r} описывают удельные значения объема больших выбросов и их общей энергии, приходящие на единицу объема, т. е.

$$\langle \mathfrak{V}(t, E) \rangle = \Pr \left(\frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln \left(\frac{E_0(\mathbf{r})}{E} e^{-\alpha t} \right) \right),$$

$$\langle \mathfrak{E}(t, E) \rangle = E_0 e^{\gamma t} \Pr \left(\frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln \left(\frac{E_0(\mathbf{r})}{E} e^{(2D-\alpha)t} \right) \right), \quad (11.76)$$

где $\gamma = D - \alpha$.

Если выбрать уровень сечения $E > E_0$, то в начальный момент времени величины $\langle \mathfrak{V}(0, E) \rangle = 0$ и $\langle \mathfrak{E}(0, E) \rangle = 0$. Далее возникают пространственные возмущения

энергии магнитного поля и при $t \rightarrow \infty$ для этих величин получаем асимптотические выражения

$$\langle \mathfrak{B}(t, E) \rangle \approx \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \left(\frac{E_0}{E} \right)^{\alpha/D} e^{-\alpha^2 t/4D} & (\alpha > 0), \\ 1 - \frac{1}{|\alpha|} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{|\alpha|/D} e^{-|\alpha|^2 t/4D} & (\alpha < 0), \end{cases}$$

и, так как $(2D - \alpha) > 0$, то

$$\langle \mathfrak{E}(t, E) \rangle \approx E_0 e^{\gamma t} \left[1 - \frac{1}{(2D - \alpha)} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{(2D - \alpha)/D} e^{-(2D - \alpha)^2 t/4D} \right].$$

Таким образом, при $\alpha > 0$ ($D^p > D^s$) удельный общий объем стремится к нулю, а удельная общая энергия, заключенная в этом объеме, совпадает со средней энергией во всем пространстве. Это свидетельствует о кластеризации магнитного поля.

В случае, когда $\alpha < 0$ ($D^p < D^s$) кластеризации нет и удельный объем занимает все пространство, в котором удельная средняя энергия растет во времени.

Отметим, что в случае плоскопараллельного потока жидкости кластеризация энергии магнитного поля в плоскости поля скоростей также осуществляется при выполнении условия $D^p > D^s$, а кластеризация энергии магнитного поля, связанной с компонентой магнитного поля, перпендикулярной плоскости поля скоростей, осуществляется всегда при наличии потенциальной составляющей поля скорости (см. уравнения на с. 244).

Ранее мы уже отмечали, что параметры D^p и D^s , характеризующие статистику случайного поля скоростей, *входят аддитивным образом во все статистические моментные и корреляционные функции энергии магнитного поля*. Это, конечно, – следствие линейности уравнений (11.2) и (11.4). Однако данный факт означает, что все основные (функциональные) закономерности в таком статистическом описании *не разделяют влияние соленоидальной и потенциальной компонент* случайного поля скоростей. Т.е. все получаемые закономерности для упомянутых статистических величин имеют одинаковую структуру как для несжимаемого потока ($D^p = 0$), так и для чисто потенциального потока ($D^s = 0$). А так как для несжимаемого потока *кластеризация отсутствует*, а для потенциального потока, наоборот, *кластеризация осуществляется*, то абсолютно ясно, что упомянутые статистические характеристики *не содержат никакой информации о стохастическом структурообразовании в отдельных реализациях энергии магнитного поля, а именно о кластеризации*.

Кроме того, исходное уравнение индукции (11.2) справедливо в рамках применимости кинематического приближения. При наличии кластеризации, когда в большей части пространства магнитное поле отсутствует, естественно, что его последствие на поле скоростей не существенно. В случае же отсутствия кластеризации, когда генерация магнитного поля происходит во всем пространстве, справедливость кинематического приближения можно ожидать лишь на достаточно малом временном интервале,

на котором обсуждать роль динамического коэффициента диффузии на формирование статистики энергии магнитного поля, по моему мнению, просто не серьезно.¹

Критический случай $\alpha = 0$ ($D^p = D^s$)

Этот случай можно рассматривать как *псевдоравновесный случай* по аналогии с *равновесным тепловым шумом*. В этом случае одноточечная плотность вероятностей принимает вид

$$P(t; E) = \frac{1}{2E\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2[E/E_0]}{4Dt} \right\}.$$

Случайные процессы $E(t)$ и $1/E(t)$ статистически эквивалентны. Удельный средний объем при $t \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к половине общего объема, а удельная средняя энергия стремится к полной средней энергии.

¹Отмечу, объективности ради, что эти все мои высказывания вызывают полное неприятие основных идей изучения структурообразования в случайных средах на основе статистической топографии в таких журналах как "Письма в ЖЭТФ" и "ЖЭТФ". Так начиная с 2010 года, я получаю отрицательные рецензии (одного и того же рецензента!!!) на мои статьи, препятствующие, по мнению редколлегии этих журналов, опубликованию моих работ. Приведу только несколько, наиболее типичных доводов рецензента.

Так в 2010г. (ЖЭТФ) – "Изотропная модель типа "белый шум" для скорости была введена в классической работе А.П.Казанцева, ЖЭТФ, т.53, стр. 1806 (1967). Полное решение задачи (разноточечные корреляторы произвольных порядков), причем с учетом молекулярной диффузии, радикально меняющей ответы на больших временах, было опубликовано 10 лет назад: М. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, M. Vergassola, Phys. Rev. Lett. 83, 4065 (1999). Там же явно было отмечено явление, которое автор рецензируемой работы называет кластеризацией. Вообще, чтобы понять особенности пространственной статистики, необходимо вычислить именно разноточечные корреляционные функции, что есть задача другого класса."

В 2011г. (Письма в ЖЭТФ) – "Автор рассматривает возможность динамо-эффекта в мелкомасштабном поле скорости, пренебрегая магнитной диффузией. Это пренебрежение лишает работу всякого смысла. Кроме того, для короткокоррелированного по времени поля скорости с учетом молекулярной диффузии критерии динамо были получены в классической работе А.П.Казанцева, ЖЭТФ, т.53, стр. 1806 (1967) (44 года назад). Они совершенно не сводятся к простым соотношениям рецензируемого текста. Замечу, что ссылка на работу А.П.Казанцева отсутствует."

В другой рецензии 2011г. (ЖЭТФ) – "Для короткокоррелированного по времени поля скорости с учетом молекулярной диффузии критерии динамо были получены в классической работе А.П.Казанцева, ЖЭТФ, т.53, стр. 1806 (1967) (44 года назад). Они совершенно не сводятся к простым соотношениям рецензируемой работы. При этом в работе полностью игнорируется конечность проводимости среды (приводящая к тому, что и называется диффузией силовых линий магнитного поля), полностью меняющая критерии динамо и инкременты моментов. Более того эта диффузия определяет пространственную структуру корреляций магнитного поля. Без знания этой структуры "эффекты кластеризации" являются пустыми заклинаниями.

Причина игнорирования В.И.Клячкиным конечной проводимости очевидна: задача с ее учетом не допускает редукции к нехитрому уравнению на одноточечную функцию распределения, а требует анализа глобальной пространственной структуры корреляций поля.

На всякий случай повторю ссылки на работы, где сделано много больше, чем предлагается в данном тексте (сознательно опустив статьи, где я являюсь соавтором):

А.П.Казанцев, ЖЭТФ, 53, 1806 (1967),

A. Gruzinov, S. Cowley and R. Sudan, Phys. Rev. Lett. v. 77, 4342 (1996).

D. Vincenzi, Journal of Statistical Physics, 106, 1073 (2002).

A.A.Schekochihin, S.C.Cowley, S.F.Taylor, J.L.Maron, J.C. Me Williams, The Astrophysical Journal, 612, 276 (2004).

Работа В.И.Клячкина не содержит никаких сколь-нибудь интересных физических результатов и публикации в ЖЭТФ не заслуживает."

Таким образом, в случае $\alpha = 0$ ($D^p = D^s$) кластеризации не осуществляется в рамках уравнения (11.75). Следует отметить, что этот результат не является удовлетворительным, так как само уравнение (11.75) является приближенным, полученным в приближении дельта-коррелированности во времени случайного поля скоростей.

Учет конечности временного радиуса корреляции позволяет дать однозначный ответ о наличии или отсутствии физического явления *кластеризации*. И в случае наличия ее, вычислить характерное время ее установления.

Аналогичная ситуация имеет место и для случайных акустических волн в отсутствии их затухания.

Так случайное акустическое гауссово поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, статистически однородное и изотропное в пространстве, а также стационарное во времени, описывается корреляционными и спектральными тензорами ($\tau = t - t'$)

$$\langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle = \sigma_{\mathbf{u}}^2 B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) = \sigma_{\mathbf{u}}^2 \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \tau),$$

где $\sigma_{\mathbf{u}}^2 = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ – дисперсия поля скоростей, а функция

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \tau) = e^{-\lambda(k)\tau} \cos\{\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega(k)\tau\},$$

где $\omega(k) = ck$ – дисперсионная кривая для акустических волн, а c – скорость звука.

Экспоненциально затухающий член связан с диссипативными факторами уравнений гидродинамики и магнитной гидродинамики и $\lambda(k) = \lambda_p k^2$.

В этом случае спектральный тензор поля скорости содержит только потенциальную компоненту $E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = E(k, \tau) \frac{k_i k_j}{k^2}$.

И так как временной интеграл при $\lambda_p \ll cl_0$ (где l_0 – пространственный радиус корреляции поля скоростей) имеет асимптотику

$$\int_0^{\infty} dt f(k, t) = \lambda_p / c^2, \quad (11.77)$$

то при наличии малого поглощения кластеризация энергии магнитного поля осуществляется с вероятностью единица (т.е. почти во всех ее реализациях).

При отсутствии же затухания диффузионный коэффициент в уравнении (11.75) обращается в нуль, и мы не имеем никакой информации о наличии или отсутствии явления *кластеризации*.

В общем случае, однако, при отсутствии затухания имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} dt \cos\{\omega(k)t\} = \pi \delta(\omega(k)),$$

благодаря которому возникают резонансы между различными гармониками акустического волнового поля в высших приближениях. Это позволяет все же установить (после довольно громоздких вычислений), что кластеризация энергии магнитного поля осуществляется с вероятностью единица (т.е. почти во всех ее реализациях) и вычислить характерное время ее установления. А именно, ляпуновская экспонента во

втором порядке метода последовательных приближений, с учетом формулы (11.77), имеет вид

$$E^*(t) = E_0 e^{\langle \ln E(\mathbf{r}, t) \rangle} = E_0 e^{-\alpha_2 t},$$

где ляпуновский характеристический параметр

$$\alpha_2 = \frac{\sigma_{\mathbf{u}}^2}{c^2} \int d\mathbf{k} k^2 E(k) \left[\frac{4}{5} \lambda_p + 76 \pi^2 \frac{\sigma_{\mathbf{u}}^2}{c} k^2 E(k) \right].$$

В этом приближении ляпуновская экспонента убывает во времени и характерное время образования кластерной структуры энергии магнитного поля определяется как $t \sim 1/\alpha_2$.

11.5. Интегральные одноточечные статистические характеристики пассивных векторных полей

Выше для одноточечных характеристик поля плотности и магнитного поля, при отсутствии эффектов динамической диффузии, были получены уравнения для плотностей вероятностей этих полей. Это позволяет получить условия возможности образования кластерных структур на основе идей статистической топографии. Однако, к сожалению, рассмотрение производных этих полей, требует как минимум, двухточечных плотностей вероятностей. В принципе, такие уравнения можно получить стандартным путем, используя общую методику для линейных уравнений в частных производных первого порядка. Однако, вывод таких уравнений требует очень громоздких вычислений, и разобраться в следствиях такого описания очень сложно. Кроме того, такое вероятностное описание не допускает включения в анализ эффектов динамической диффузии.

Отметим однако, что в случае дельта-коррелированного случайного поля скоростей, от линейных уравнений (11.1) и (11.2) на с. 244 в отсутствие среднего потока легко перейти к замкнутым уравнениям как для самих средних значений этих полей, так и для их высших многоточечных корреляционных функций.

Например, усреднив уравнение (11.1) на с. 244, с помощью формулы Фурутцу-Новикова (11.14) на с. 249 и вытекающего выражения для вариационной производной из уравнения (11.1) на с. 244

$$\frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_\alpha(\mathbf{r}', t - 0)} = -\frac{\partial}{\partial r_\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}, t)$$

получим уравнение для средней плотности примеси

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = (D_0 + \mu_p) \Delta \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (11.78)$$

где коэффициент D_0 описывается формулой (4.53) на с. (107). При выполнении условия $D_0 \gg \mu$ ($\mu \ll \sigma_{\mathbf{u}}^2 l_{\text{cor}}^2$), где $\sigma_{\mathbf{u}}^2$ – дисперсия случайного поля скоростей, а l_{cor}^2 – его пространственный радиус корреляции, уравнение (11.78) совпадает с уравнением для

вероятностного распределения координат частицы (11.19) на с. 250 и, следовательно, коэффициент диффузии D_0 , аналогично диффузии в бездивергентном случайном поле скоростей, характеризует лишь масштабы области сосредоточения примеси в целом, не неся информации о локальной структуре реализаций плотности. Для однородного начального условия $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0$ получаем, что и $\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0$, так как случайное поле $\rho(\mathbf{r}, t)$ в этом случае будет нестационарным однородным случайным полем и величина $\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle$ не зависит от \mathbf{r} .

Поэтому для анализа сформулированных проблем остается единственный путь, состоящий в изучении двухточечных корреляционных функций поля плотности $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t) = \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}_1, t) \rangle$ и магнитного поля $W_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t) = \langle H_i(\mathbf{r}, t) H_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle$, зависящих для однородных начальных условий от разности $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$, что существенно упрощает рассмотрение. Как указывалось выше в этом случае все статистические средние являются интегральными – удельными, приходящимися на единицу объема.

Различные корреляции пространственных производных рассматриваемых полей можно получить последовательным дифференцированием этих функций по пространственным переменным. Исходные уравнения, при этом, должны содержать диссипативные члены.

11.5.1. Пространственная корреляционная функция поля плотности

Исходя из уравнения (11.1) на с. 11.1, прежде всего выпишем стохастическое динамическое уравнение для функции $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}_1, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t) = & - \left(\frac{\partial}{\partial r_i} u_i(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial r_{1k}} u_k(\mathbf{r}_1, t) \right) R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t) + \\ & + \mu_\rho \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_1^2} \right) R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t) \end{aligned} \quad (11.79)$$

Усредним уравнение (11.79) по ансамблю реализаций случайного поля скоростей. Для пространственной корреляционной функции

$$\langle R(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t) \rangle = \langle R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t) \rangle = \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}_1, t) \rangle,$$

с учетом формулы Фурутцу–Новикова (11.14), получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle R(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t) \rangle = & - \int d\mathbf{R} \left(\frac{\partial}{\partial r_i} B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + \frac{\partial}{\partial r_{1k}} B_{kj}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}) \right) \times \\ & \times \left\langle \frac{\delta R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t)}{\delta u_j(\mathbf{R}, t - 0)} \right\rangle + 2\mu_\rho \langle R_{kk}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t) \rangle, \end{aligned} \quad (11.80)$$

где обозначено $\langle R_{kk}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t) \rangle = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \langle R(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t) \rangle$, т. е. индексами у функции $\langle R(\mathbf{r}, t) \rangle$ обозначены пространственные производные. При этом величина $\langle R_{kk}(\mathbf{0}, t) \rangle < 0$.

Для вычисления вариационной производной перепишем уравнение (11.79), опуская член с динамической диффузией, который не зависит явным образом от поля

скоростей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t) = & - \left(u_i(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial r_i} + u_k(\mathbf{r}_1, t) \frac{\partial}{\partial r_{1k}} \right) R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t) - \\ & - \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} + \frac{\partial u_k(\mathbf{r}_1, t)}{\partial r_{1k}} \right) R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t), \end{aligned}$$

откуда следует равенство

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t)}{\delta u_j(\mathbf{R}, t - 0)} \right\rangle = & - \left(\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \frac{\partial}{\partial r_j} + \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}) \frac{\partial}{\partial r_{1j}} \right) \langle R(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t) \rangle - \\ & - \left(\frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})}{\partial r_j} + \frac{\partial \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R})}{\partial r_{1j}} \right) \langle R(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t) \rangle. \end{aligned} \quad (11.81)$$

Подставляя теперь выражение (11.81) в формулу (11.80) и интегрируя по \mathbf{R} , получаем уравнение в частных производных для корреляционной функции поля плотности, которое можно переписать в виде $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle R(\mathbf{r}, t) \rangle = & - \frac{\partial^2 [B_{ij}(\mathbf{r}) + B_{ji}(\mathbf{r})]}{\partial r_j \partial r_i} \langle R(\mathbf{r}, t) \rangle - \\ & - \frac{\partial [B_{ij}(\mathbf{r}) + B_{ji}(\mathbf{r})]}{\partial r_i} \langle R_j(\mathbf{r}, t) \rangle - \frac{\partial [B_{ij}(\mathbf{r}) + B_{ji}(\mathbf{r})]}{\partial r_j} \langle R_i(\mathbf{r}, t) \rangle + \\ & + [2B_{ij}(\mathbf{0}) - B_{ij}(\mathbf{r}) - B_{ji}(\mathbf{r})] \langle R_{ji}(\mathbf{r}, t) \rangle + 2\mu_\rho \langle R_{kk}(\mathbf{r}, t) \rangle. \end{aligned} \quad (11.82)$$

В случае изотропного случайного поля скорости случайное поле плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ будет однородным и изотропным случайным полем. В этом случае уравнение для корреляционной функции упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle R(\mathbf{r}, t) \rangle = 2\mu_\rho \Delta \langle R(\mathbf{r}, t) \rangle + \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} D_{ij}(\mathbf{r}) \langle R(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

где

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = 2 [B_{ij}(\mathbf{0}) - B_{ij}(\mathbf{r})]$$

— структурная матрица векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. При отсутствии динамической диффузии это уравнение совпадает с уравнением для плотности вероятностей относительной диффузии двух частиц.

Корреляционная функция $\langle R(\mathbf{r}, t) \rangle$ теперь будет зависеть от модуля вектора \mathbf{r} , т. е. $\langle R(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle R(r, t) \rangle$, и как функция переменных r, t будет описываться уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle R(r, t) \rangle = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{d-1} \left[\frac{\partial D_{ii}(r)}{\partial r} + \left(2\mu + \frac{r_i r_j}{r^2} D_{ij}(\mathbf{r}) \right) \frac{\partial}{\partial r} \right] \langle R(r, t) \rangle,$$

где, как и ранее, d — размерность пространства. Это уравнение может иметь стационарное решение $\langle R(r, t) \rangle = \langle R(r) \rangle$ при $t \rightarrow \infty$, соответствующее краевому условию $\langle R(\infty) \rangle = \rho_0^2$, вида [66, 67]

$$\langle R(r) \rangle = \rho_0^2 \exp \left\{ \int_r^\infty dr' \frac{\partial D_{ii}(r') / \partial r'}{2\mu + r'_i r'_j D_{ij}(\mathbf{r}') / r'^2} \right\}.$$

Отметим, что эта величина при $r = 0$ определяет стационарное значение второго момента поля плотности $\langle R(0) \rangle = \langle \rho^2(\mathbf{r}, t) \rangle_{t \rightarrow \infty}$ и, следовательно,

$$\langle \rho^2(\mathbf{r}, t) \rangle_{t \rightarrow \infty} = \rho_0^2 \exp \left\{ \int_0^\infty dr' \frac{\partial D_{ii}(r')/\partial r'}{2\mu + r'_i r'_j D_{ij}(\mathbf{r}')/r'^2} \right\} > \rho_0^2. \quad (11.83)$$

Вернемся теперь к общему случаю случайного поля скоростей не имеющего зеркальной симметрии (т.е. обладающего спиральностью). Полагая $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ в уравнении (11.82), с учетом формулы (4.56) на с. 108, приходим к незамкнутому уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2D^p \right) \langle R(\mathbf{0}, t) \rangle = 2\mu_\rho \langle R_{kk}(\mathbf{0}, t) \rangle, \quad \langle R(\mathbf{0}, 0) \rangle = \rho_0^2. \quad (11.84)$$

Для построения приближенного решения уравнения (11.84) можно построить приближенную процедуру разложения его правой части в ряд по малому параметру μ_ρ . Для этого пометим величины $\langle R(\mathbf{0}, t) \rangle_\mu$ и $\langle R_{kk}(\mathbf{0}, t) \rangle_\mu$ символом μ , и перепишем это уравнение в виде незамкнутого интегрального уравнения

$$\langle R(\mathbf{0}, t) \rangle_\mu = \rho_0^2 \exp \left\{ 2D^p t + \int_0^t d\tau \frac{2\mu_\rho}{\langle R(\mathbf{0}, \tau) \rangle_\mu} \langle R_{kk}(\mathbf{0}, \tau) \rangle_\mu \right\}. \quad (11.85)$$

Решение на начальном этапе, когда можно пренебречь диссипацией, имеет вид

$$\langle R(\mathbf{0}, t) \rangle_0 = \langle \rho^2(\mathbf{r}, t) \rangle_0 = \rho_0^2 e^{2D^p t}, \quad (11.86)$$

что, естественно, совпадает с формулой (11.48) при $n = 2$ и определяется только потенциальной составляющей спектральной функции поля скоростей.

Далее будем искать правую часть в виде ряда по параметру μ . В первом приближении решение задачи имеет структуру

$$\langle R(\mathbf{0}, t) \rangle_1 = \rho_0^2 \exp \left\{ 2D^p t + \int_0^t d\tau \frac{2\mu_\rho}{\langle R(\mathbf{0}, \tau) \rangle_0} \langle R_{kk}(\mathbf{0}, \tau) \rangle_0 \right\}. \quad (11.87)$$

Забегая вперед, отметим, что учитывая экспоненциальное увеличение со временем всех моментных функций для рассматриваемых задач, решение (11.87) для малых времен будет экспоненциально расти, затем достигнет максимального значения в момент времени t_{\max} , а затем быстро уменьшается во времени, в соответствии с физическим смыслом рассматриваемой задачи.

Отметим теперь, что из структуры уравнения (11.82) следует, что спиральность поля скоростей не сказывается на статистике градиента поля плотности, так как во все коэффициенты этого уравнения входит только симметричная матрица $[B_{ij}(\mathbf{r}) + B_{ji}(\mathbf{r})]$. А для такой матрицы все нечетные производные по \mathbf{r} обращаются в нуль при $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ (см. равенство (4.57) на стр. 108). Точно также и нечетные производные по \mathbf{r} функции $\langle R(\mathbf{r}, t) \rangle$ при $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ также обращаются в нуль. Учитывая эти обстоятельства сразу же можно сказать, что спиральность градиента плотности примеси равна нулю, так как она связана с величиной $\left\langle \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} \frac{\partial^2 \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial r_j \partial r_k} \right\rangle = \langle R_{ijk}(\mathbf{0}, t) \rangle$.

11.5.2. Одноточечные статистические характеристики градиента поля плотности

Введем теперь вектор градиента поля плотности $p_k(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k}$, тогда пространственный корреляционный тензор градиента поля плотности

$$P_{kl}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t) = \left\langle \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}_1, t)}{\partial r_l} \right\rangle \equiv - \langle R_{kl}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t) \rangle,$$

и дисперсия градиента поля плотности определяется равенством

$$\sigma_{\mathbf{p}}^2(t) = \left\langle \left(\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle \equiv - \langle R_{kk}(\mathbf{0}, t) \rangle. \quad (11.88)$$

Отметим, что при $t \rightarrow \infty$ из уравнения (11.84) следует выражение для стационарного значения дисперсии градиента поля плотности

$$\sigma_{\mathbf{p}}^2(\infty) = \frac{D^p}{\mu_\rho} \langle R(\mathbf{0}, \infty) \rangle.$$

Для нахождения эволюции во времени одноточечных статистических характеристик градиента поля плотности продифференцируем уравнение (11.82) по r_k . В результате получаем уравнение ($\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle R_k(\mathbf{r}, t) \rangle_0 &= - \frac{\partial^3 [B_{ij}(\mathbf{r}) + B_{ji}(\mathbf{r})]}{\partial r_i \partial r_j \partial r_k} \langle R(\mathbf{r}, t) \rangle_0 - \\ &- \frac{\partial^2 [B_{ij}(\mathbf{r}) + B_{ji}(\mathbf{r})]}{\partial r_i \partial r_k} \langle R_j(\mathbf{r}, t) \rangle_0 - \frac{\partial^2 [B_{ij}(\mathbf{r}) + B_{ji}(\mathbf{r})]}{\partial r_j \partial r_k} \langle R_i(\mathbf{r}, t) \rangle_0 - \\ &- \frac{\partial^2 [B_{ij}(\mathbf{r}) + B_{ji}(\mathbf{r})]}{\partial r_i \partial r_j} \langle R_k(\mathbf{r}, t) \rangle_0 - \frac{\partial [B_{ij}(\mathbf{r}) + B_{ji}(\mathbf{r})]}{\partial r_k} \langle R_{ji}(\mathbf{r}, t) \rangle_0 - \\ &- \frac{\partial [B_{ij}(\mathbf{r}) + B_{ji}(\mathbf{r})]}{\partial r_i} \langle R_{jk}(\mathbf{r}, t) \rangle_0 - \frac{\partial [B_{ij}(\mathbf{r}) + B_{ji}(\mathbf{r})]}{\partial r_j} \langle R_{ik}(\mathbf{r}, t) \rangle_0 - \\ &- [2B_{ij}(\mathbf{0}) - B_{ij}(\mathbf{r}) - B_{ji}(\mathbf{r})] \langle R_{jik}(\mathbf{r}, t) \rangle_0. \end{aligned}$$

Вектор $\langle R_k(\mathbf{r}, t) \rangle_0$ описывает пространственную корреляцию поля плотности и его градиента и при $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ все члены этого уравнения тождественно обращаются в нуль.

Продифференцируем теперь это уравнение по r_l и положим $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. В результате получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle R_{kl}(\mathbf{0}, t) \rangle_0 &= -2 \frac{\partial^4 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_i \partial r_j \partial r_k \partial r_l} \langle R(\mathbf{0}, t) \rangle_0 - 2 \frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_i \partial r_k} \langle R_{jl}(\mathbf{0}, t) \rangle_0 - \\ &- 2 \frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_i \partial r_l} \langle R_{jk}(\mathbf{0}, t) \rangle_0 - 2 \frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_k \partial r_l} \langle R_{ji}(\mathbf{0}, t) \rangle_0 - 2 \frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_i \partial r_j} \langle R_{kl}(\mathbf{0}, t) \rangle_0 - \\ &- 2 \frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_j \partial r_k} \langle R_{il}(\mathbf{0}, t) \rangle_0 - 2 \frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_j \partial r_l} \langle R_{ik}(\mathbf{0}, t) \rangle_0, \end{aligned}$$

которое с учетом равенства (4.56) на с. 108 можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle R_{kl}(\mathbf{0}, t) \rangle_0 &= -2 \frac{\partial^4 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_i \partial r_j \partial r_k \partial r_l} \langle R(\mathbf{0}, t) \rangle_0 + 2 \frac{(4+d) D^p}{d} \langle R_{kl}(\mathbf{0}, t) \rangle_0 + \\ &+ 2 \frac{D^s}{d(d+2)} [(d+1) \delta_{kl} \langle R_{ii}(\mathbf{0}, t) \rangle_0 - 2 \langle R_{kl}(\mathbf{0}, t) \rangle_0] + \\ &+ 2 \frac{D^p}{d(d+2)} [\delta_{kl} \langle R_{ii}(\mathbf{0}, t) \rangle_0 + 2 \langle R_{kl}(\mathbf{0}, t) \rangle_0]. \end{aligned}$$

Но учитывая, что источник генерации поля градиента

$$2 \frac{\partial^4 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_i \partial r_j \partial r_k \partial r_l} = -\frac{2}{d} \int_0^\infty d\tau \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \Delta \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t - \tau)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle \delta_{kl} = \frac{1}{d} D_\rho^{(4)} \delta_{kl}, \quad (D_\rho^{(4)} > 0)$$

является изотропным, то и тензор $\langle R_{kl}(\mathbf{0}, t) \rangle$ также изотропен, т. е.

$$\langle R_{kl}(\mathbf{0}, t) \rangle_0 = \frac{1}{d} \langle R_{ii}(\mathbf{0}, t) \rangle_0 \delta_{kl}.$$

Следовательно, для величины дисперсии градиента поля плотности (11.88) получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle R_{kk}(\mathbf{0}, t) \rangle_0 = -D_\rho^{(4)} \langle R(\mathbf{0}, t) \rangle_0 + 2 \frac{D^s(d-1) + (d+5) D^p}{d} \langle R_{kk}(\mathbf{0}, t) \rangle_0, \quad (11.89)$$

где второй момент поля плотности $\langle R(\mathbf{0}, t) \rangle_0$ описывается равенством (11.86).

Решение уравнения (11.89) имеет вид

$$\sigma_p^2(t) = \frac{D_\rho^{(4)} \langle R(\mathbf{0}, t) \rangle_0}{A} [e^{At} - 1], \quad (11.90)$$

где параметр $A = 2 \frac{D^s(d-1) + 5D^p}{d}$.

Отметим, что хотя это решение и генерируется потенциальной составляющей спектральной плотности случайного поля скоростей, но в случае слабой сжимаемости ($D^p \ll D^s$) инкремент нарастания экспоненциального роста решения во времени совпадает с инкрементом дисперсии градиента поля плотности в несжимаемом потоке жидкости с неоднородным начальном распределением плотности, так как в этом случае параметр $A = 2 \frac{D^s(d-1)}{d}$.

Вернемся теперь к выражению (11.87), которое с помощью формулы (11.90), можно переписать в окончательном виде

$$\langle \rho^2(t) \rangle_1 = \rho_0^2 \exp \left\{ 2D^p t - 2 \frac{\mu_\rho D_\rho^{(4)}}{A^2} [e^{At} - 1 - At] \right\}. \quad (11.91)$$

Это решение имеет максимум при $At_{\max} \approx \ln \frac{AD^p}{\mu_\rho D_\rho^{(4)}}$, и при этом величина $\langle R(\mathbf{0}, t) \rangle_1$ достигает значения

$$\langle R(\mathbf{0}, t) \rangle_{1\max} \approx \rho_0^2 \left(\frac{AD^p}{\mu_\rho D_\rho^{(4)}} \right)^{\frac{2D^p}{A}} \exp \left\{ -\frac{2D^p}{A} \right\},$$

а условием применимости пренебрежения эффектом действия динамической диффузии является условие $t \ll t_{\max}$.

При $t > t_{\max}$ функция $\langle R(\mathbf{0}, t) \rangle_1$ быстро убывает во времени. Как указывалось ранее, в общем случае величина $\langle R(\mathbf{0}, t) \rangle$ выходит на стационарное значение (11.83) при $t \rightarrow \infty$.

Покажем, что предложенный метод описания динамики статистических характеристик во времени с учетом динамической диффузии, справедлив и в более общих случаях, например, для описания динамики дисперсии градиента плотности (11.88). Чтобы получить эту динамику необходимо дополнить уравнение (11.89) членом с динамической диффузией и вместо символа 0 написать символ μ . В результате мы переходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle R_{kk}(\mathbf{0}, t) \rangle_\mu = -D_\rho^{(4)} \langle R(\mathbf{0}, t) \rangle_\mu + B \langle R_{kk}(\mathbf{0}, t) \rangle_\mu + 2\mu_\rho \langle R_{kkll}(\mathbf{0}, t) \rangle_\mu,$$

где коэффициент $B = 2 \frac{D^s(d-1) + (d+5) D^p}{d}$. Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle R_{kk}(\mathbf{0}, t) \rangle_\mu = -D_\rho^{(4)} \langle R(\mathbf{0}, t) \rangle_\mu + \left[B + 2\mu_\rho \frac{\langle R_{kkll}(\mathbf{0}, t) \rangle_\mu}{\langle R_{kk}(\mathbf{0}, t) \rangle_\mu} \right] \langle R_{kk}(\mathbf{0}, t) \rangle_\mu.$$

Тогда его решение имеет вид

$$\langle R_{kk}(\mathbf{0}, t) \rangle_\mu = -D_\rho^{(4)} \int_0^t dt_2 \langle R(\mathbf{0}, t_2) \rangle_\mu \exp \left\{ \int_{t_2}^t dt_1 \left[B + 2\mu_\rho \frac{\langle R_{kkll}(\mathbf{0}, t_1) \rangle_\mu}{\langle R_{kk}(\mathbf{0}, t_1) \rangle_\mu} \right] \right\},$$

и, следовательно, в первом приближении по коэффициенту динамической диффузии, получаем выражение

$$\langle R_{kk}(\mathbf{0}, t) \rangle_1 = -D_\rho^{(4)} \int_0^t dt_2 \langle R(\mathbf{0}, t_2) \rangle_1 \exp \left\{ \int_{t_2}^t dt_1 \left[B + 2\mu_\rho \frac{\langle R_{kkll}(\mathbf{0}, t_1) \rangle_0}{\langle R_{kk}(\mathbf{0}, t_1) \rangle_0} \right] \right\},$$

где величина $\langle R(\mathbf{0}, t) \rangle_1$ описывается равенством (11.91), а для величины $\langle R_{kkll}(\mathbf{0}, t) \rangle_0$ следует написать, стандартным образом, уравнение без учета динамической диффузии.

Обобщение на случай неоднородных начальных условий

Мы рассмотрели решение ряда задач о динамике статистических характеристик поля плотности и его градиента в простейшей постановке задачи (с однородными начальными условиями), с минимумом определяющих параметров, связанных только со статистическими характеристиками однородного поля скоростей, дельта-коррелированного во времени. В этом случае все изучаемые поля являются также однородными в пространстве, но нестационарными во времени случайными полями. При этом статистические средние, типа $F_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t) = \langle f_i(\mathbf{r}, t) f_j(\mathbf{r}_1, t) \rangle$, зависят по пространственным координатам только от разности $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$, и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} F_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} F_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t),$$

т. е. при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ для независимой от \mathbf{r} величины, $\left\langle f_i(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f_j(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle$ имеем тождество

$$\left\langle f_i(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f_j(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle = - \left\langle f_j(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle, \quad (11.92)$$

которым мы широко пользовались в работе при выводе всех уравнений. Это существенно упростило как анализ самой динамической системы, так и полученных результатов, потому что существенное большинство членов при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ зануляется, что означает отсутствие адвекции статистических характеристик в рассматриваемых задачах. Именно это и позволило решить, рассмотренные задачи с большой полнотой и без относительно громоздких вычислений.

При наличии неоднородных начальных условий решения всех задач уже не обладают свойством пространственной однородности и уравнения имеют очень громоздкий вид. Полученные выше решения, однако, несут определенную информацию и для этого случая. В самом деле, свойством (11.92) обладает также и интеграл (интегрирование по частям)

$$\int d\mathbf{r} f_i(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f_j(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} = - \int d\mathbf{r} f_j(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}.$$

Поэтому ясно, что для поля плотности в случае неоднородных начальных условий при отсутствии динамической диффузии вместо (11.86) будем иметь решение вида

$$\int d\mathbf{r} \langle \rho^2(\mathbf{r}, t) \rangle_0 = \int d\mathbf{r} \rho_0^2(\mathbf{r}) e^{2D\rho t}, \quad (11.93)$$

а вместо формулы (11.90) получим выражение

$$\int d\mathbf{r} \langle (\nabla \rho(\mathbf{r}, t))^2 \rangle_0 = \int d\mathbf{r} (\nabla \rho_0(\mathbf{r}))^2 e^{Bt} + \frac{D\rho^{(4)}}{A} \int d\mathbf{r} \langle \rho^2(\mathbf{r}, t) \rangle_0 [e^{At} - 1], \quad (11.94)$$

где параметр $B = 2 \frac{D^s(d-1) + (d+5D\rho)}{d}$.

Таким образом можно утверждать, что полученные соотношения и связи между различными величинами, с точки зрения неоднородных задач, являются интегральными и служат, образно говоря, тем "скелетом", на фоне которого происходит динамика сложных стохастических движений. При этом все члены, которые занулились в нашем рассмотрении, в случае неоднородных задач имеют дивергентный ("потоковый") вид.

Также легко написать и аналог выражения (11.87) для дисперсии поля плотности с учетом ее диссипации в случае неоднородных задач. Так, например, можно получить вместо решения (11.87) выражение на всем интервале времени

$$\int d\mathbf{r} \langle \rho^2(\mathbf{r}, t) \rangle_1 = \int d\mathbf{r} \rho_0^2(\mathbf{r}) \exp \left\{ 2D\rho t - 2\mu\rho \int_0^t d\tau \frac{\int d\mathbf{r} \langle (\nabla \rho(\mathbf{r}, \tau))^2 \rangle_0}{\int d\mathbf{r} \langle \rho^2(\mathbf{r}, \tau) \rangle_0} \right\},$$

где функции, входящие в правую часть этого равенства, описываются формулами (11.93) и (11.94).

Диффузия поля плотности с постоянным градиентом

При наличии динамической диффузии, диффузия плотности примеси описывается стохастическим уравнением в частных производных второго порядка (11.1). Случай наличия среднего градиента плотности в бездивергентном случайном поле скоростей допускает более полный анализ. Этот случай соответствует решению уравнения (11.1) на с. 244 с начальными условиями (здесь мы также ограничиваемся двумерным случаем)

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \mathbf{G}\mathbf{r}, \quad \mathbf{p}_0(\mathbf{r}) = \frac{\partial \rho_0(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{G}.$$

Представляя поле плотности в виде $\rho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{G}\mathbf{r} + \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)$, получаем уравнение для флуктуирующей части поля плотности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{G}\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mu \Delta \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t), \quad \tilde{\rho}(\mathbf{r}, 0) = 0. \quad (11.95)$$

Решение этой задача, в отличие от рассмотренных выше, является статистически пространственно однородным случайным полем, т. е. все одноточечные статистические средние не зависят от \mathbf{r} , и имеет стационарные (при $t \rightarrow \infty$) плотности вероятностей как самого поля плотности, так и его градиента.

В этом случае из уравнения (11.95) легко получить уравнение

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{\rho}^n(\mathbf{r}, t) \rangle = n(n-1)D_0\mathbf{G}^2 \langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \rangle - \mu n(n-1) \langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (11.96)$$

где

$$\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{G}.$$

В стационарном режиме (при $t \rightarrow \infty$) из (11.96) следует, что

$$\langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{D_0\mathbf{G}^2}{\mu} \langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (11.97)$$

и, в частности для $n = 2$ выражение для дисперсии флуктуаций градиента плотности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{D_0\mathbf{G}^2}{\mu}. \quad (11.98)$$

Перепишем теперь уравнение (11.96) в виде

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{\rho}^n(\mathbf{r}, t) \rangle = n(n-1)D_0\mathbf{G}^2 \langle f(\mathbf{r}, t) \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (11.99)$$

где

$$f(\mathbf{r}, t) = 1 - \frac{\mu}{D_0\mathbf{G}^2} \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t).$$

Следовательно, дисперсия плотности описывается выражением ($\langle \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$)

$$\langle \tilde{\rho}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = 2D_0\mathbf{G}^2 \int_0^t d\tau \langle f(\mathbf{r}, \tau) \rangle. \quad (11.100)$$

Отметим, что корреляционная функция поля $\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)$,

$$\Gamma(\mathbf{r}, t) = \langle \tilde{\rho}(\mathbf{r}_1, t) \tilde{\rho}(\mathbf{r}_2, t) \rangle, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

для данной задачи описывается уравнением, вытекающим из (11.95),

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\mathbf{r}, t) = 2G_i G_j B_{ij}(\mathbf{r}) + 2[B_{ij}(0) - B_{ij}(\mathbf{r}) + \mu \delta_{ij}] \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \Gamma(\mathbf{r}, t)$$

и, следовательно, стационарное значение $\Gamma(\mathbf{r}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(\mathbf{r}, t)$ описывается уравнением

$$G_i G_j B_{ij}(\mathbf{r}) = -[B_{ij}(0) - B_{ij}(\mathbf{r}) + \mu \delta_{ij}] \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \Gamma(\mathbf{r}). \quad (11.101)$$

Полагая $\mathbf{r} = 0$ в этом уравнении, мы приходим с учетом соотношения (4.53) на с. 107 к равенству (11.98). А дифференцируя уравнение (11.101) дважды по \mathbf{r} и полагая $\mathbf{r} = 0$, с учетом равенств (4.55) и (4.56) на с. 108 получаем выражение

$$\mu^2 \langle (\Delta \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t))^2 \rangle = \frac{1}{2} D^s (D_0 + \mu) \mathbf{G}^2. \quad (11.102)$$

Точные равенства (11.98) и (11.102) можно использовать для тестирования различных численных схем и проверки результатов численного моделирования. Однако, для вычисления стационарного значения $\langle \tilde{\rho}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ при $t \rightarrow \infty$ необходимо знать временную эволюцию второго момента $\langle \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$. Такую информацию можно получить лишь при отсутствии динамической диффузии. В этом случае плотность вероятностей для градиента плотности описывается уравнением (11.57), которое для рассматриваемой задачи упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t; \mathbf{p}) = \frac{1}{8} D^s \left(3 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) P(\mathbf{r}, t; \mathbf{p}), \quad (11.103)$$

$$P(\mathbf{r}, 0; \mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{G}).$$

Следовательно, согласно равенству (11.61),

$$\langle |\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle = \mathbf{G}^2 \{ e^{D^s t} - 1 \}. \quad (11.104)$$

Точная формула (11.98) и равенство (11.104) позволяют оценить время выхода на статистический стационарный режим для величины $\langle \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ при $t \rightarrow \infty$, а именно

$$D^s T_0 \sim \ln \left(\frac{D_0 + \mu}{\mu} \right).$$

Следовательно, для стационарной дисперсии флуктуаций поля плотности из равенства (11.100) получаем оценку

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \tilde{\rho}^2(\mathbf{r}, t) \rangle \sim 2 \frac{D_0}{D^s} \mathbf{G}^2 \ln \left(\frac{D_0 + \mu}{\mu} \right).$$

Принимая во внимание, что $D_0 \sim \sigma_u^2 \tau_0$ и $D_0/D^s \sim l_0^2$, где σ_u^2 — дисперсия флуктуаций поля скорости, а τ_0 и l_0 —, соответственно, его временной и пространственный

радиусы корреляции, видим, что время T_0 , ввиду логарифмической зависимости от коэффициента динамической зависимости μ , может быть не слишком большим

$$T_0 \approx \frac{l_0^2}{\sigma_u^2 \tau_0} \ln \left(\frac{\sigma_u^2 \tau_0}{\mu} \right),$$

а величина

$$\langle \tilde{\rho}^2 \rangle \sim \mathbf{G}^2 l_0^2 \ln \left(\frac{\sigma_u^2 \tau_0}{\mu} \right) \quad \text{для } \mu \ll \sigma_u^2 \tau_0.$$

11.5.3. Пространственная корреляционная функция магнитного поля

Как упоминалось выше, в общем случае дивергентного случайного поля скоростей, можно вычислить плотности вероятностей для магнитного поля и его энергии. В принципе, эту методику можно использовать и для вычисления различных величин, связанных с пространственными производными магнитного поля без учета динамической диффузии. Однако соответствующие уравнения будут очень громоздкими и из них трудно будет получить какие-либо следствия.

При анализе различных моментных функций мы уже можем учитывать коэффициент динамической диффузии. Однако, в общем случае дивергентного поля скоростей все уравнения будут чрезвычайно громоздкими. Поэтому при дальнейшем анализе статистических характеристик пространственных производных магнитного поля, мы ограничимся бездивергентным полем скоростей ($\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$), т.е. турбулентный поток жидкости будет считаться несжимаемым. Учет сжимаемости лишь меняет коэффициенты этого уравнения, но не основную тенденцию поведения моментных функций.

Перепишем векторное уравнение (11.2) в координатном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} H_i(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial r_k} u_k(\mathbf{r}, t) H_i(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} H_k(\mathbf{r}, t) + \mu_H \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} H_i(\mathbf{r}, t)$$

и введем функцию $W_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; t) = H_i(\mathbf{r}, t) H_j(\mathbf{r}_1, t)$, для которой получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; t) = & \left\{ -\left(\frac{\partial}{\partial r_k} u_k(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial r_{1k}} u_k(\mathbf{r}_1, t) \right) \delta_{in} \delta_{jm} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_n} \delta_{jm} + \frac{\partial u_j(\mathbf{r}_1, t)}{\partial r_{1m}} \delta_{in} \right\} W_{nm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; t) + \mu_H \left[\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_1^2} \right] W_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; t). \end{aligned} \quad (11.105)$$

Это уравнение можно переписать в силу соленоидальности поля скоростей в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W_{nm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; t) = & \left\{ -\left(u_k(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial r_k} + u_k(\mathbf{r}_1, t) \frac{\partial}{\partial r_{1k}} \right) \delta_{ns} \delta_{mt} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial u_n(\mathbf{r}, t)}{\partial r_s} \delta_{mt} + \frac{\partial u_m(\mathbf{r}_1, t)}{\partial r_{1t}} \delta_{ns} \right\} W_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; t) + \mu_H \left[\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_1^2} \right] W_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; t). \end{aligned} \quad (11.106)$$

Уравнение (11.105) удобно для непосредственного усреднения, а уравнение (11.106) для вычисления вариационной производной.

Считаем далее, как и ранее, поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ гауссовым однородным (но, вообще говоря, не изотропным) и стационарным дельта-коррелированным полем во времени с корреляционной функцией (5.5.) на с. 126 и для расщепления корреляции воспользуемся формулой Фурутцу-Новикова (11.14). Тогда усредняя уравнение (11.105) по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, и используя выражение для вариационной производной

$$\left\langle \frac{\delta W_{nm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; t)}{\delta u_q(\mathbf{R}, t-0)} \right\rangle = \left\{ - \left(\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \frac{\partial}{\partial r_q} + \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}) \frac{\partial}{\partial r_{1q}} \right) \delta_{ns} \delta_{mt} + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})}{\partial r_s} \delta_{nq} \delta_{mt} + \frac{\partial \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R})}{\partial r_{1t}} \delta_{mq} \delta_{ns} \right\} \langle W_{st}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; t) \rangle,$$

вытекающее из уравнения (11.106), получаем уравнение в частных производных ($\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle W_{ij}(\mathbf{r}; t) \rangle &= -2 \frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_k \partial r_m} \langle W_{km}(\mathbf{r}; t) \rangle - \\ &- 2 \frac{\partial [B_{ik}(\mathbf{0}) - B_{ik}(\mathbf{r})]}{\partial r_s} \frac{\partial}{\partial r_k} \langle W_{sj}(\mathbf{r}; t) \rangle - 2 \frac{\partial [B_{kj}(\mathbf{0}) - B_{kj}(\mathbf{r})]}{\partial r_s} \frac{\partial}{\partial r_k} \langle W_{is}(\mathbf{r}; t) \rangle + \\ &+ [2B_{kq}(\mathbf{0}) - B_{kq}(\mathbf{r}) - B_{qk}(\mathbf{r})] \frac{\partial^2}{\partial r_q \partial r_k} \langle W_{ij}(\mathbf{r}; t) \rangle + 2\mu_H \langle W_{ij;ss}(\mathbf{r}; t) \rangle, \end{aligned} \quad (11.107)$$

где через $\langle W_{ij;ss}(\mathbf{r}; t) \rangle = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \langle W_{ij}(\mathbf{r}; t) \rangle$ обозначен диссипативный тензор (производные функции $W_{ik}(\mathbf{r}, t)$ по \mathbf{r} обозначаются дополнительными индексами после знака ";").

Получим теперь уравнение для одноточечной корреляции, полагая в уравнении (11.107) $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle W_{ij}(t) \rangle = -2 \frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{0})}{\partial r_k \partial r_m} \langle W_{km}(t) \rangle + 2\mu_H \langle W_{ij;ss}(\mathbf{0}; t) \rangle.$$

Учитывая теперь соленоидальную часть равенства (4.56) на с. 108 ($D^p = 0$), приходим к незамкнутому уравнению для корреляции вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle W_{ij}(t) \rangle = \frac{2(d+1)D^s}{d(d+2)} \delta_{ij} \langle E(t) \rangle - \frac{4D^s}{d(d+2)} \langle W_{ij}(t) \rangle + 2\mu_H \langle W_{ij;ss}(\mathbf{0}; t) \rangle, \quad (11.108)$$

где $\langle E(t) \rangle = \langle \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ – средняя энергия магнитного поля. Полагая в уравнении (11.108) $i = j$, получаем уравнение для средней энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle E(t) \rangle = \frac{2(d-1)D^s}{d} \langle E(t) \rangle - 2\mu_H D(t),$$

где величина $D(t)$, описывающая диссипацию энергии нестационарного случайного магнитного поля, определяется равенством

$$\begin{aligned} D(t) &= \left\langle [\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]^2 \right\rangle = - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \mathbf{H}(\mathbf{r}_1, t) \rangle_{\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}} = \\ &= - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \langle W_{ii}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t) \rangle_{\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}} = - \langle W_{ii;jj}(\mathbf{0}, t) \rangle. \end{aligned} \quad (11.109)$$

Функция $D(t)$ при этом определяет дисперсию силы тока в магнитогидродинамическом потоке.

Так же как и в случае анализа статистических характеристик поля плотности, пометим все величины символом μ и перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\langle E(t) \rangle_\mu}{E_0} = \frac{2(d-1)D^s}{d} - \frac{2\mu_H}{\langle E(t) \rangle_\mu} D_\mu(t).$$

Далее будем искать правую часть этого уравнения в виде ряда по параметру μ . В первом приближении имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\langle E(t) \rangle_1}{E_0} = \frac{2(d-1)D^s}{d} - \frac{2\mu_H}{\langle E(t) \rangle_0} D_0(t),$$

где величины с нулевым индексом соответствуют решению задачи без эффекта динамической диффузии. Таким образом решение задачи в первом приближении имеет структуру

$$\langle E(t) \rangle_1 = E_0 \exp \left\{ \frac{2(d-1)D^s t}{d} - \int_0^t d\tau \frac{2\mu_H}{\langle E(\tau) \rangle_0} D_0(\tau) \right\}. \quad (11.110)$$

Решение задачи на начальном этапе эволюции, когда можно пренебречь диссипацией, имеет экспоненциально растущий вид

$$\langle E(t) \rangle_0 = E_0 \exp \left\{ \frac{2(d-1)}{d} D^s t \right\}, \quad (11.111)$$

а уравнение для корреляции (11.108) в отсутствии динамической диффузии переходит в уравнение с заданным источником, решение которого имеет вид

$$\frac{\langle W_{ij}(t) \rangle_0}{\langle E(t) \rangle_0} = \frac{1}{d} \delta_{ij} + \left(\frac{W_{ij}(0)}{E_0} - \frac{1}{d} \delta_{ij} \right) \exp \left\langle -2 \left(\frac{d+1}{d+2} \right) D^s t \right\rangle, \quad (11.112)$$

т. е. происходит быстрая изотропизация магнитного поля в несжимаемом турбулентном потоке жидкости. Отметим, что наличие сжимаемости случайного потока, увеличивает скорость роста средней энергии и убыстряет изотропизацию магнитного поля (сравни с уравнением (11.68) на с. 264).

11.5.4. О спиральности магнитного поля

Далее мы пренебрегаем динамической диффузией и не будем писать нулевой символ. Получим теперь уравнение для величины

$$\langle W_{kp;j}(\mathbf{r}; t) \rangle = \frac{\partial}{\partial r_j} \langle W_{kp}(\mathbf{r}; t) \rangle = \left\langle \frac{\partial H_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_j} H_p(\mathbf{r}_1, t) \right\rangle$$

для того, чтобы вычислить спиральность магнитного поля $H(t) = \varepsilon_{ijk} \langle W_{ki;j}(\mathbf{0}; t) \rangle = \langle \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{H} \rangle$. Перепишем уравнение (11.107) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle W_{kp}(\mathbf{r}; t) \rangle &= -2 \frac{\partial^2 B_{kp}(\mathbf{r})}{\partial r_n \partial r_m} \langle W_{nm}(\mathbf{r}; t) \rangle - \\ &- 2 \frac{\partial [B_{kn}(\mathbf{0}) - B_{kn}(\mathbf{r})]}{\partial r_s} \frac{\partial}{\partial r_n} \langle W_{sp}(\mathbf{r}; t) \rangle - 2 \frac{\partial [B_{np}(\mathbf{0}) - B_{np}(\mathbf{r})]}{\partial r_s} \frac{\partial}{\partial r_n} \langle W_{ks}(\mathbf{r}; t) \rangle - \\ &+ [2B_{nq}(\mathbf{0}) - B_{nq}(\mathbf{r}) - B_{qn}(\mathbf{r})] \frac{\partial^2}{\partial r_q \partial r_n} \langle W_{kp}(\mathbf{r}; t) \rangle, \end{aligned}$$

и дифференцируя его по r_j , получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle W_{kp;j}(\mathbf{r}; t) \rangle &= -2 \frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{r})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_j} \langle W_{nm}(\mathbf{r}; t) \rangle - 2 \frac{\partial^2 B_{kp}(\mathbf{r})}{\partial r_n \partial r_m} \langle W_{nm;j}(\mathbf{r}; t) \rangle + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 B_{kn}(\mathbf{r})}{\partial r_m \partial r_j} \langle W_{mp;n}(\mathbf{r}; t) \rangle - 2 \frac{\partial [B_{kn}(\mathbf{0}) - B_{kn}(\mathbf{r})]}{\partial r_m} \frac{\partial}{\partial r_n} \langle W_{mp;j}(\mathbf{r}; t) \rangle + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 B_{np}(\mathbf{r})}{\partial r_m \partial r_j} \langle W_{km;n}(\mathbf{r}; t) \rangle - 2 \frac{\partial [B_{np}(\mathbf{0}) - B_{np}(\mathbf{r})]}{\partial r_m} \frac{\partial}{\partial r_n} \langle W_{km;j}(\mathbf{r}; t) \rangle - \\ &- \frac{\partial [B_{nq}(\mathbf{r}) + B_{qn}(\mathbf{r})]}{\partial r_j} \frac{\partial^2}{\partial r_q \partial r_n} \langle W_{kp}(\mathbf{r}; t) \rangle + \\ &+ [2B_{nq}(\mathbf{0}) - B_{nq}(\mathbf{r}) - B_{qn}(\mathbf{r})] \frac{\partial^2}{\partial r_q \partial r_n} \langle W_{kp;j}(\mathbf{r}; t) \rangle. \quad (11.113) \end{aligned}$$

Полагая теперь $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ переходим к уравнению для одноточечной корреляции

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle W_{kp;j}(\mathbf{0}; t) \rangle &= -2 \frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_j} \langle W_{nm}(\mathbf{0}; t) \rangle - 2 \frac{\partial^2 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m} \langle W_{nm;j}(\mathbf{0}; t) \rangle + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 B_{kn}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_j} \langle W_{mp;n}(\mathbf{0}; t) \rangle + 2 \frac{\partial^2 B_{np}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_j} \langle W_{km;n}(\mathbf{0}; t) \rangle. \end{aligned}$$

Учитывая теперь равенство (4.56) на с. 108 для соленоидальной части корреляционной функции, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle W_{kp;j}(\mathbf{0}; t) \rangle &= -2 \frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_j} \langle W_{nm}(\mathbf{0}; t) \rangle + \\ &+ 4 \frac{D^s}{d(d+2)} \langle W_{kp;j}(\mathbf{0}; t) \rangle - 2 \frac{(d+1)D^s}{d(d+2)} [\langle W_{jp;k}(\mathbf{0}; t) \rangle + \langle W_{kj;p}(\mathbf{0}; t) \rangle]. \end{aligned}$$

Теперь напишем уравнение для функции $\langle W_{jp;k}(\mathbf{0}; t) \rangle + \langle W_{kj;p}(\mathbf{0}; t) \rangle$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\langle W_{jp;k}(\mathbf{0}; t) \rangle + \langle W_{kj;p}(\mathbf{0}; t) \rangle] &= -2 \left[\frac{\partial^3 B_{jp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_k} + \frac{\partial^3 B_{kj}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_p} \right] \langle W_{nm}(\mathbf{0}; t) \rangle + \\ &+ \frac{2(d+3)D^s}{d(d+2)} [\langle W_{jp;k}(\mathbf{0}; t) \rangle + \langle W_{kj;p}(\mathbf{0}; t) \rangle] - 4 \frac{(d+1)D^s}{d(d+2)} \langle W_{kp;j}(\mathbf{0}; t) \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом мы приходим к системе уравнений для функций $\langle W_{kp;j}(\mathbf{0}; t) \rangle$ и $[\langle W_{jp;k}(\mathbf{0}; t) \rangle + \langle W_{kj;p}(\mathbf{0}; t) \rangle]$ с нулевыми начальными условиями или к уравнению второго порядка

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2(d+5)D^s}{d(d+2)} \frac{\partial}{\partial t} - 8 \frac{(d-1)}{d^2(d+2)} [D^s]^2 \right) \langle W_{kp;j}(\mathbf{0}; t) \rangle &= \\ &= -2 \frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_j} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2(d+3)D^s}{d(d+2)} \right) \langle W_{nm}(\mathbf{0}; t) \rangle + \\ &+ \frac{4(d+1)D^s}{d(d+2)} \left(\frac{\partial^3 B_{jp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_k} + \frac{\partial^3 B_{kj}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_p} \right) \langle W_{nm}(\mathbf{0}; t) \rangle, \quad (11.114) \end{aligned}$$

с источником в правой части, связанным с отсутствием отражательной симметрии.

Введем разложение функции $C(r)$ в корреляционной функции поля скоростей (4.58) $C(r) = C(0) - \alpha r^2 + \dots$, и воспользуемся равенством (4.57). Решать уравнение (11.114) будем исходя из растущих экспонент одноточечной корреляционной функции магнитного поля (11.111) и (11.112)

$$\langle W_{nm}(\mathbf{0}; t) \rangle = \frac{1}{d} \delta_{nm} \langle E(t) \rangle_0.$$

В этом случае уравнение (11.114) упрощается и принимает вид уравнения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2(d+5)D^s}{d(d+2)} \frac{\partial}{\partial t} - 8 \frac{(d-1)}{d^2(d+2)} [D^s]^2 \right) \langle W_{kp;j}(\mathbf{0}; t) \rangle &= \\ &= 8\alpha D^s \frac{(d+3)(d-1)}{d} \varepsilon_{kpj} \langle E(t) \rangle_0, \end{aligned}$$

которое можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{4D^s}{d} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2(d-1)D^s}{d(d+2)} \right) \langle W_{kp;j}(\mathbf{0}; t) \rangle = 8\alpha D^s \frac{(d+3)(d-1)}{d} \varepsilon_{kpj} \langle E(t) \rangle_0. \quad (11.115)$$

Уравнение (11.115) имеет два характеристических показателя – положительный, соответствующий растущей экспоненте, и отрицательный, соответствующий затухающему решению. Растущее во времени решение уравнения (11.115) ищем в виде

$$\langle W_{kp;j}(\mathbf{0}; t) \rangle = U(t) \exp \left\{ \frac{4D^s}{d} t \right\}.$$

Тогда уравнение для $U(t)$ упрощается и принимает вид "укороченного" уравнения

$$\frac{\partial U(t)}{\partial t} = 4\alpha \varepsilon_{kpj} \frac{(d+2)(d-1)(d+3)}{3(d+1)} E_0 \exp \left\{ \frac{2(d-3)D^s}{d} t \right\}.$$

И так как мы знаем, что в двумерном случае спиральность равна нулю, то в трехмерном случае имеем $U(t) = 20\alpha \varepsilon_{kpj} E_0 t$ и, следовательно, основное экспоненциально растущее решение принимает вид

$$\langle W_{kp;j}(\mathbf{0}; t) \rangle = U(t) \exp \left\{ \frac{4D^s}{3} t \right\} = 20\alpha \varepsilon_{kpj} \langle E(t) \rangle_0 t. \quad (11.116)$$

В силу равенства (1.56) (в трехмерном случае $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kij} = 6$), для спиральности магнитного поля получаем окончательное выражение

$$H_0(t) = 120\alpha \langle E(t) \rangle_0 t. \quad (11.117)$$

11.5.5. О диссипации энергии магнитного поля (дисперсии силы тока)

Диссипация энергии магнитного поля определяется выражением (11.109) и для ее получения необходимо вывести уравнение для величины

$$\langle W_{kp;js}(\mathbf{0}; t) \rangle = \frac{\partial}{\partial r_s} \langle W_{kp;j}(\mathbf{0}; t) \rangle = \left\langle \frac{\partial H_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_s \partial r_j} H_p(\mathbf{r}_1, t) \right\rangle_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1}.$$

Дифференцируя уравнение (11.113) по r_s , и полагая $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, получаем уравнение для одноточечной корреляции

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle W_{kp;js}(\mathbf{0}; t) \rangle &= -2 \frac{\partial^4 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_j \partial r_s} \langle W_{nm}(\mathbf{0}; t) \rangle - \\ &- 2 \frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_j} \langle W_{nm;s}(\mathbf{0}; t) \rangle - 2 \frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_s} \langle W_{nm;j}(\mathbf{0}; t) \rangle + \\ &+ 2 \frac{\partial^3 B_{kn}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_j \partial r_s} \langle W_{mp;n}(\mathbf{0}; t) \rangle + 2 \frac{\partial^3 B_{np}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_j \partial r_s} \langle W_{km;n}(\mathbf{0}; t) \rangle - \\ &- 2 \frac{\partial^2 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m} \langle W_{nm;js}(\mathbf{0}; t) \rangle + 2 \frac{\partial^2 B_{kn}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_j} \langle W_{mp;ns}(\mathbf{0}; t) \rangle + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 B_{kn}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_s} \langle W_{mp;jn}(\mathbf{0}; t) \rangle + 2 \frac{\partial^2 B_{np}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_j} \langle W_{km;ns}(\mathbf{0}; t) \rangle + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 B_{np}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_s} \langle W_{km;jn}(\mathbf{0}; t) \rangle - 2 \frac{\partial^2 B_{qn}(\mathbf{0})}{\partial r_j \partial r_s} \langle W_{kp;qm}(\mathbf{0}; t) \rangle. \end{aligned}$$

Свернем все функции по индексам $k = p$ и $j = s$ и учтем формулу (4.56) на с. 108 для несжимаемого потока жидкости. В результате приходим к уравнению вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle W_{kk;ss}(\mathbf{0}; t) \rangle &= -2 \frac{\partial^4 B_{kk}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_s \partial r_s} \langle W_{nm}(\mathbf{0}; t) \rangle - \\ &- 4 \frac{\partial^3 B_{kk}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_s} \langle W_{nm;s}(\mathbf{0}; t) \rangle + 2 \frac{\partial^3 B_{kn}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_s \partial r_s} \langle W_{mk;n}(\mathbf{0}; t) \rangle + \\ &+ 2 \frac{\partial^3 B_{nk}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_s \partial r_s} \langle W_{km;n}(\mathbf{0}; t) \rangle + \frac{4(d+1)D^s}{(d+2)} \langle W_{mm;ss}(\mathbf{0}; t) \rangle. \end{aligned}$$

Теперь ограничимся источниками возбуждения, экспоненциально растущими во времени,

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial^4 B_{kk}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_s \partial r_s} \langle W_{nm}(\mathbf{0}; t) \rangle_0 &= -2 \frac{\partial^4 B_{kk}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_n \partial r_s \partial r_s} \langle E(t) \rangle_0 = \\ &= -2 \int_0^\infty d\tau \langle [\Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau)] [\Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)] \rangle \langle E(t) \rangle_0 = -2D_H^{(4)} \langle E(t) \rangle_0, \end{aligned}$$

где $D_H^{(4)} = \int d\mathbf{k} \mathbf{k}^4 E^s(k)$.

Рассмотрим теперь члены, связанные со спиральностью, отличные от нуля только в трехмерном случае. Учитывая формулы (11.116) и (1.56), получаем уравнение вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{4(d+1)D^s}{(d+2)} \right) \langle W_{kk;ss}(\mathbf{0}; t) \rangle = -2D_H^{(4)} \langle E(t) \rangle_0 - 4800(d-2)\alpha^2 \langle E(t) \rangle_0 t,$$

которое можно переписать, согласно формуле (11.109), для диссипации $D_0(t)$ в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A \right) D_0(t) = \left[2D_H^{(4)} + 4800(d-2)\alpha^2 \frac{\partial}{\partial g} \right] E_0 e^{gt}, \quad (11.118)$$

где параметры

$$A = \frac{4(d+1)D^s}{(d+2)}, \quad g = \frac{2(d-1)}{d} D^s,$$

и мы включили в уравнение коэффициент $(d-2)$, подчеркивающий, что соответствующий член в уравнении исчезает в двумерном случае.

Интегрируя уравнение (11.118), получаем выражение для диссипации

$$\begin{aligned} D_0(t) &= 2D_H^{(4)} \langle E(t) \rangle_0 \frac{1}{(A-g)} \left[e^{(A-g)t} - 1 \right] + \\ &+ 4800(d-2)\alpha^2 \langle E(t) \rangle_0 \frac{1}{(A-g)^2} \left[e^{(A-g)t} - 1 - (A-g)t \right], \end{aligned}$$

где положительный параметр

$$A-g = \frac{2(d^2+d+2)D^s}{d(d+2)}.$$

Оставляя теперь только растущие экспоненты, получаем окончательное выражение для эволюции диссипации во времени

$$D_0(t) \approx \left[2D_H^{(4)} + \frac{4800(d-2)\alpha^2}{(A-g)} \right] \frac{\langle E(t) \rangle_0}{(A-g)} e^{(A-g)t}. \quad (11.119)$$

В трехмерном случае $d = 3$ и, следовательно,

$$D_0^{(3)}(t) \approx \left[2D_H^{(4)} + 2571 \frac{\alpha^2}{D^s} \right] \frac{15 \langle E(t) \rangle_0}{28D^s} \exp \left\{ \frac{28}{15} D^s t \right\}, \quad (11.120)$$

Из структуры трехмерного решения, видно, что диссипация магнитного поля для больших времен определяется спиральностью поля скоростей. При ее отсутствии – средней энергией магнитного поля (11.111).

В двумерном же случае $d = 2$ спиральность отсутствует и, следовательно,

$$D_0^{(2)}(t) \approx \frac{D_H^{(4)}}{D^s} \langle E(t) \rangle_0 e^{D^s t}. \quad (11.121)$$

В этом случае диссипация энергии определяется только ее энергией.

Из формул (11.120) и (11.121) видно, что диссипация растет во времени значительно быстрее, чем средняя энергия.

Вернемся теперь к первоначальной задаче о расчете динамики средней энергии с учетом ее диссипации. Подставляя выражение (11.119) в формулу (11.110) и выполняя интегрирование по времени, получаем решение задачи в виде

$$\begin{aligned} \langle E(t) \rangle_1 &= E_0 \exp \left\{ \frac{2(d-1)D^s}{d} t - 4\mu_H \left[D_H^{(4)} + \frac{2400(d-2)\alpha^2}{(A-g)} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{(A-g)^2} \left[e^{(A-g)t} - 1 \right] \right\}, \end{aligned}$$

откуда видно, что средняя энергия быстро убывает во времени. При этом средняя энергия достигает максимального значения в момент времени

$$D^s t_{\max} \approx \frac{1}{(A-g)} \ln \frac{(d-1)(A-g)^2 D^s}{2d\mu_H [D_H^{(4)}(A-g) + 2400(d-2)\alpha^2]}.$$

В трехмерном случае имеем

$$D^s t_{\max} \sim \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma^2 \tau_0}{\mu_H} - 3,8 & \text{при наличии спиральности,} \\ \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma^2 \tau_0}{2\mu_H} & \text{при отсутствии спиральности,} \end{cases}$$

т. е. при наличии спиральности средняя энергия достигает своего максимума значительно быстрее, чем в случае ее отсутствия.

В двумерном же случае плоско-параллельного потока жидкости имеем

$$D^s t_{\max} = \frac{1}{2} \ln \frac{[D^s]^2}{2\mu_H D_H^{(4)}} \sim \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma^2 \tau_0}{2\mu_H}.$$

Условием применимости пренебрежения эффектом, вызванным динамической диффузией, является, очевидно, условие $t \ll t_{\max}$.

Выше мы рассмотрели решение задач с однородными начальными условиями. При наличии неоднородных начальных условий решения всех этих задач уже не обладают свойством пространственной однородности и уравнения имеют очень громоздкий вид. Полученные выше решения, однако, несут определенную информацию и для этого случая, аналогично полю плотности. Так для средней энергии магнитного поля в случае неоднородных начальных условий при отсутствии динамической диффузии получим выражение

$$\int d\mathbf{r} \langle E(\mathbf{r}, t) \rangle_0 = \int d\mathbf{r} E_0(\mathbf{r}) \exp \left\{ 2 \frac{d-1}{d} (D^s + D^p) t \right\}$$

вместо формулы (11.67) на с. 264.

Задачи

Задача 11.1. Получить уравнение Фоккера–Планка для положения частицы в бездивергентном случайном поле скоростей с учетом двумерного плоскопараллельного среднего потока $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = v(y)\mathbf{l}$, где $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{l} = (1, 0)$.

Указание. Движение частицы описывается системой стохастических уравнений

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(y) + u_1(\mathbf{r}, t), \quad \frac{d}{dt}y(t) = u_2(\mathbf{r}, t).$$

Решение.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) P(t; \mathbf{r}) = D_0 \Delta P(t; \mathbf{r}). \quad (11.122)$$

Задача 11.2. Показать, что уравнению (11.122) статистически эквивалентна частица, динамика которой описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(y) + u_1(t), \quad \frac{d}{dt}y(t) = u_2(t), \quad (11.123)$$

где $u_i(t)$, $i = 1, 2$ — статистически независимые гауссовы процессы "белого шума" со статистическими характеристиками

$$\langle \mathbf{u}(t) \rangle = 0, \quad \langle u_i(t) u_j(t') \rangle = 2\delta_{ij} D_0 \delta(t - t').$$

Задача 11.3. Проинтегрировать уравнения (11.123) и вычислить статистические характеристики положения частицы для линейного сдвигового потока $v(y) = \alpha y$.

Решение.

$$y(t) = y_0 + w_2(t), \quad x(t) = x_0 + w_1(t) + \int_0^t d\tau v(y + w_2(\tau)), \quad (11.124)$$

где $w_i(t) = \int_0^t d\tau u_i(\tau)$ — независимые винеровские процессы с характеристиками

$$\langle \mathbf{w}(t) \rangle = 0, \quad \langle w_i(t) w_j(t') \rangle = 2D_0 \delta_{ij} \min\{t, t'\}.$$

Во всех случаях координата $y(t)$ имеет гауссову плотность распределения вероятностей с параметрами

$$\langle y(t) \rangle = y_0, \quad \langle y^2(t) \rangle = y_0^2 + 2D_0 t.$$

Для линейного сдвигового потока равенства (11.124) соответствуют совместной гауссовой плотности вероятностей с параметрами

$$\langle y(t) \rangle = y_0, \quad \langle x(t) \rangle = x_0 + \alpha y_0 t, \\ \sigma_{xx}^2(t) = 2D_0 t \left(1 + \alpha t + \frac{1}{3} \alpha^2 t^2 \right), \quad \sigma_{yy}^2(t) = 2D_0 t, \quad \sigma_{xy}^2(t) = 2D_0 t (1 + \alpha t).$$

Задача 11.4. Получить уравнение для совместной плотности вероятностей поля плотности и его пространственного градиента в случае гауссова, однородного и изотропного в пространстве и стационарного, дельта-коррелированного во времени дивергентного поля скорости.

Решение.

Усредняя уравнение Лиувилля (3.24) на с. 78 по ансамблю реализаций поля скоростей, получаем уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = \left[D_0 \Delta + \frac{2}{d} D^p \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p}} \rho + D^p \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 + \frac{1}{d(d+2)} D^s \hat{L}^s(\mathbf{p}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{d(d+2)} D^p \hat{L}^p(\mathbf{p}) + \frac{2(d+1)}{d} D^p \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D_4^p \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \rho^2 \right] P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}), \quad (11.125)$$

где введены операторы

$$\begin{aligned}\widehat{L}^s(\mathbf{p}) &= (d+1)\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2}\mathbf{p}^2 - 2\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{p} - 2\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{p}\right)^2 = (d+1)\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2}\mathbf{p}^2 - 2\frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l}p_k p_l, \\ \widehat{L}^p(\mathbf{p}) &= \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2}\mathbf{p}^2 + (d^2 + 4d + 6)\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{p}\right)^2 + (d^2 + 2d + 2)\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{p},\end{aligned}$$

а коэффициенты диффузии D_0 , D^p и D^s описываются формулами (4.53) и (4.58) на с. 107. Для бездивергентного поля скоростей ($D^p = 0$) уравнение (11.125) упрощается и принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0\Delta\right)P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) = \frac{1}{d(d+2)}D^s\widehat{L}^s(\mathbf{p})P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}). \quad (11.126)$$

Задача 11.5. Получить уравнение Фоккера–Планка для градиента плотности частицы в бездивергентном случайном поле скоростей для двумерного линейного сдвигового среднего потока $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = \alpha y \mathbf{l}$, где $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{l} = (1, 0)$.

Указание. В лагранжевом описании градиент плотности частицы в бездивергентном поле скоростей описывается уравнением

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}p_x(t|\mathbf{r}_0) &= -p_k(t|\mathbf{r}_0)\frac{\partial u_k(\mathbf{r}, t)}{\partial x}, \\ \frac{d}{dt}p_y(t|\mathbf{r}_0) &= -\alpha p_x(t|\mathbf{r}_0) - p_k(t|\mathbf{r}_0)\frac{\partial u_k(\mathbf{r}, t)}{\partial y}, \\ \mathbf{p}(0|\mathbf{r}_0) &= \mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0) = \nabla \rho_0(\mathbf{r}_0).\end{aligned}$$

Решение.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(\mathbf{p}, t|\mathbf{r}_0) &= \left\{ \alpha p_x \frac{\partial}{\partial p_y} + \frac{1}{8}D^s \left(3\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2}\mathbf{p}^2 - 2\frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l}p_k p_l \right) \right\} P(\mathbf{p}, t|\mathbf{r}_0), \\ P(\mathbf{p}, 0|\mathbf{r}_0) &= \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0)).\end{aligned} \quad (11.127)$$

Задача 11.6. Исходя из уравнения (11.127) изучить поведение статистических характеристик градиента плотности частицы в бездивергентном случайном поле скоростей для двумерного линейного сдвигового среднего потока $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = \alpha y \mathbf{l}$, где $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{l} = (1, 0)$.

Решение. Среднее значение градиента поля плотности примеси соответствует решению задачи при отсутствии флуктуаций поля скоростей

$$\langle p_x(t) \rangle = p_x(0), \quad \langle p_y(t) \rangle = p_y(0) - \alpha p_x(0)t.$$

Вторые моменты градиента описываются замкнутой системой уравнений, характеристическое уравнение для которого относительно параметра λ имеет вид кубического уравнения

$$\left(\lambda + \frac{1}{2}D^s\right)^2(\lambda - D^s) = \frac{3}{2}\alpha^2 D^s$$

корни которого существенно зависят от параметра α/D^s . Для малых значений $\alpha/D^s \ll 1$ для корней уравнения имеем приближенные решения

$$\lambda_1 = D^s + \frac{2\alpha^2}{3D^s}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}D^s + i|\alpha|, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}D^s - i|\alpha|.$$

Следовательно, в диапазоне времен $D^s t \gg 2$ решение задачи полностью определяется случайным фактором. Это означает, что эффекты, связанные с флуктуациями поля скоростей, полностью доминируют над эффектами, связанными со слабым градиентом линейного сдвига. В другом предельном случае $\alpha/D^s \gg 1$ для корней уравнения получаем выражения

$$\lambda_1 = \left(\frac{3}{2}\alpha^2 D^s\right)^{1/3}, \quad \lambda_2 = \left(\frac{3}{2}\alpha^2 D^s\right)^{1/3} e^{i(2/3)\pi}, \quad \lambda_3 = \left(\frac{3}{2}\alpha^2 D^s\right)^{1/3} e^{-i(2/3)\pi}.$$

Так как действительные части λ_2 и λ_3 отрицательны, то при $\left(\frac{3}{2}\alpha^2 D^s\right)^{1/3} t \gg 1$ асимптотическое решение системы для вторых моментов имеет вид

$$\langle p^2(t) \rangle \sim \exp\left\{\left(\frac{3}{2}\alpha^2 D^s\right)^{1/3} t\right\},$$

и, следовательно, даже малые флуктуации поля скоростей являются определяющими в присутствии сильного градиента сдвигового потока.

Задача 11.7. Получить уравнение для совместной эйлеровой плотности вероятностей поля плотности и его градиента в случайном бездивергентном поле скоростей для двумерного плоскопараллельного потока $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = \alpha y \mathbf{l}$, где $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{l} = (1, 0)$.

Решение.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) &= \left[-\alpha y \frac{\partial}{\partial x} + D_0\Delta\right]P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}) + \\ &+ \left\{ \alpha p_x \frac{\partial}{\partial p_y} + \frac{1}{8}D^s \left(3\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2}\mathbf{p}^2 - 2\frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l}p_k p_l \right) \right\} P(\mathbf{r}, t; \rho, \mathbf{p}).\end{aligned}$$

Решение этого уравнения можно записать в виде интеграла (11.58) на с. 260, где лагранжевы плотности вероятностей $P(\mathbf{r}, t|\mathbf{r}_0)$ и $P(\mathbf{p}, t|\mathbf{r}_0)$ описываются уравнениями (11.122) и (11.127).

О черк 12

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

12.1. Общие замечания

Задача о распространении плоских волн в слоистых средах описывается одномерной краевой задачей и традиционно привлекает внимание многих исследователей. Это обусловлено, с одной стороны, ее простотой по сравнению с аналогичными задачами для двух и трех измерений, а с другой стороны, ее важностью для понимания процесса распространения волн в случайных средах. Учитывая, что одномерная задача допускает точное асимптотическое решение, можно проследить на ней влияние различных моделей, параметров среды и краевых условий на статистические характеристики волнового поля.

В одномерном случае постановка задачи описана в первой главе.

12.1.1. Падение волны на слой неоднородной среды

Пусть слой неоднородной среды занимает часть пространства $L_0 < x < L$. Плоская волна с единичной амплитудой падает на него из области $x > L$. Волновое поле в слое неоднородной среды описывается уравнением Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + k^2(x)u(x) = 0, \quad (12.1)$$

где $k^2(x) = k^2[1 + \varepsilon(x)]$, а функция $\varepsilon(x)$ описывает неоднородности среды.

В простейшем случае несогласованной границы предполагается, что $k(x) = k$, т. е., $\varepsilon(x) = 0$ вне слоя среды, а внутри слоя

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + i\gamma$$

где $\varepsilon_1(x)$ — действительная часть, ответственная за рассеяние волны в среде, а $\gamma \ll 1$ — мнимая часть, описывающая поглощение волны в среде.

Краевыми условиями для уравнения (12.1) являются условия непрерывности функции $u(x)$ и ее производной $\frac{d}{dx}u(x)$ на границах слоя, которые можно записать в виде

$$\left(1 + \frac{i}{k} \frac{d}{dx}\right)u(x)\Big|_{x=L} = 2, \quad \left(1 - \frac{i}{k} \frac{d}{dx}\right)u(x)\Big|_{x=L_0} = 0. \quad (12.2)$$

Из уравнения (12.1) при $x < L$ следует равенство

$$k\gamma I(x) = \frac{d}{dx}S(x), \quad (12.3)$$

где плотность потока энергии — $S(x)$ определяется равенством

$$S(x) = \frac{i}{2k} \left[u(x) \frac{d}{dx}u^*(x) - u^*(x) \frac{d}{dx}u(x) \right],$$

а интенсивность волнового поля — $I(x) = |u(x)|^2$. При этом

$$S(L) = 1 - |R_L|^2, \quad S(L_0) = |T_L|^2,$$

где R_L — комплексный коэффициент отражения волны от слоя среды, а T_L — комплексный коэффициент прохождения волны. Следовательно, интегрируя (12.3) по пространству неоднородной среды, получаем равенство

$$|R_L|^2 + |T_L|^2 + k\gamma \int_{L_0}^L dx I(x) = 1. \quad (12.4)$$

Если затухание волны в среде отсутствует ($\gamma = 0$), то сохранение плотности потока энергии выражается равенством

$$|R_L|^2 + |T_L|^2 = 1.$$

Краевую задачу (12.1), (12.2) с помощью метода погружения можно переформулировать с самого начала в виде динамической задачи с начальными условиями по параметру L — геометрическому положению правой границы слоя, рассматривая решение этих задач как функции этого параметра. Так коэффициент отражения R_L удовлетворяет при этом уравнению Риккати

$$\frac{d}{dL}R_L = 2ikR_L + \frac{ik}{2}\varepsilon(L)(1 + R_L)^2, \quad R_{L_0} = 0, \quad (12.5)$$

а волновое поле в слое среды $u(x) \equiv u(x; L)$ описывается линейным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial L}u(x; L) = ik u(x; L) + \frac{ik}{2}\varepsilon(L)(1 + R_L)u(x; L), \quad u(x; x) = 1 + R_x. \quad (12.6)$$

Из уравнений (12.5) и (12.6) следуют уравнения для квадрата модуля коэффициента отражения $W_L = |R_L|^2$ и интенсивности волнового поля $I(x; L) = |u(x; L)|^2$ вида

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL}W_L &= -\frac{k\gamma}{2} [4W_L + (R_L + R_L^*)(1 + W_L)] - \frac{ik}{2}\varepsilon_1(L)(R_L - R_L^*)(1 - W_L), \\ W_{L_0} &= 0, \end{aligned} \quad (12.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L}I(x; L) &= -\frac{k\gamma}{2} (2 + R_L + R_L^*)I(x; L) + \frac{ik}{2}\varepsilon_1(L)(R_L - R_L^*)I(x; L), \\ I(x; x) &= |1 + R_x|^2, \end{aligned}$$

которые можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} \ln(1 - W_L) &= -\frac{k\gamma}{2} \frac{4W_L + (R_L + R_L^*)(1 + W_L)}{1 - W_L} - \frac{ik}{2} \varepsilon_1(L) (R_L - R_L^*), \\ \frac{\partial}{\partial L} \ln I(x, L) &= -\frac{k\gamma}{2} (2 + R_L + R_L^*) - \frac{ik}{2} \varepsilon_1(L) (R_L - R_L^*). \end{aligned} \quad (12.8)$$

Исключая из (12.8) члены, связанные с функцией $\varepsilon_1(L)$, получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial L} \ln \frac{I(x, L)}{1 - W_L} = -k\gamma \frac{|1 + R_L|^2}{1 - W_L}.$$

При отсутствии в среде поглощения уравнение (12.8) для интенсивности волнового поля интегрируется, и интенсивность волнового поля внутри неоднородной среды простым образом связана с коэффициентом отражения волны от слоя среды

$$I(x; L) = \frac{|1 + R_x|^2 (1 - W_L)}{1 - W_x}. \quad (12.9)$$

12.1.2. Источник внутри слоя неоднородной среды

Аналогичным образом, поле точечного источника, расположенного в слое случайно неоднородной среды, описывается краевой задачей для функции Грина уравнения Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x; x_0) + k^2 [1 + \varepsilon(x)] G(x; x_0) = 2ik\delta(x - x_0), \quad (12.10)$$

$$\left(\frac{d}{dx} + ik \right) G(x; x_0) \Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left(\frac{d}{dx} - ik \right) G(x; x_0) \Big|_{x=L} = 0.$$

Отметим, что положение источника на границе слоя $x_0 = L$ соответствует краевой задаче (12.1), (12.2) о падении волны на слой среды, т. е.

$$G(x; L) = u(x; L).$$

Решение краевой задачи (12.10) имеет структуру

$$G(x; x_0) = G(x_0; x_0) \begin{cases} \exp \left[ik \int_x^{x_0} \psi_1(\xi) d\xi \right], & x_0 \geq x, \\ \exp \left[ik \int_{x_0}^x \psi_2(\xi) d\xi \right], & x_0 \leq x, \end{cases} \quad (12.11)$$

где поле в точке расположения источника, в силу условия скачка производной

$$\frac{dG(x; x_0)}{dx} \Big|_{x=x_0+0} - \frac{dG(x; x_0)}{dx} \Big|_{x=x_0-0} = 2ik,$$

определяется выражением

$$G(x_0; x_0) = \frac{2}{\psi_1(x_0) + \psi_2(x_0)}$$

а функции $\psi_i(x)$ описываются уравнениями Риккати

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \psi_1 &= ik \left[\psi_1^2 - 1 - \varepsilon(x) \right], & \psi_1(L_0) &= 1, \\ \frac{d}{dx} \psi_2 &= -ik \left[\psi_2^2 - 1 - \varepsilon(x) \right], & \psi_2(L) &= 1. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Вместо функций $\psi_i(x)$ введем новые функции $R_i(x)$ с помощью равенств

$$\psi_i(x) = \frac{1 - R_i(x)}{1 + R_i(x)}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда волновое поле в области $x < x_0$ может быть записано в виде

$$G(x; x_0) = \frac{[1 + R_1(x_0)][1 + R_2(x_0)]}{1 - R_1(x_0)R_2(x_0)} \exp \left[ik \int_x^{x_0} d\xi \frac{1 - R_1(\xi)}{1 + R_1(\xi)} \right], \quad (12.13)$$

где величина $R_1(L) = R_L$ — коэффициент отражения плоской волны, падающей на слой среды из области $x > L$. Аналогичным образом величина $R_2(x_0)$ — коэффициент отражения волны падающей на слой среды (x_0, L) из однородного полупространства $x < x_0$ (т. е. при $\varepsilon = 0$).

Задача с абсолютно отражающими границами, на которых поле $G(x; x_0)$ или $\frac{d}{dx} G(x; x_0)$ обращаются в нуль, имеют большое прикладное значение. Так, в последнем случае, для источника плоских волн, расположенного на этой границе, имеем $R_2(x_0) = 1$, и, следовательно,

$$G_{\text{ref}}(x; x_0) = \frac{2}{1 - R_1(x_0)} \exp \left[ik \int_x^{x_0} d\xi \frac{1 - R_1(\xi)}{1 + R_1(\xi)} \right], \quad x \leq x_0. \quad (12.14)$$

Из уравнения (12.10) при $x < x_0$ вытекает также равенство для интенсивности волнового поля $I(x; x_0) = |G(x; x_0)|^2$

$$k\gamma I(x; x_0) = \frac{d}{dx} S(x; x_0), \quad (12.15)$$

где плотность потока энергии — $S(x; x_0)$ определяется равенством

$$S(x; x_0) = \frac{i}{2k} \left[G(x; x_0) \frac{d}{dx} G^*(x; x_0) - G^*(x; x_0) \frac{d}{dx} G(x; x_0) \right].$$

Используя выражение (12.13), можно представить $S(x; x_0)$ в виде ($x \leq x_0$)

$$S(x; x_0) = S(x_0; x_0) \exp \left[-k\gamma \int_x^{x_0} d\xi \frac{|1 + R_1(\xi)|^2}{1 - |R_1(\xi)|^2} \right],$$

где плотность потока энергии в точке расположения источника

$$S(x_0; x_0) = \frac{[1 - |R_1(x_0)|^2][1 + R_2(x_0)]^2}{|1 - R_1(x_0)R_2(x_0)|^2}. \quad (12.16)$$

Далее нас будет интересовать статистические задачи о падении волны на полупространство случайно-неоднородной среды ($L_0 \rightarrow -\infty$) и источник в неограниченном пространстве ($L_0 \rightarrow -\infty, L \rightarrow \infty$) при достаточно малом поглощении ($\gamma \rightarrow 0$). Из выражения (12.15) видно, вообще говоря эти предельные переходы не перестановочны. Действительно, если $\gamma = 0$, то имеет место сохранение плотности потока энергии $S(x; x_0)$ во всем полупространстве $x < x_0$. В присутствии малого конечного поглощения, однако, интегрируя равенство (12.15) по полупространству $x < x_0$, получаем ограничение на значение энергии, сосредоточенной в этом полупространстве,

$$k\gamma \int_{-\infty}^{x_0} dx I(x; x_0) = S(x_0; x_0) = \frac{[1 - |R_1(x_0)|^2] |1 + R_2(x_0)|^2}{|1 - R_1(x_0) R_2(x_0)|^2}. \quad (12.17)$$

Представляет интерес три простейшие статистические задачи:

- Падение волны на слой среды (конечный и полупространство);
- Источник волн внутри слоя среды (неограниченное пространство);
- Влияние границ на статистические характеристики волнового поля.

Все эти задачи удастся решить в полном объеме аналитическими методами. Также легко в этом случае осуществить численное моделирование и провести сопоставление результатов с аналитическими результатами.

Будем считать, что $\varepsilon_1(x)$ — гауссов дельта-коррелированный случайный процесс с параметрами

$$\langle \varepsilon_1(L) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_1(L) \varepsilon_1(L') \rangle = B_\varepsilon(L - L') = 2\sigma_\varepsilon^2 l_0 \delta(L - L'), \quad (12.18)$$

где $\sigma_\varepsilon^2 \ll 1$ — дисперсия, а l_0 — радиус корреляции для случайной функции $\varepsilon_1(L)$. Такая аппроксимация означает, что переход к асимптотическому случаю $l_0 \rightarrow 0$ в точном решении задачи с конечным радиусом корреляции l_0 , приводит к результатам, совпадающим с решением статистической задачи с параметрами (12.18).

В силу малости параметра σ_ε^2 , все статистические эффекты могут быть разделены на два типа — локальные и накапливающиеся, из-за эффекта многократного переотражения волны в среде. Нас будут интересовать последние.

Из постановки краевых волновых задач на основе метода погружения, видно, что существует два типа характеристик волнового поля, представляющих непосредственный интерес. Первый тип величин связан со значениями волнового поля на границах слоя (коэффициенты отражения и прохождения R_L, T_L), поле в точке местонахождения источника $G(x_0; x_0)$, плотность потока энергии в точке нахождения точечного источника $S(x_0; x_0)$, и т.д. Второй тип величин связан с определением статистических характеристик интенсивности волнового поля внутри слоя среды, что и является предметом статистической теории переноса излучения.

12.2. Статистическое описание волнового поля на границах слоя среды

12.2.1. Коэффициенты отражения и прохождения волны

Комплексный коэффициент отражения волны от слоя среды описывается замкнутым уравнением — уравнением Риккати (12.5).

Введем модуль коэффициента отражения через $-\sqrt{W_L}$, т. е. положим

$$R_L = \sqrt{W_L} \exp\{i\phi_L\},$$

где ϕ_L — фаза коэффициента отражения. Тогда, исходя из уравнения (12.5), для величины W_L — квадрата модуля коэффициента отражения и его фазы получаем систему уравнений

$$\frac{d}{dL} W_L = -2k\gamma W_L + k\varepsilon_1(L) \sqrt{W_L} (1 - W_L) \sin \phi_L, \quad W_{L_0} = 0, \quad (12.19)$$

$$\frac{d}{dL} \phi_L = 2k + k\varepsilon_1(L) \left\{ 1 + \frac{1 + W_L}{2\sqrt{W_L}} \cos \phi_L \right\}, \quad \phi_{L_0} = 0.$$

Быстро осциллирующие функции в диссипативных членах, не вносящие вклада в накапливающиеся эффекты, опущены в системе уравнений (12.19) (сравни с уравнением (12.7)).

Введем индикаторную функцию

$$\varphi(L; W) = \delta(W_L - W),$$

которая описывается уравнением Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial L} \varphi(L; W) = 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} \{W \varphi(L; W)\} - k\varepsilon_1(L) \frac{\partial}{\partial W} \left\{ \sqrt{W} (1 - W) \sin \phi_L \varphi(L; W) \right\}. \quad (12.20)$$

Усредним это уравнение по ансамблю реализаций функции $\varepsilon_1(L)$ и воспользуемся формулой Фурутцу–Новикова (8.10) на с. 177 для расщепления корреляций, которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$\langle \varepsilon_1(L) F[L, L_0; \varepsilon_1(x)] \rangle = \int_{L_0}^L dL' B_\varepsilon(L - L') \left\langle \frac{\delta}{\delta \varepsilon_1(L')} F[L, L_0; \varepsilon_1(x)] \right\rangle. \quad (12.21)$$

Эта формула справедлива для произвольного функционала $F[L, L_0; \varepsilon_1(x)]$ случайного процесса $\varepsilon_1(x)$ при $L_0 \leq x \leq L$. Для гауссова дельта-коррелированного процесса $\varepsilon_1(x)$ с параметрами (12.18) формула (12.21) упрощается и принимает вид

$$\langle \varepsilon_1(L) F[L, L_0; \varepsilon_1(x)] \rangle = \sigma_\varepsilon^2 l_0 \left\langle \frac{\delta}{\delta \varepsilon_1(L - 0)} F[L, L_0; \varepsilon_1(x)] \right\rangle. \quad (12.22)$$

В результате для плотности вероятностей квадрата модуля коэффициента отражения $P(L, W) = \langle \varphi(L, W) \rangle$ в общем случае получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(L, W) = 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} \{WP(L, W)\} - k \frac{\partial}{\partial W} \int_{L_0}^L dL' B_\varepsilon(L - L') \sqrt{W} (1 - W) \times \\ \times \left\langle \cos \phi_L \frac{\delta \phi_L}{\delta \varepsilon_1(L')} \varphi(L, W) + \sin \phi_L \frac{\delta \varphi(L, W)}{\delta \varepsilon_1(L')} \right\rangle, \end{aligned} \quad (12.23)$$

где $B_\varepsilon(L - L')$ — корреляционная функция случайного процесса $\varepsilon_1(L)$. Подставляя теперь в это уравнение функцию вида (12.18) и учитывая равенства

$$\begin{aligned} \frac{\delta \varphi(L, W)}{\delta \varepsilon_1(L - 0)} = -k \frac{\partial}{\partial W} \left\{ \sqrt{W} (1 - W) \sin \phi_L \varphi(L, W) \right\}, \\ \frac{\delta \phi_L}{\delta \varepsilon_1(L - 0)} = k \left\{ 1 + \frac{1 + W_L}{2\sqrt{W_L}} \cos \phi_L \right\}, \end{aligned}$$

вытекающие непосредственно из уравнений (12.20) и (12.19), получаем для плотности вероятностей $P(L, W)$ незамкнутое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(L, W) = 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} \{WP(L, W)\} - \\ - k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0 \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \left\langle \left[\sqrt{W} \cos \phi_L + \frac{1}{2} (1 + W) \cos^2 \phi_L \right] \varphi(L, W) \right\rangle + \\ + k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0 \frac{\partial}{\partial W} \left\{ \sqrt{W} (1 - W) \frac{\partial}{\partial W} \left[\sqrt{W} (1 - W) \langle \sin^2 \phi_L \varphi(L, W) \rangle \right] \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что фаза коэффициента отражения имеет структуру

$$\phi_L = k(L - L_0) + \tilde{\phi}_L,$$

т. е. быстро меняется на расстояниях порядка длины волны, можно дополнительно усреднить это уравнение по быстрым осцилляциям, что справедливо при естественном ограничении $k/D \gg 1$, и мы приходим к уравнению Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(L; W) = 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} WP(L; W) - 2D \frac{\partial}{\partial W} W (1 - W) P(L; W) + \\ + D \frac{\partial}{\partial W} W (1 - W)^2 \frac{\partial}{\partial W} P(L; W), \quad P(L_0, W) = \delta(W - 1) \end{aligned} \quad (12.24)$$

с коэффициентом диффузии

$$D = \frac{k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0}{2}.$$

В ряде случаев оказывается более удобным представлять величину W_L в виде

$$W_L = \frac{u_L - 1}{u_L + 1}, \quad u_L = \frac{1 + W_L}{1 - W_L}, \quad u_L \geq 1. \quad (12.25)$$

Тогда величина u_L описывается стохастической системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} u_L = -k\gamma (u_L^2 - 1) + k\varepsilon_1(L) \sqrt{u_L^2 - 1} \sin \phi_L, \quad u_{L_0} = 1, \\ \frac{d}{dL} \phi_L = 2k + k\varepsilon_1(L) \left\{ 1 + \frac{u_L}{\sqrt{u_L^2 - 1}} \cos \phi_L \right\}, \quad \phi_{L_0} = 0, \end{aligned}$$

и для плотности вероятностей случайной величины $u_L - P(L; u) = \langle \delta(u_L - u) \rangle$ получаем уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial L} P(L; u) = k\gamma \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) P(L; u) + D \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} P(L; u). \quad (12.26)$$

Отметим, что обратная величина к коэффициенту диффузии, определяющая естественный масштаб длины, связанный со случайными неоднородностями среды, обычно называется *длиной локализации*, т. е.

$$l_{\text{loc}} = 1/D.$$

Далее, при анализе статистических характеристик волнового поля, мы увидим, что именно эта величина определяет масштаб *динамической локализации волн* в отдельных реализациях волнового поля, несмотря на то, что в ряде случаев *статистическая локализация*, связанная со статистическими характеристиками волнового поля, может и не осуществляться.

Недиссипативная среда

Если поглощение в среде отсутствует (т. е. $\gamma = 0$), то уравнение (12.26) для безразмерной толщины слоя $\eta = D(L - L_0)$ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \eta} P(\eta; u) = \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} P(\eta; u), \quad P(0; u) = \delta(u - 1). \quad (12.27)$$

Его решение легко получить, используя интегральное *преобразование Мелера-Фока*, в виде

$$P(\eta, u) = \int_0^\infty d\mu \mu \tanh(\pi\mu) \exp \left\{ - \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) \eta \right\} P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(u), \quad (12.28)$$

где $P_{-1/2+i\mu}(x)$ — функция Лежандра первого порядка (функция конуса).

Учитывая, что

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)^n} P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(x) = \frac{\pi}{\cosh(\mu\pi)} K_n(\mu),$$

где

$$K_{n+1}(\mu) = \frac{1}{2n} \left[\mu^2 + \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \right] K_n(\mu), \quad K_1(\mu) = 1,$$

из представления (12.28), можно вычислить статистические характеристики коэффициентов отражения $W_L = |R_L|^2$ и прохождения $|T_L|^2 = 1 - |R_L|^2 = 2/(1 + u_L)$ и, в

частности, получить выражение для моментов квадрата модуля коэффициента прохождения

$$\langle |T_L|^{2n} \rangle = 2^n \pi \int_0^\infty d\mu \frac{\mu \sinh(\mu\pi)}{\cosh^2(\mu\pi)} K_n(\mu) e^{-(\mu^2+1/4)\eta}. \quad (12.29)$$

График зависимости величин $\langle W_L \rangle = \langle |R_L|^2 \rangle$ и $\langle |T_L|^2 \rangle = 1 - \langle |R_L|^2 \rangle$ от толщины слоя приведен на рис. 12.1.

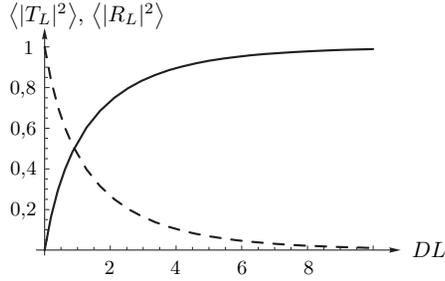


Рис. 12.1. Зависимости величин $\langle |R_L|^2 \rangle$ и $\langle |T_L|^2 \rangle$ от толщины слоя

При достаточно большой толщине слоя, а именно $\eta = D(L-L_0) \gg 1$, для моментов модуля коэффициента прохождения из (12.29) следует асимптотическая формула

$$\langle |T_L|^{2n} \rangle \approx \frac{[(2n-3)!!]^2 \pi^2 \sqrt{\pi}}{2^{2n-1} (n-1)!} \frac{1}{\eta \sqrt{\eta}} e^{-\eta/4},$$

и, следовательно, асимптотическая зависимость любого момента модуля коэффициента прохождения $|T_L|$ от толщины слоя имеет универсальную зависимость (меняется лишь численный коэффициент).

Стремление к нулю всех моментов величины $|T_L|$ с увеличением толщины слоя означает, что $|R_L| \rightarrow 1$ с вероятностью единица, т.е. *полупространство случайно-неоднородной недиссипативной слоистой среды полностью отражает падающую на нее волну*. Очевидно, что это явление не зависит от статистической модели среды и от условия справедливости описания с помощью дополнительного усреднения по быстрым осцилляциям, связанным с фазой коэффициента отражения.

В приближении дельта-коррелированности случайного процесса $\varepsilon_1(L)$ случайные процессы W_L и u_L — очевидно, марковские процессы по параметру L . При этом плотность вероятностей перехода

$$p(u, L|u', L') = \langle \delta(u_L - u|u_{L'} = u') \rangle$$

описывается очевидно также уравнением (12.27), т.е.

$$\frac{\partial}{\partial L} p(u, L|u', L') = D \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} p(u, L|u', L')$$

с начальным условием

$$p(u, L'|u', L') = \delta(u - u'),$$

решение которого

$$p(u, L|u', L') = \int_0^\infty d\mu \mu \tanh(\pi\mu) e^{-D(\mu^2+1/4)(L-L')} P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(u) P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(u'). \quad (12.30)$$

При $L' = L_0$ и $u' = 1$ выражение (12.30) переходит в одноточечную плотность вероятностей (12.28).

Диссипативная среда

При наличии поглощения в среде уравнения (12.24) и (12.26) не могут быть решены аналитически для слоя конечной толщины. Однако, для полупространства ($L_0 \rightarrow -\infty$) существует «стационарная» плотность вероятностей для величин W_L и u_L , не зависящая от L и удовлетворяющая уравнениям

$$2(\beta - 1 + W) P(W) + (1 - W)^2 \frac{d}{dW} P(W) = 0, \quad 0 < W < 1, \quad (12.31)$$

$$\beta P(u) + \frac{d}{du} P(u) = 0, \quad u > 1,$$

где $\beta = k\gamma/D$ — безразмерный коэффициент поглощения.

Решения уравнений (12.31) имеют вид

$$P(W) = \frac{2\beta}{(1-W)^2} \exp\left\{-\frac{2\beta W}{1-W}\right\}, \quad P(u) = \beta e^{-\beta(u-1)} \quad (12.32)$$

и график функции $P(W)$ представлен на рис. 12.2 для различных значений параметра β .

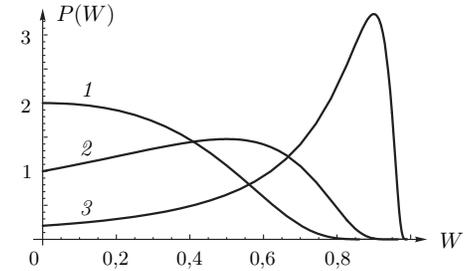


Рис. 12.2. Плотность вероятностей для квадрата модуля коэффициента отражения $P(W)$. Кривая 1 соответствует параметру $\beta = 1$; 2 — $\beta = 0,5$; 3 — $\beta = 0,1$

Физический смысл плотности вероятностей (12.32) очевиден, она описывает статистические свойства коэффициента отражения от достаточно протяженного хаотически неоднородного слоя, до конца которого падающая волна не проникает вследствие ее динамического поглощения средой.

С помощью распределений (12.32) можно вычислить все моменты величины $W_L = |R_L|^2$. Так для среднего значения квадрата модуля коэффициента отражения получаем

$$\langle W \rangle = \int_0^1 dW W P(W) = \int_1^\infty du \frac{u-1}{u+1} P(u) = 1 + 2\beta e^{2\beta} \text{Ei}(-2\beta),$$

где $\text{Ei}(-x) = -\int_x^\infty \frac{dt}{t} e^{-t}$ ($x > 0$) — интегральная показательная функция. Учитывая асимптотические разложения для функции $\text{Ei}(-x)$

$$\text{Ei}(-x) = \begin{cases} \ln x & (x \ll 1), \\ -e^{-x} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) & (x \gg 1), \end{cases}$$

получаем асимптотические разложения для величины $\langle W \rangle = \langle |R_L|^2 \rangle$.

$$\langle W \rangle \approx \begin{cases} 1 - 2\beta \ln(1/\beta), & \beta \ll 1, \\ 1/2\beta, & \beta \gg 1. \end{cases} \quad (12.33)$$

Для нахождения высших моментов величины $W_L = |R_L|^2$, умножим первое уравнение в (12.31) на W^n и проинтегрируем по W от 0 до 1. В результате получаем рекуррентное соотношение

$$n \langle W^{n+1} \rangle - 2(\beta + n) \langle W^n \rangle + n \langle W^{n-1} \rangle = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (12.34)$$

с помощью которого можно последовательно вычислить все старшие моменты. Так для $n = 1$, получаем

$$\langle W^2 \rangle = 2(\beta + 1) \langle W \rangle - 1.$$

Переход к «стационарному» распределению вероятностей можно осуществить не только предельным переходом $L_0 \rightarrow -\infty$, но и переходом $L \rightarrow \infty$. Уравнение (12.24) решалось численно для двух значений параметра $\beta = 1, 0$ и $\beta = 0, 08$ для различных начальных условий. По найденному решению вычислялись величины $\langle W_L \rangle$, $\langle W_L^2 \rangle$, графики поведения которых в зависимости от безразмерной толщины слоя $\eta = D(L - L_0)$ представлены на рис. 12.3.

Из графиков видно, что при $\beta \geq 1$ распределение вероятностей выходит на свое «стационарное» распределение довольно быстро ($\eta \sim 1, 5$), в случае же $\beta = 0, 08$ (большая «стохастичность» задачи) $\eta \geq 5$.

Отметим, что для рассматриваемой задачи плотность потока энергии и интенсивность волнового поля на границе слоя $x = L$ связаны с коэффициентом отражения. И, следовательно, при условии $\beta \ll 1$ имеем:

$$\langle S(L, L) \rangle = 1 - \langle W_L \rangle = 2\beta \ln(1/\beta), \quad \langle I(L, L) \rangle = 1 + \langle W_L \rangle = 2. \quad (12.35)$$

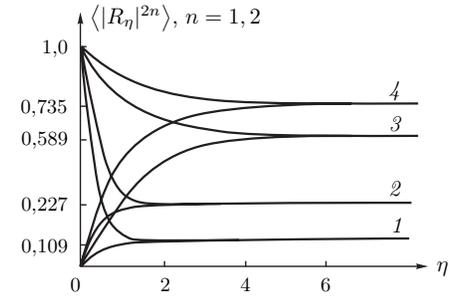


Рис. 12.3. Графики зависимости статистических характеристик $W_L = |R_L|^2$: кривые 1, 2, — первый и второй моменты при $\beta = 1$, кривые 3, 4 — первый и второй моменты при $\beta = 0,08$

Учитывая, что для полупространства случайно-неоднородной среды $|T_L| = 0$, для энергии волнового поля, заключенного в этом полупространстве,

$$E = D \int_{-\infty}^L dx I(x; L),$$

исходя из равенства (12.4) получаем распределение вероятностей вида

$$P(E) = \beta P(W)_{W=(1-\beta E)} = \frac{2}{E^2} \exp\left\{-\frac{2}{E}(1-\beta E)\right\} \theta(1-\beta E), \quad (12.36)$$

и, в частности, например, при $\beta \ll 1$

$$\langle E \rangle = 2 \ln(1/\beta). \quad (12.37)$$

Отметим, что распределение вероятностей (12.36) допускает предельный переход $\beta = 0$, в результате которого получаем предельную плотность вероятностей

$$P(E) = \frac{2}{E^2} \exp\left\{-\frac{2}{E}\right\}, \quad (12.38)$$

затухающую степенным образом для больших значений энергии E , с интегральной функцией распределения

$$F(E) = \exp\left\{-\frac{2}{E}\right\}.$$

Следствием (12.38) является то, что все моменты полной энергии волнового поля равны бесконечности. И в то же время существует конечная вероятность ограничения полной энергии произвольной величиной в отдельных реализациях волнового поля.

12.2.2. Источник внутри среды

Для источника плоских волн, находящегося внутри среды, волновое поле и плотность потока энергии в точке расположения источника описываются формулами (12.13) и (12.16). Для модели дельта-коррелированных флуктуаций $\varepsilon_1(x)$ величины $R_1(x_0)$ и $R_2(x_0)$ статистически независимы, так как они описываются динамическими уравнениями в неперекрывающихся частях пространства. Для неограниченного пространства ($L_0 \rightarrow -\infty$, $L \rightarrow \infty$) плотности вероятностей для величин $R_1(x_0)$ и $R_2(x_0)$ описываются формулой (12.32) и, следовательно, для средней интенсивности волнового поля в точке расположения источника и среднего значения плотности потока энергии в точке расположения источника получаем выражение

$$\langle I(x_0; x_0) \rangle = 1 + \frac{1}{\beta}. \quad (12.39)$$

Неограниченный рост средней интенсивности в точке расположения источника при $\beta \rightarrow 0$ свидетельствует о накоплении энергии волны в хаотически слоистой среде, а в тоже время среднее значение плотности потока энергии в точке расположения источника $\langle S(x_0; x_0) \rangle = 1$ не зависит от флуктуаций параметра среды и совпадает с плотностью потока энергии в свободном пространстве.

Аналогичным образом, с помощью формул (12.14) и (12.16) для источника, расположенного на отражающей границе $x_0 = L$, получаем

$$\langle I_{\text{ref}}(L; L) \rangle = 4 \left(1 + \frac{2}{\beta} \right), \quad \langle S_{\text{ref}}(L; L) \rangle = 4, \quad (12.40)$$

т. е. среднее значение плотности потока энергии от источника, расположенного на отражающей границе, также не зависит от флуктуаций параметров среды и совпадает с плотностью потока энергии в свободном пространстве.

Отметим, что полученные выше формулы (12.39), (12.40), при $\beta \rightarrow 0$ обращаются в бесконечность, т. е. наличие поглощения в среде (хоть и сколь угодно малого) является регуляризирующим фактором в задаче о точечном источнике.

Используя равенство (12.17), можно получить распределение вероятностей для энергии волнового поля, в полупространстве

$$E = D \int_{-\infty}^{x_0} dx I(x; x_0).$$

В частности, для источника, находящегося на отражающей границе, получаем выражение

$$P_{\text{ref}}(E) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{E\sqrt{E}} \exp \left\{ -\frac{2}{E} \left(1 - \frac{\beta E}{4} \right)^2 \right\},$$

допускающее предельный переход $\beta \rightarrow 0$, аналогично случаю падения волны на полупространство случайно-неоднородной среды.

12.2.3. Статистическая локализация

Полученные выше равенства, связанные со значениями волнового поля в фиксированных точках пространства (на границе среды и в точке расположения источника) позволяют, в силу равенства (12.17), сделать некоторые общие заключения и о поведении средней интенсивности волнового поля внутри случайно-неоднородной среды.

Так, для средней энергии, содержащейся в полупространстве $(-\infty, x)$, из (12.17) следует выражение

$$\langle E \rangle = D \int_{-\infty}^{x_0} dx \langle I(x; x_0) \rangle = \frac{1}{\beta} \langle S(x_0; x_0) \rangle. \quad (12.41)$$

Следовательно, для падающей на полупространство $x \leq L$ плоской волны ($x_0 = L$), при условии $\beta \ll 1$ из (12.35) и (12.41) вытекают равенства

$$\langle E \rangle = 2 \ln(1/\beta), \quad \langle I(L; L) \rangle = 2. \quad (12.42)$$

Следовательно, большая часть средней энергии сосредоточена в части пространства

$$Dl_\beta \cong \ln(1/\beta),$$

т. е. осуществляется *статистическая локализация волнового поля*, связанная с поглощением волны. Отметим, что и при отсутствии флуктуаций параметров среды, также осуществляется локализация энергии на масштабах порядка длины поглощения $Dl_{\text{abs}} \cong 1/\beta$. Однако при выполнении условия $\beta \ll 1 - l_{\text{abs}} \gg l_\beta$. Если $\beta \rightarrow 0$, то величина $l_\beta \rightarrow \infty$ и в предельном случае непоглощающей среды, статистическая локализация волнового поля отсутствует.

Для источника в неограниченном пространстве, имеем

$$\langle E \rangle = \frac{1}{\beta}, \quad \langle I(x_0; x_0) \rangle = 1 + \frac{1}{\beta},$$

и, следовательно, в отличие от предыдущего случая, локализация средней энергии осуществляется на пространственном масштабе $D|x - x_0| \cong 1$ при $\beta \rightarrow 0$.

Аналогичным образом, для источника, расположенного на отражающей границе, имеем

$$\langle E \rangle = \frac{4}{\beta}, \quad \langle I_{\text{ref}}(L; L) \rangle = 4 \left(1 + \frac{2}{\beta} \right),$$

и, следовательно, локализация средней энергии осуществляется на вдвое меньшем пространственном масштабе $D(L - x) \cong 1/2$ при $\beta \rightarrow 0$.

В рассмотренных выше задачах, средняя энергия волнового поля существенно зависит от параметра β и стремится к бесконечности при условии $\beta \rightarrow 0$. Однако, это справедливо только для средних величин. Далее при анализе волнового поля внутри случайно-неоднородной среды мы убедимся, что даже при отсутствии поглощения в среде в отдельных реализациях волнового поля осуществляется *динамическая локализация*.

12.3. Статистическая теория переноса излучения

Перейдем теперь к статистическому описанию волнового поля внутри среды. Рассмотрим две задачи — о падении волны на слой среды и об источнике волн внутри среды.

12.3.1. Падение волны на слой среды

В общем случае при наличии поглощения в среде волновое поле описывается краевой задачей (12.1), (12.2) на с. 292. Волновое поле внутри среды может быть представлено в виде

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x), \quad \frac{d}{dx}u(x) = -ik[u_1(x) - u_2(x)],$$

где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — комплексные *встречные волны*. Они связаны с волновым полем с помощью соотношений

$$u_1(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{i}{k} \frac{d}{dx} \right] u(x), \quad u_1(L) = 1,$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{i}{k} \frac{d}{dx} \right] u(x), \quad u_2(L_0) = 0,$$

и, следовательно, краевую задачу (12.1), (12.2) можно переписать в виде

$$\left(\frac{d}{dx} + ik \right) u_1(x) = -\frac{ik}{2} \varepsilon(x) [u_1(x) + u_2(x)], \quad u_1(L) = 1,$$

$$\left(\frac{d}{dx} - ik \right) u_2(x) = -\frac{ik}{2} \varepsilon(x) [u_1(x) + u_2(x)], \quad u_2(L_0) = 0.$$

Волновое поле, как функция параметра L , описывается уравнением погружения (12.6) на с. 293. Очевидно, что и встречные волны также будут удовлетворять уравнениям (12.6), но с различными начальными условиями:

$$\frac{\partial}{\partial L} u_1(x; L) = ik \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L) \right) u_1(x; L), \quad u_1(x; x) = 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial L} u_2(x; L) = ik \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L) \right) u_2(x; L), \quad u_2(x; x) = R_x,$$

где коэффициент отражения R_L описывается уравнением (12.5) на с. 293.

Введем теперь интенсивности встречных волн $W_1(x; L) = |u_1(x; L)|^2$ и $W_2(x; L) = |u_2(x; L)|^2$, удовлетворяющие, очевидно, уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial L} W_1(x; L) = -k\gamma W_1(x; L) + \frac{ik}{2} \varepsilon(L) (R_L - R_L^*) W_1(x; L),$$

$$\frac{\partial}{\partial L} W_2(x; L) = -k\gamma W_2(x; L) + \frac{ik}{2} \varepsilon(L) (R_L - R_L^*) W_2(x; L), \quad (12.43)$$

$$W_1(x; x) = 1, \quad W_2(x; x) = |R_x|^2.$$

Величина $W_L = |R_L|^2$, входящая в начальное условие в (12.43) удовлетворяет уравнению (12.7) на с. 293 или уравнению

$$\frac{d}{dL} W_L = -2k\gamma W_L - \frac{ik}{2} \varepsilon_1(L) (R_L - R_L^*) (1 - W_L), \quad W_{L_0} = 0. \quad (12.44)$$

В уравнениях (12.43) и (12.44) опущены слагаемые в диссипативных членах, не вносящие вклада в накапливающиеся эффекты.

Будем по-прежнему считать $\varepsilon_1(x)$ гауссовым дельта-коррелированным случайным процессом с корреляционной функцией (12.18) на с. 296. В силу того, что уравнения (12.43), (12.44) — уравнения первого порядка с начальными условиями можно для совместной плотности вероятностей величин $W_1(x; L)$, $W_2(x; L)$ и W_L

$$P(x; L; W_1, W_2, W) = \langle \delta(W_1(x; L) - W_1) \delta(W_2(x; L) - W_2) \delta(W_L - W) \rangle$$

обычным образом получить уравнение Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial}{\partial L} P(x; L; W_1, W_2, W) =$$

$$= k\gamma \left(\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 + 2 \frac{\partial}{\partial W} W \right) P(x; L; W_1, W_2, W) +$$

$$+ D \left[\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right] P(x; L; W_1, W_2, W) +$$

$$+ D \left[\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right]^2 W P(x; L; W_1, W_2) \quad (12.45)$$

с начальным условием

$$P(x; x; W_1, W_2, W) = \delta(W_1 - 1) \delta(W_2 - W) P(x; W),$$

где функция $P(L; W)$ — плотность вероятностей квадрата модуля отражения W_L , описываемая уравнением (12.24) на с. 298. В уравнении (12.45), как и ранее, коэффициент диффузии $D = k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0 / 2$ и при выводе уравнения используется дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям, обусловленных решением задачи при $\varepsilon = 0$ — $u(x) \sim e^{\pm ikx}$.

Учитывая, что уравнения (12.43) для функций $W_n(x; L)$ линейны, можно перейти к производящей функции для моментов интенсивностей встречных волн:

$$Q(x; L; \mu, \lambda, W) = \int_0^1 dW_1 \int_0^1 dW_2 W_1^{\mu-\lambda} W_2^\lambda P(x; L; W_1, W_2, W), \quad (12.46)$$

удовлетворяющей более простому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial L} Q(x; L; \mu, \lambda, W) = -k\gamma \left(\mu - 2 \frac{\partial}{\partial W} W \right) Q(x; L; \mu, \lambda, W) -$$

$$- D \left[\mu + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right] Q(x; L; \mu, \lambda, W) +$$

$$+ D \left[\mu - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right]^2 W Q(x; L; \mu, \lambda, W), \quad (12.47)$$

с начальным условием

$$Q(x; \mu, \lambda, W) = W^\lambda P(x; W).$$

Зная функцию $Q(x; L; \mu, \lambda, W)$, можно определить моментные функции интенсивностей встречных волн с помощью равенства

$$\langle W_1^{\mu-\lambda}(x; L) W_2^\lambda(x; L) \rangle = \int_0^1 dW Q(x; L; \mu, \lambda, W). \quad (12.48)$$

Уравнение описывает статистическое поведение волнового поля внутри слоя среды $L_0 \leq x \leq L$ и, в частности, коэффициент прохождения волны, если в нем положить $x = L_0$. В предельном случае полупространства ($L_0 \rightarrow -\infty$) уравнение (12.47) переходит в уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} Q(\xi; \mu, \lambda, W) = & -\beta \left(\mu - 2 \frac{\partial}{\partial W} W \right) Q(\xi; \mu, \lambda, W) - \\ & - \left[\mu + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right] Q(\xi; \mu, \lambda, W) + \left[\mu - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right]^2 W Q(\xi; \mu, \lambda, W), \end{aligned} \quad (12.49)$$

с начальным условием

$$Q(0; \mu, \lambda, W) = W^\lambda P(W),$$

где введено безразмерное расстояние $\xi = D(L - x) > 0$, а «стационарная», не зависящая от L , плотность вероятностей для модуля коэффициента отражения $P(W)$ описывается формулой (12.32) на с. 301. Равенство (12.48) в этом случае переписывается в виде

$$\langle W_1^{\mu-\lambda}(\xi) W_2^\lambda(\xi) \rangle = \int_0^1 dW Q(\xi; \mu, \lambda, W). \quad (12.50)$$

Далее нам будет более удобно рассмотреть в отдельности случаи случайной среды без поглощения и случайной среды при наличии поглощения.

Недиссипативная среда (стохастический волновой параметрический резонанс и динамическая локализация волн)

Рассмотрим теперь уравнения для моментов интенсивности встречных волн при отсутствии поглощения волны в среде, т. е. уравнения (12.49) при $\beta = 0$ для полупространства ($L_0 \rightarrow -\infty$) случайно-неоднородной среды. В этом случае с вероятностью единица $W_L = 1$ и решение уравнения (12.49) имеет структуру

$$Q(x, L; \mu, \lambda, W) = \delta(W - 1) \exp\{D\lambda(\lambda - 1)(L - x)\},$$

и, следовательно,

$$\langle W_1^{\lambda-\mu}(x; L) W_2^\mu(x; L) \rangle = \exp\{D\lambda(\lambda - 1)(L - x)\}.$$

Это означает, в силу произвольности параметров λ и μ , что

$$W_1(x; L) = W_2(x; L) = W(x; L)$$

с вероятностью единица, и величина $W(x; L)$ имеет логнормальную плотность вероятностей. При этом, ее среднее значение равно единице, а высшие моменты, начиная со второго, экспоненциально растут вглубь среды

$$\langle W(x; L) \rangle = 1, \quad \langle W^n(x; L) \rangle = e^{Dn(n-1)(L-x)}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Отметим, что интенсивность волнового поля $I(x; L)$ в этом случае имеет структуру

$$I(x; L) = 2W(x; L) (1 + \cos \phi_x), \quad (12.51)$$

где ϕ_L — фаза коэффициента отражения.

По свойствам логнормального распределения вероятностей, согласно формуле (4.60) на с. 109, кривой типичной реализацией функции $W(x; L)$ является экспоненциально спадающая вглубь среды кривая

$$W^*(x; L) = e^{-D(L-x)}, \quad (12.52)$$

и эта функция связана с *ляпуновской экспонентой*.

Кроме того с вероятностью 1/2 для ее реализаций имеет место неравенство

$$W(x; L) < 4e^{-D(L-x)/2},$$

справедливое для всего полупространства.

Экспоненциальное спадание с ростом $\xi = D(L - x)$ кривой типичной реализации (12.52) и отождествляется обычно в физике неупорядоченных систем со свойством *динамической локализации*, и величина

$$l_{\text{loc}} = \frac{1}{D}$$

обычно называется *длиной локализации*. При этом

$$l_{\text{loc}}^{-1} = -\frac{\partial}{\partial L} \langle \varkappa(x; L) \rangle,$$

где

$$\varkappa(x; L) = \ln W(x; L).$$

С физической точки зрения логнормальность интенсивности волнового поля $W(x; L)$ означает наличие больших выбросов относительно кривой типичной реализации (12.52) как в сторону больших значений интенсивности, так и в сторону малых. Этот результат согласуется с примером численного моделирования (рис. 1.11 на с. 32), который был представлен в главе 1. Такие скачки интенсивности, однако, не содержат много энергии, так как, по свойству логнормального распределения вероятностей случайная величина

$$S(L) = D \int_{-\infty}^L dx W(x; L),$$

описывающая площадь под кривой $W(x; L)$, имеет стационарную, не зависящую от L , плотность вероятностей

$$P(S) = \frac{1}{S^2} \exp \left\{ -\frac{1}{S} \right\},$$

что согласуется с распределением всей энергии волнового поля внутри полупространства (12.38) при $E = 2S$. Это означает, что присутствие в выражении (12.51) члена, связанного с быстро осциллирующей фазой коэффициента отражения, не вносит существенного вклада в общую энергию.

Таким образом, знание одноточечной плотности вероятностей позволяет понять эволюцию во всем пространстве интенсивности волнового поля в отдельных реализациях и оценить параметры этой эволюции в терминах статистических характеристик флуктуирующей среды.

Диссипативная среда

В присутствии конечного поглощения волны в среде, занимающей полупространство (хоть и сколь угодно малого), экспоненциальный рост моментных функций должен прекратиться и смениться затуханием.

Если параметр $\beta \gg 1$ (т.е. поглощение велико по сравнению с диффузией), то

$$P(W) = 2\beta e^{-2\beta W},$$

и, как легко видеть из уравнения (12.49), интенсивности встречных волн $W_1(x; L)$ и $W_2(x; L)$ статистически независимы, т.е. они не коррелируют друг с другом. При этом

$$\langle W_1(\xi) \rangle = \exp \left\{ -\beta \xi \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right\}, \quad \langle W_2(\xi) \rangle = \frac{1}{2\beta} \exp \left\{ -\beta \xi \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right\}.$$

На рис. 12.4–12.7 представлены в качестве примеров результаты численного решения уравнений (12.49) и квадратуры (12.50) для моментных функций случайных процессов для различных значений параметра β . Кривые с различными номерами соответствуют различным значениям параметра β . Рисунок 12.4 соответствует средним интенсивностям проходящей и отраженной волн. Кривые монотонно убывают с увеличением ξ . На рис. 12.5 изображены соответствующие зависимости для вторых моментов. При $\xi = 0$

$$\langle W_1^2(0) \rangle = 1, \quad \langle W_2^2(0) \rangle = \langle |R_L|^4 \rangle$$

При $\beta < 1$ зависимость от ξ становится немонотонной: моменты вначале растут, проходят через максимум и лишь затем начинают монотонно убывать. С уменьшением параметра β положение максимума смещается вправо, а максимальное значение увеличивается. На рис. 12.6 изображена аналогичная зависимость для третьего момента $\langle W_1^3(\xi) \rangle$, а кривые для величины $\langle \Delta W_1(\xi) \Delta W_2(\xi) \rangle$ ($\Delta W_n(\xi) = W_n(\xi) - \langle W_n(\xi) \rangle$), описывающей корреляцию между интенсивностями проходящей и отраженной волн, построены на рис. 12.7. При $\beta \geq 1$ такая корреляция исчезает. Вследствие сильной корреляции при $\beta < 1$ ясно, что разделение волн на встречные волны никакого физического смысла не имеет. Это чисто математический прием. При $\beta \geq 1$ такое разделение оправдано отсутствием корреляции.

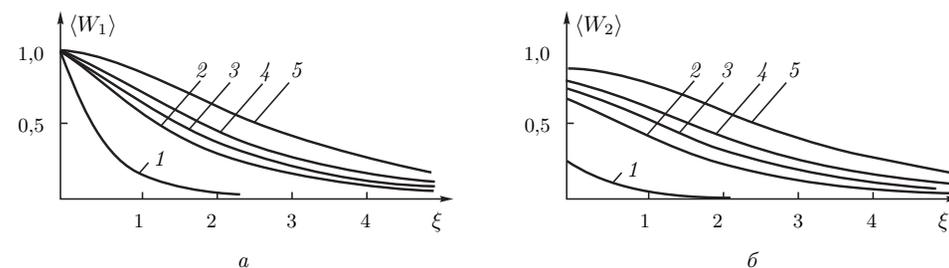


Рис. 12.4. Распределение средней интенсивности волнового поля внутри среды: проходящая волна (а); отраженная волна (б). Кривые соответствуют: 1 — $\beta = 1$; 2 — $\beta = 0,1$; 3 — $\beta = 0,06$; 4 — $\beta = 0,04$; 5 — $\beta = 0,02$

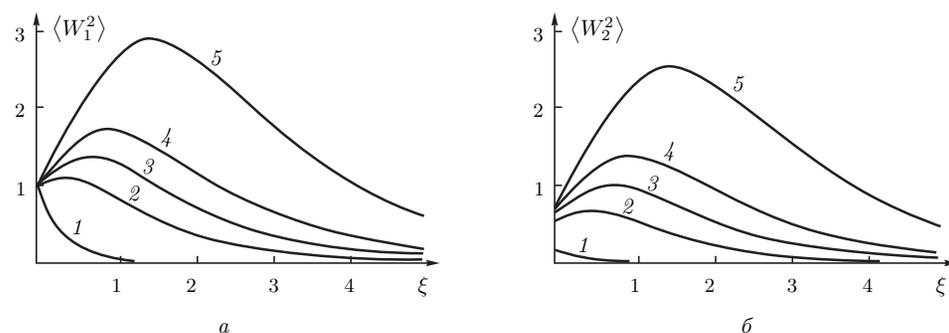


Рис. 12.5. Распределение второго момента интенсивности волнового поля внутри среды: проходящая волна (а); отраженная волна (б). Кривые соответствуют: 1 — $\beta = 1$; 2 — $\beta = 0,1$; 3 — $\beta = 0,06$; 4 — $\beta = 0,04$; 5 — $\beta = 0,02$

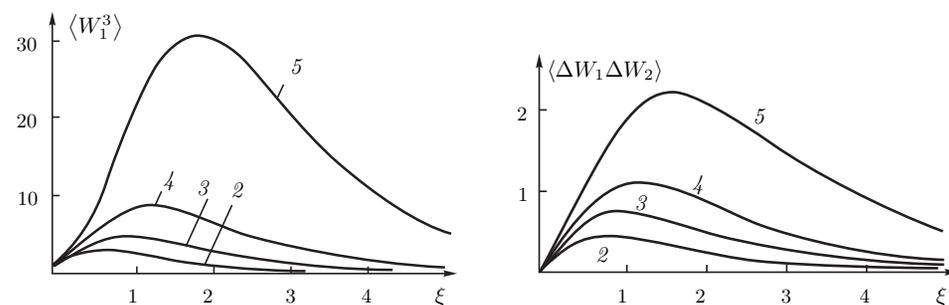


Рис. 12.6. Распределение третьего момента интенсивности проходящей волны. Кривые соответствуют: 1 — $\beta = 1$; 2 — $\beta = 0,1$; 3 — $\beta = 0,06$; 4 — $\beta = 0,04$; 5 — $\beta = 0,02$

Рис. 12.7. Корреляция интенсивностей проходящей и отраженной волн. Кривые соответствуют: 1 — $\beta = 1$; 2 — $\beta = 0,1$; 3 — $\beta = 0,06$; 4 — $\beta = 0,04$; 5 — $\beta = 0,02$

Тот факт, что моментные функции интенсивности экспоненциально растут внутри слоя, свидетельствуют о наличии явления стохастического волнового параметрического резонанса, аналогичному обычному параметрическому резонансу. Разница заключается лишь в том, что поскольку в граничных точках моменты интенсивности асимптотически заданы, экспоненциальный рост моментов интенсивности волнового поля происходит внутри слоя.

Как было показано выше, для параметра $\beta = 0$, все моменты волнового поля, начиная со второго, для полупространства случайно-неоднородной среды, экспоненциально растут с дистанцией, проходимой волной. Ясно, что для малого параметра $\beta \ll 1$ решение задачи должно иметь сингулярный характер по β , чтобы обратить решение в нуль при достаточно больших расстояниях, пройденной волной.

Можно показать, что для значений параметра $\beta \ll 1$, интенсивности встречных волн равны друг другу с вероятностью единица и для малых расстояний от границы решение задачи совпадает с решением, соответствующим стохастическому параметрическому резонансу.

Для достаточно больших расстояний ξ , а именно

$$\xi \gg 4 \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{n}{\beta} \right),$$

величины $\langle W^n(\xi) \rangle$ имеют универсальную пространственную локализационную структуру

$$\langle W^n(\xi) \rangle \cong A_n \frac{1}{\beta^{n-1/2}} \ln \left(\frac{1}{\beta} \right) \frac{1}{\xi \sqrt{\xi}} e^{-\xi/4}.$$

Таким образом поведение моментов интенсивности встречных волн существенно различно в трех областях. В первой области, соответствующей стохастическому параметрическому резонансу, моменты экспоненциально нарастают в глубь среды и роль поглощения волны в среде не существенна. Во второй области роль поглощения наиболее важна, потому что оно останавливает экспоненциальный рост моментов. И, наконец, в третьей области убывание моментных функций интенсивности встречных волн не зависит от поглощения. Границы этих областей определяются параметром β и стремятся к бесконечности при $\beta \rightarrow 0$.

12.3.2. Источник плоских волн внутри случайно-неоднородной среды

Рассмотрим теперь асимптотическое решение задачи об источнике плоских волн в неограниченном пространстве ($L_0 \rightarrow -\infty$, $L \rightarrow \infty$) при условии $\beta \rightarrow 0$. Для вычисления средней интенсивности волнового поля в области $x < x_0$ в этом случае удобно воспользоваться соотношениями (12.15) и (12.16)

$$\beta \langle I(x; x_0) \rangle = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial x} \langle S(x; x_0) \rangle = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial x} \langle \psi(x; x_0) \rangle,$$

где функция $\psi(x; x_0)$

$$\psi(x; x_0) = \exp \left\{ -\beta D \int_x^{x_0} d\xi \frac{|1 + R_\xi|^2}{1 - |R_\xi|^2} \right\},$$

и, следовательно, как функция параметра x_0 , описывается стохастическим уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \psi(x; x_0) = -\beta D \frac{|1 + R_{x_0}|^2}{1 - |R_{x_0}|^2} \psi(x; x_0), \quad \psi(x; x) = 1.$$

Введем функцию

$$\Phi(x; x_0; u) = \psi(x; x_0) \delta(u_{x_0} - u), \quad (12.53)$$

где величина $u_L = (1 + W_L)/(1 - W_L)$ описывается стохастической системой уравнений (12.25). Дифференцируя (12.53) по x_0 , получаем стохастическое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} \varphi(x; x_0; u) &= -\beta D \left\{ u + \sqrt{u^2 - 1} \cos \phi_{x_0} \right\} \varphi(x; x_0; u) + \\ &+ \beta D \frac{\partial}{\partial u} \left\{ (u^2 - 1) \varphi(x; x_0; u) \right\} - k \varepsilon_1(x_0) \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \sqrt{u^2 - 1} \sin \phi_{x_0} \varphi(x; x_0; u) \right\}. \end{aligned} \quad (12.54)$$

Усредним теперь уравнение (12.54) по ансамблю реализаций случайного процесса $\varepsilon_1(x_0)$, который, как и ранее, считаем гауссовым дельта-коррелированным процессом по x_0 . Используя далее формулу Фурутцу-Новикова (12.21), выражения для вариационных производных

$$\frac{\delta \varphi(x; x_0; u)}{\delta \varepsilon_1(x_0)} = -k \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \sqrt{u^2 - 1} \sin \phi_{x_0} \varphi(x; x_0; u) \right\},$$

$$\frac{\delta \phi_{x_0}}{\delta \varepsilon_1(x_0)} = k \left[1 + \frac{u_{x_0}}{\sqrt{u_{x_0}^2 - 1}} \right] \cos \phi_{x_0},$$

и дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям (фазе коэффициента отражения), получаем для функции

$$\Phi(\xi; u) = \langle \varphi(x; x_0; u) \rangle = \langle \psi(x; x_0) \delta(u_{x_0} - u) \rangle,$$

где $\xi = D|x - x_0|$, уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Phi(\xi; u) = -\beta u \Phi(\xi; u) + \beta \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \Phi(\xi; u) + \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} \Phi(\xi; u), \quad (12.55)$$

с начальным условием

$$\Phi(0; u) = P(u) = \beta e^{-\beta(u-1)}.$$

Среднее значение интенсивности теперь может быть представлена в виде

$$\beta \langle I(x; x_0) \rangle = -\frac{\partial}{\partial \xi} \int_1^\infty du \Phi(\xi; u) = \beta \int_1^\infty du u \Phi(\xi; u).$$

В уравнении (12.55) возможно совершить предельный переход $\beta \rightarrow 0$. В результате получаем более простое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\Phi}(\xi; u) &= -u \tilde{\Phi}(\xi; u) + \frac{\partial}{\partial u} u^2 \tilde{\Phi}(\xi; u) + \frac{\partial}{\partial u} u^2 \frac{\partial}{\partial u} \tilde{\Phi}(\xi; u), \\ \tilde{\Phi}(0; u) &= e^{-u}. \end{aligned} \quad (12.56)$$

Следовательно, локализационное распределение в пространстве средней интенсивности описывается квадратурой

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) = \int_1^{\infty} du u \tilde{\Phi}(\xi; u),$$

где

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \langle I(x; x_0) \rangle = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\langle I(x; x_0) \rangle}{\langle I(x_0; x_0) \rangle}.$$

Таким образом, средняя интенсивность волнового поля точечного источника при $\beta \ll 1$ имеет асимптотическое поведение

$$\langle I(x; x_0) \rangle = \frac{1}{\beta} \Phi_{\text{loc}}(\xi).$$

Решение уравнения (12.56) может быть легко получено с помощью интегрального преобразования Конторовича–Лебедева, и в результате для локализационной кривой можно получить выражение

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) = 2\pi \int_0^{\infty} d\tau \tau \left(\tau^2 + \frac{1}{4} \right) \frac{\sinh(\pi\tau)}{\cosh^2(\pi\tau)} e^{-(\tau^2 + \frac{1}{4})\xi}. \quad (12.57)$$

Для малых значений расстояний ξ , локализационная кривая убывает довольно быстро по закону

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) \approx e^{-2\xi}. \quad (12.58)$$

Для больших значений ξ (а именно, $\xi \gg \pi^2$) она убывает существенно медленнее по универсальному закону

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) \approx \frac{\pi^2 \sqrt{\pi}}{8} \frac{1}{\xi \sqrt{\xi}} e^{-\xi/4}. \quad (12.59)$$

График функции (12.57) представлен на рис. 12.8, где для сравнения также приведены асимптотические кривые (12.58) и (12.59).

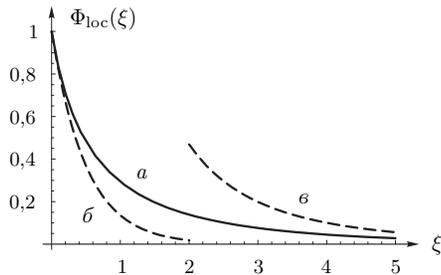


Рис. 12.8. График локализационной кривой для источника в неограниченном пространстве (12.57) (а). Пунктирные кривые соответствуют асимптотикам на малых (б) и больших (в) расстояниях от источника

Аналогичная ситуация и в случае источника плоских волн, расположенного на отражающей границе. В этом случае получаем выражение ($\xi = D(L - x)$)

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\langle I_{\text{ref}}(x; L) \rangle}{\langle I_{\text{ref}}(L; L) \rangle} = \frac{1}{2} \Phi_{\text{loc}}(\xi). \quad (12.60)$$

12.4. Численное моделирование

Развитая выше теория основывалась на двух упрощениях – использование приближения дельта-коррелированности функции $\varepsilon_1(x)$ (или диффузионного приближения) и усреднении по быстрым осцилляциям для нахождения медленных (на масштабе длины волны) изменений статистических характеристик. Метод усреднения по быстрым осцилляциям обоснован только для анализа статистических характеристик коэффициента отражения волны от полупространства случайно-неоднородной среды. Для расчета же статистических характеристик интенсивности волнового поля в среде обосновать его если и возможно, то очень сложно (этот метод является в большей степени физическим методом, чем математическим). Численное моделирование точной задачи позволяет как подтвердить эти упрощения, так и получить ответ в более сложных ситуациях, в которых мы не имеем аналитических результатов.

Такое численное моделирование, в принципе, можно было бы осуществить путем многократного решения задачи для различных реализаций параметров среды с последующим усреднением, полученных решений, по ансамблю реализаций. Однако такой подход мало перспективен, так для получения значащих результатов требуется огромное число реализаций параметров среды. Этот подход совершенно непригоден для реальных физических задач, например, для распространения волн в атмосфере Земли и океане, где, как правило, имеется всего одна реализация. Более перспективен подход, основанный на свойстве эргодичности решения краевых задач по отношению к сдвигу всей задачи вдоль одной реализации функции $\varepsilon_1(x)$, определенной на полуоси (L_0, ∞) (см. рис. 12.9).

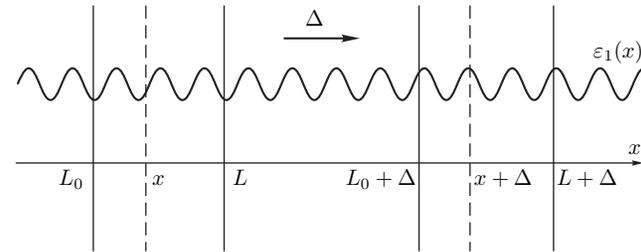


Рис. 12.9. Схема усреднения по параметру сдвига Δ , основанная на свойстве эргодичности уравнений метода погружения для полупространства случайно-неоднородной среды

На основе такого подхода статистические характеристики вычисляются с помощью формулы

$$\langle F(L_0; x, x_0; L) \rangle = \lim_{\delta \rightarrow \infty} F_{\delta}(L_0; x, x_0; L),$$

где

$$F_\delta(L_0; x, x_0; L) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta d\Delta F(L_0 + \Delta; x + \Delta, x_0 + \Delta; L + \Delta).$$

В задачах связанных с полупространством ($L_0 \rightarrow -\infty$), статистические характеристики не зависят от L_0 , и, следовательно изучаемая задача обладает свойством эргодичности по отношению к параметру L — положению правой границы слоя (который является переменной в методе погружения), так как он отождествляется в этом случае с параметром сдвига. Это позволяет при решении уравнений метода погружения для одной реализации параметров среды одновременно получать и все статистические характеристики ее решения, представляющие непосредственный интерес, с помощью очевидного равенства

$$\langle F(x, x_0; L) \rangle = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta d\xi F(\xi, \xi + x_0 - x; \xi + (L - x_0) + (x_0 - x))$$

для достаточно большого интервала $(0, \delta)$. Такой подход позволяет вычислять и такие статистические характеристики волны, которые современная статистическая теория дать не в состоянии, причем в отсутствие каких-либо дополнительных упрощающих предположений.

Для слоя конечной толщины задача не является эргодичной по параметру L . Однако, решение такой задачи может быть выражено через два независимых решения задачи о падении волны на полупространство и, следовательно, она сводится к задачам, эргодичным по параметру L .

В качестве примера приведем расчет задачи о точечном источнике на отражающей границе $x_0 = L$ с краевым условием $dG(x, x_0; L)/dx|_{x=L} = 0$. На рис. 12.10 представлен результат моделирования величины $\langle I_{\text{ref}}(x, x_0) \rangle$ при $\beta = 0.08$ и $k/D = 25$.

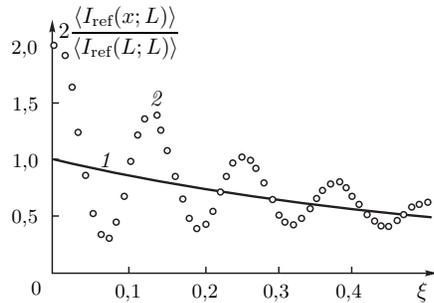


Рис. 12.10. Численное моделирование величины $2 \langle I_{\text{ref}}(x; L) \rangle / \langle I_{\text{ref}}(L; L) \rangle$. Кривая 1 — локализационная кривая (12.57), 2 — результат численного моделирования

На этом рисунке видны осцилляции в области $\xi = D(L - x) < 0.3$, с периодом колебаний $T = 0.13$. Для больших значений ξ результаты моделирования хорошо согласуются с локализационной кривой (12.60).

Задачи

Задача 12.1. Получить распределение вероятностей для фазы коэффициента отражения при падении плоской волны на полупространство недиссипативной среды [68].

Указание. В этом случае коэффициент отражения имеет структуру $R_L = \exp\{i\phi_L\}$, где фаза ϕ_L описывается уравнением погружения, вытекающим из уравнения (12.19) на с. 297,

$$\frac{d}{dL} \phi_L = 2k + k\varepsilon_1(L) (1 + \cos \phi_L), \quad \phi_{L_0} = 0. \quad (12.61)$$

Решение уравнения (12.61) определено на всей оси $\phi_L (-\infty, \infty)$. Однако, для приложений полезнее знание распределения вероятностей на интервале $(-\pi, \pi)$, которое для полупространства, естественно, не должно зависеть от L . Для получения этого распределения, удобно вместо фазы волны ϕ_L рассматривать функцию $z_L = \tan(\phi_L/2)$, имеющую сингулярные точки. Динамическое уравнение для нее имеет вид

$$\frac{d}{dL} z_L = k (1 + z_L^2) + k\varepsilon_1(L), \quad z_{L_0} = 0.$$

Решение. Считая, что случайная функция $\varepsilon_1(L)$ является гауссовой дельта-коррелированной случайной функцией с параметрами (12.18) для плотности вероятностей $P(z, L) = \langle \delta(z_L - z) \rangle$, определенной на всей оси $(-\infty, \infty)$, получаем уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial L} P(z, L) = -k \frac{\partial}{\partial z} (1 + z^2) P(z, L) + 2D \frac{\partial^2}{\partial z^2} P(z, L).$$

Для полупространства случайно-неоднородной среды ($L_0 \rightarrow -\infty$), соответствующее «стационарное» (не зависящее от L) решение уравнения Фоккера–Планка $P(z) = \lim_{L_0 \rightarrow -\infty} P(z, L)$, описывается уравнением

$$-\kappa \frac{d}{dz} (1 + z^2) P(z) + \frac{d^2}{dz^2} P(z) = 0, \quad (12.62)$$

где параметр $\kappa = k/2D$, $D = k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0/2$.

Решение уравнения (12.62), соответствующее постоянству плотности потока вероятностей, имеет вид

$$P(z) = J(\kappa) \int_z^\infty d\xi \exp \left\{ -\kappa \xi \left[1 + \frac{\xi^3}{3} + z(z + \xi) \right] \right\},$$

где «стационарное» значение плотности потока вероятностей

$$J^{-1}(\kappa) = \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \int_0^\infty \xi^{-1/2} d\xi \exp \left\{ -\kappa \left(\xi + \frac{\xi^3}{12} \right) \right\}.$$

Соответствующее распределение вероятностей для фазы волны в интервале $(-\pi, \pi)$

$$P(\phi) = \frac{1 + z^2}{2} P(z) \Big|_{z=\tan(\phi/2)}.$$

При $\kappa \gg 1$ асимптотически имеем

$$P(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)},$$

что соответствует равномерному распределению фазы коэффициента отражения

$$P(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi < \phi < \pi.$$

В обратном предельном случае $\kappa \ll 1$ мы получаем

$$P(z) = \kappa^{1/3} \left(\frac{3}{4}\right)^{1/6} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/6)} \Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\kappa z^3}{3}\right),$$

где $\Gamma(\mu, z)$ — *неполная Гамма функция*. При $\kappa|z|^3 \gg 3$ и $|z| \rightarrow \infty$ отсюда следует, что

$$P(z) = \kappa^{1/3} \left(\frac{3}{4}\right)^{1/6} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/6)} \left(\frac{3}{\kappa z^3}\right)^{2/3}.$$

Задача 12.2. Получить в диффузионном приближении уравнение для плотности вероятностей коэффициента отражения в случае несогласованной границы.

Решение. Уравнение для плотности вероятностей коэффициента отражения имеет вид уравнения Фоккера–Планка (12.24) на с. 298 с коэффициентом диффузии

$$D(k, l_0) = \frac{k^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi B_\varepsilon(\xi) \cos(2k\xi) = \frac{k^2}{4} \Phi_\varepsilon(2k),$$

где $\Phi_\varepsilon(q) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi B_\varepsilon(\xi) e^{iq\xi}$ — спектральная функция случайного процесса $\varepsilon_1(x)$. Условием применимости для него являются условия

$$D(k, l_0)l_0 \ll 1, \quad \alpha = \frac{k}{D(k, l_0)} \gg 1.$$

Задача 12.3. Получить уравнение для плотности вероятностей коэффициента отражения в случае согласованной границы.

Указание. Коэффициент отражения для согласованной границы описывается уравнением Риккати

$$\frac{d}{dL} R_L = 2ikR_L - k\gamma R_L + \frac{\xi(L)}{2} (1 - R_L^2), \quad R_{L_0} = 0,$$

где $\xi(L) = \varepsilon'_1(L)$. Для гауссова процесса с корреляционной функцией $B_\varepsilon(x)$ случайный процесс $\xi(x)$ — также гауссов с корреляционной функцией

$$B_\varepsilon(x - x') = \langle \xi(x)\xi(x') \rangle = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} B_\varepsilon(x - x').$$

Решение. Уравнение для плотности вероятностей коэффициента отражения имеет вид уравнения Фоккера–Планка (12.24) на с. 298 с коэффициентом диффузии

$$D(k, l_0) = \frac{k^2}{4} \Phi_\varepsilon(2k).$$

Очерк 13

КАУСТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

При распространении волн в среде со случайными крупномасштабными (по сравнению с длиной волны) неоднородностями из-за эффекта многократного рассеяния вперед флуктуации волнового поля быстро нарастают с расстоянием. Начиная с некоторого расстояния становятся непригодными расчеты по теории возмущений в той или иной ее форме (область сильных флуктуаций). Сильные флуктуации интенсивности могут возникать при распространении радиоволн через ионосферу, солнечную корону или межзвездную среду, при просвечивании атмосферы планет во время покрытия ими естественных или искусственных источников излучения и в ряде других случаев.

Ниже, следуя [2, 3, 69, 70], мы рассмотрим описание процесса распространения волн в случайно-неоднородных средах в рамках параболического уравнения квазиоптики на основе приближения дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды.

13.1. Исходные стохастические уравнения и некоторые их следствия

Распространение монохроматической волны в среде с крупномасштабными неоднородностями будем описывать комплексным скалярным параболическим уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + i\frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}), \quad (13.1)$$

где через функцию $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ обозначена флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости или показателя преломления (отклонение от единицы), ось x выбрана в направлении первоначального распространения волны, а через \mathbf{R} обозначены координаты в поперечной плоскости. Начальным условием к уравнению (13.1) является условие

$$u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}). \quad (13.2)$$

Так как уравнение (13.1) является уравнением первого порядка по x с начальным условием (13.2) при $x = 0$, то для этого уравнения выполняется условие причинности по x (координата x играет роль времени), т. е. имеет место соотношение

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = 0 \quad \text{при} \quad x' < 0, \quad x' > x. \quad (13.3)$$

Для вариационной производной при $x = x'$ получаем стандартным путем равенство

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x - 0, \mathbf{R}')} = \frac{ik}{2} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') u(x, \mathbf{R}). \quad (13.4)$$

Рассмотрим теперь статистическое описание волнового поля. Будем считать, что случайное поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ является гауссовым однородным и изотропным полем с параметрами

$$\langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \rangle = 0, \quad B_\varepsilon(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') = \langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \varepsilon(x', \mathbf{R}') \rangle.$$

Как отмечалось выше, поле $u(x, \mathbf{R})$ функционально зависит лишь от предшествующих значений $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Однако может существовать статистическая связь между $u(x, \mathbf{R})$ и последующими значениями $\varepsilon(x_1, \mathbf{R})$ ($x_1 > x$), так как значения $\varepsilon(x', \mathbf{R}')$ при $x' < x$ коррелированы со значениями $\varepsilon(\xi, \mathbf{R})$ при $\xi > x$. Ясно, что корреляция поля $u(x, \mathbf{R})$ с последующими значениями $\varepsilon(x', \mathbf{R}')$ заметна при $x' - x \sim l_{\parallel}$, где l_{\parallel} — продольный радиус корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. В то же время характерный радиус корреляции поля $u(x, \mathbf{R})$ по продольному направлению имеет величину порядка x . Поэтому в рассматриваемой задаче существует малый параметр l_{\parallel}/x , который может быть использован для построения приближенного решения.

В первом приближении можно положить $l_{\parallel}/x \rightarrow 0$. В этом случае значения полей $u(\xi_i, \mathbf{R})$ при $\xi_i < x$ будут не только функционально, но и статистически независимы от значений $\varepsilon(\eta_j, \mathbf{R})$ при $\eta_j > x$. Это эквивалентно аппроксимации корреляционной функции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ дельта-функцией в продольном направлении, т. е. замене корреляционной функции на «эффективную»:

$$B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) = \delta(x)A(\mathbf{R}), \quad A(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx B_\varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (13.5)$$

В рамках этого приближения получим уравнения для моментных функций:

$$M_{mn}(x; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) = \left\langle \prod_{p=1}^m \prod_{q=1}^n u(x; \mathbf{R}_p) u^*(x; \mathbf{R}'_q) \right\rangle, \quad (13.6)$$

которые для $m = n$ обычно называются *функциями когерентности* порядка $2n$.

Дифференцируя функцию (13.6) по x и используя уравнение (13.1), а также комплексно-сопряженное к нему, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} M_{mn}(x; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) = \\ = \frac{i}{2k} \left(\sum_{p=1}^m \Delta_{\mathbf{R}_p} - \sum_{q=1}^n \Delta_{\mathbf{R}'_q} \right) M_{mn}(x; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) + \\ + \frac{i}{2} \left\langle \left(\sum_{p=1}^m \varepsilon(x, \mathbf{R}_p) - \sum_{q=1}^n \varepsilon(x, \mathbf{R}'_q) \right) \left[\prod_{p=1}^m \prod_{q=1}^n u(x; \mathbf{R}_p) u^*(x; \mathbf{R}'_q) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Для расщепления корреляции в правой части (13.7) воспользуемся формулой Фуртцу–Новикова, которая в данной задаче в приближении дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды, описываемых эффективной корреляционной функцией

ей (13.5), принимают вид

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x; \mathbf{R}_p) \rangle &= \frac{1}{2} \int dR' A(R - R') \left\langle \frac{\delta u(x; \mathbf{R}_p)}{\delta \varepsilon(x - 0, \mathbf{R}')} \right\rangle, \\ \langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) u^*(x; \mathbf{R}'_q) \rangle &= \frac{1}{2} \int dR' A(R - R') \left\langle \frac{\delta u^*(x; \mathbf{R}'_q)}{\delta \varepsilon(x - 0, \mathbf{R}')} \right\rangle. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Учитывая теперь равенство (13.4) и комплексно сопряженному к нему, мы приходим к замкнутому уравнению для моментной функции волнового поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} M_{mn}(x; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) = \\ = \frac{i}{2k} \left(\sum_{p=1}^m \Delta_{\mathbf{R}_p} - \sum_{q=1}^n \Delta_{\mathbf{R}'_q} \right) M_{mn}(x; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) - \\ - \frac{k^2}{8} Q(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) M_{mn}(x; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n), \end{aligned} \quad (13.9)$$

где

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) = \\ = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}'_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A(\mathbf{R}'_i - \mathbf{R}'_j). \end{aligned} \quad (13.10)$$

Также можно получить и уравнение для характеристического функционала случайного поля $u(x, \mathbf{R})$, которое будет линейным уравнением в вариационных производных.

Выпишем уравнения для среднего поля $\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$, функции когерентности второго порядка

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') = \langle \gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') \rangle, \quad \gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') = u(x, \mathbf{R}) u^*(x, \mathbf{R}'),$$

и функции когерентности четвертого порядка

$$\Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) = \langle u(x, \mathbf{R}_1) u(x, \mathbf{R}_2) u^*(x, \mathbf{R}'_1) u^*(x, \mathbf{R}'_2) \rangle,$$

вытекающие из (13.9) и (13.10) при $m = 1, n = 0$; $m = n = 1$ и $m = n = 2$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle - \frac{k^2}{8} A(0) \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle, \quad \langle u(0, \mathbf{R}) \rangle = u_0(\mathbf{R}), \quad (13.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{i}{2k} (\Delta_{\mathbf{R}} - \Delta_{\mathbf{R}'}) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') - \frac{k^2}{4} D(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}'),$$

$$\Gamma_2(0, \mathbf{R}, \mathbf{R}') = u_0(\mathbf{R}) u_0^*(\mathbf{R}'), \quad (13.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) = \frac{i}{2k} (\Delta_{\mathbf{R}_1} + \Delta_{\mathbf{R}_2} - \Delta_{\mathbf{R}'_1} - \Delta_{\mathbf{R}'_2}) \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) - \frac{k^2}{8} Q(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2),$$

$$\Gamma_4(0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) = u_0(\mathbf{R}_1) u_0(\mathbf{R}_2) u_0^*(\mathbf{R}'_1) u_0^*(\mathbf{R}'_2), \quad (13.13)$$

где введены новые функции

$$D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R}),$$

$$Q(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) = D(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}'_1) + D(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}'_2) + D(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}'_2) + D(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}'_1) - D(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) - D(\mathbf{R}'_2 - \mathbf{R}'_1),$$

связанные со структурной функцией случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

Уравнение (13.12) для новых переменных

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{R}' \rightarrow \mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}$$

можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \right) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = -\frac{k^2}{4} D(\boldsymbol{\rho}) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}), \quad (13.14)$$

$$\Gamma_2(0, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \gamma_0(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = u_0 \left(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right) u_0^* \left(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \right).$$

Уравнения (13.11) и (13.14) легко решаются для произвольной функции $D(\boldsymbol{\rho})$ и произвольных начальных условий. Так, для среднего волнового поля получаем выражение

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0(x, \mathbf{R}) e^{-\gamma x/2}, \quad (13.15)$$

где $u_0(x, \mathbf{R})$ — решение задачи в отсутствие флуктуаций параметров среды:

$$u_0(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{R}' g(x, \mathbf{R} - \mathbf{R}') u_0(\mathbf{R}').$$

Функция $g(x, \mathbf{R})$ при этом

$$g(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') = \exp \left(\frac{i(x - x')}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \frac{k}{2\pi i(x - x')} \exp \left(\frac{ik(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2}{2(x - x')} \right) \quad (13.16)$$

при $x > x'$ представляет собой функцию Грина для уравнения (13.1) в отсутствие неоднородностей, а величина $\gamma = \frac{k^2}{4} A(0)$ — коэффициент экстинкции.

Соответственно для функции когерентности второго порядка имеем

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \int d\mathbf{q} \gamma_0 \left(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho} - \mathbf{q} \frac{x}{k} \right) \exp \left\{ i\mathbf{q}\mathbf{R} - \frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{q} \frac{\xi}{k} \right) \right\}, \quad (13.17)$$

где

$$\gamma_0(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} \gamma_0(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}.$$

Дальнейший анализ задачи зависит от вида начальных условий к уравнению (13.1) и характера флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. В практических исследованиях обычно рассматриваются начальные условия трех типов:

- плоская падающая волна, соответствующая $u_0(\mathbf{R}) = u_0$;
- сферическая расходящая волна, соответствующая $u_0(\mathbf{R}) = \delta(\mathbf{R})$;
- падающий волновой пучок.

Для падающего волнового пучка распределение поля в начальном сечении имеет вид

$$u_0(\mathbf{R}) = u_0 \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{2a^2} + i\frac{k\mathbf{R}^2}{2F} \right\}, \quad (13.18)$$

где a — эффективная ширина пучка, F — расстояние до центра излучения (если $F = \infty$, то в свободном пространстве пучок коллимированный, если же $F < 0$, то в свободном пространстве пучок сфокусирован на расстоянии $x = |F|$).

Для случая плоской падающей волны, когда

$$u_0(\mathbf{R}) = u_0 = \text{const}, \quad \gamma_0(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = |u_0|^2, \quad \gamma_0(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}) = |u_0|^2 \delta(\mathbf{q}),$$

выражения (13.15) и (13.17) существенно упрощаются и принимают вид

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0 e^{-\gamma x/2}, \quad \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = |u_0|^2 e^{-k^2 x D(\boldsymbol{\rho})/4}, \quad (13.19)$$

не зависящий от эффекта дифракции плоской волны в случайно-неоднородной среде. В этом случае $D(\boldsymbol{\rho}) = D(\rho)$. При этом в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, появляется новый статистический масштаб ρ_{cog} , определяемый из условия

$$\frac{1}{4} k^2 x D(\rho_{\text{cog}}) = 1, \quad (13.20)$$

называемый *радиусом когерентности* поля $u(x, \mathbf{R})$. Радиус когерентности зависит от длины волны, дистанции, пройденной волной, и статистических параметров среды.

Для волнового пучка (13.18) функция

$$\gamma_0(\mathbf{q}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{|u_0|^2 a^2}{4\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left[\frac{\boldsymbol{\rho}^2}{a^2} + \left(\frac{k\boldsymbol{\rho}}{F} - \mathbf{q} \right)^2 a^2 \right] \right\},$$

и, например, для турбулентной атмосферы, для которой структурная функция $D(\mathbf{R})$ описывается законом Колмогорова–Обухова:

$$D(\mathbf{R}) = NC_\varepsilon^2 R^{5/3} \quad (R_{\min} \ll R \ll R_{\max}),$$

где численная постоянная $N = 1,46$, а C_ε^2 — структурная характеристика флуктуаций диэлектрической проницаемости, зависящая от внешних параметров среды, для средней интенсивности в пучке

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = \Gamma_2(x, \mathbf{R}, 0)$$

получаем выражение

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{2|u_0|^2 k^2 a^4}{x^2 g^2(x)} \int_0^\infty dt J_0 \left(\frac{2kaRt}{xg(x)} \right) \exp \left\{ -t^2 - \frac{3\pi N}{32} C_\varepsilon^2 k^2 x \left(\frac{2a}{g(x)} \right)^{5/3} t^{5/3} \right\},$$

где

$$g(x) = \sqrt{1 + k^2 a^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{F} \right)^2},$$

а $J_0(t)$ — функция Бесселя. Эта формула неоднократно проверялась экспериментально для условий турбулентной атмосферы, и было получено хорошее совпадение экспериментальных данных с этой теоретической зависимостью.

Уравнение (13.13) для функции когерентности четвертого порядка уже нельзя решить в аналитическом виде, и для ее анализа требуются либо численные, либо приближенные методы. Эта функция описывает флуктуации интенсивности и, в частности, для совпадающих поперечных координат — ее дисперсию.

Для плоской падающей волны после введения новых поперечных координат

$$\tilde{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}'_2, \quad \tilde{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{R}'_2 - \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}'_1,$$

уравнение (13.13) упрощается и принимает вид (тильду не пишем)

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{k} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}_1 \partial \mathbf{R}_2} \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) - \frac{k^2}{4} F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2), \quad (13.21)$$

где

$$F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = 2D(\mathbf{R}_1) + 2D(\mathbf{R}_2) - D(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) - D(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2).$$

Асимптотика решения для этого уравнения будет приведена в п. 13.3.1 на с. 338.

13.2. Амплитудно-фазовые флуктуации волнового поля (метод плавных возмущений)

Рассмотрим теперь статистическое описание амплитудно-фазовых флуктуаций волны.

Введем амплитуду и фазу волнового поля, а также комплексную фазу волны по формуле

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) e^{iS(x, \mathbf{R})} = e^{\phi(x, \mathbf{R})},$$

где

$$\phi(x, \mathbf{R}) = \chi(x, \mathbf{R}) + iS(x, \mathbf{R}),$$

$\chi(x, \mathbf{R}) = \ln A(x, \mathbf{R})$ — уровень амплитуды волны, а $S(x, \mathbf{R})$ — флуктуации фазы волны относительно фазы падающей волны kx . Исходя из параболического уравнения (13.1), можно получить для комплексной фазы нелинейное уравнение так называемого метода плавных возмущений Рыгова (МПВ):

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \phi(x, \mathbf{R}) + \frac{i}{2k} [\nabla_{\mathbf{R}} \phi(x, \mathbf{R})]^2 + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (13.22)$$

Для случая плоской падающей волны, который и будет рассматриваться в дальнейшем, без ограничения общности можно считать, что $u_0(\mathbf{R}) = 1$ и, следовательно, $\phi(0, \mathbf{R}) = 0$.

Разделяя в уравнении (13.22) действительную и мнимую части, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} [\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})] [\nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})] = 0, \quad (13.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} S(x, \mathbf{R}) - \frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R}) - \frac{1}{2k} [\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})]^2 + \frac{1}{2k} [\nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})]^2 = \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (13.24)$$

С помощью уравнения (13.23) можно получить уравнение для интенсивности волны $I(x, \mathbf{R}) = e^{2\chi(x, \mathbf{R})}$ в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} [I(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})] = 0. \quad (13.25)$$

Если функция $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ достаточно мала, то для решения уравнений (13.23) и (13.24) можно построить итерационные ряды по полю $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. При этом так называемому первому приближению МПВ Рыгова соответствуют гауссовы поля $\chi(x, \mathbf{R})$, $S(x, \mathbf{R})$, статистические характеристики которых определяются из статистического усреднения соответствующих итерационных рядов. Так, вторые моменты (в том числе и дисперсии) этих полей определяются из линеаризованной системы уравнений (13.23) и (13.24), т. е. системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \chi_0(x, \mathbf{R}) &= -\frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} S_0(x, \mathbf{R}), \\ \frac{\partial}{\partial x} S_0(x, \mathbf{R}) &= \frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \chi_0(x, \mathbf{R}) + \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (13.26)$$

а средние значения определяются из непосредственного усреднения уравнений (13.23) и (13.24). Такое амплитудно-фазовое описание волнового поля в случайно-неоднородной среде впервые было использовано более 50 лет назад в работе А. М. Обухова [71] (см., также, [72]), в которой он впервые учел дифракционные эффекты при распространении волн в случайных средах в рамках теории возмущений. Ранее аналогичные исследования проводились в приближении геометрической оптики (акустики). Методика, предложенная в этой работе, не потеряла своей актуальности и в настоящее время. Она является основным математическим аппаратом для различных технических приложений. Однако, как было позднее обнаружено экспериментально в работах [73, 74], флуктуации волнового поля быстро нарастают с расстоянием из-за эффекта многократного рассеяния вперед. Начиная с некоторого расстояния, становятся непригодными расчеты по теории возмущений в той или иной ее форме (область сильных флуктуаций).

Линейная система уравнений (13.26) может быть решена с помощью преобразования Фурье по поперечной координате. Вводя фурье-образы всех полей, а также фурье-образ случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ по формулам

$$\begin{aligned}\chi_0(x, \mathbf{R}) &= \int d\mathbf{q} \chi_{\mathbf{q}}^0(x) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}, & \chi_{\mathbf{q}}^0(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} \chi_0(x, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \\ S_0(x, \mathbf{R}) &= \int d\mathbf{q} S_{\mathbf{q}}^0(x) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}, & S_{\mathbf{q}}^0(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} S_0(x, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \\ \varepsilon(x, \mathbf{R}) &= \int d\mathbf{q} \varepsilon_{\mathbf{q}}(x) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}, & \varepsilon_{\mathbf{q}}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} \varepsilon(x, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}},\end{aligned}\quad (13.27)$$

получаем решение системы уравнений (13.26) в виде

$$\chi_{\mathbf{q}}^0(x) = \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon_{\mathbf{q}}(\xi) \sin \frac{q^2}{2k}(x - \xi), \quad S_{\mathbf{q}}^0(x) = \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon_{\mathbf{q}}(\xi) \cos \frac{q^2}{2k}(x - \xi). \quad (13.28)$$

При вычислении конкретных интегралов, связанных со случайным полем $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, трехмерная спектральная функции которого описываются формулой

$$\Phi_{\varepsilon}(q_1, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int d\mathbf{R} B_{\varepsilon}(x, \mathbf{R}) e^{-iq_1 x - i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \quad (13.29)$$

легко получить и корреляционную функцию случайного гауссова поля $\varepsilon_{\mathbf{q}}(x)$.

В самом деле, для дельта-коррелированного приближения случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ связь между корреляционной и спектральной функциями имеет вид

$$B_{\varepsilon}(x_1 - x_2, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) = 2\pi\delta(x_1 - x_2) \int d\mathbf{q} \Phi_{\varepsilon}(0, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}. \quad (13.30)$$

Умножая теперь равенство (13.30) на $(2\pi)^{-4} \exp(-i(\mathbf{q}_1 \mathbf{R}_1 + \mathbf{q}_2 \mathbf{R}_2))$ и интегрируя по \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 , с учетом определения (13.27) и получаем искомое равенство

$$\langle \varepsilon_{\mathbf{q}_1}(x_1) \varepsilon_{\mathbf{q}_2}(x_2) \rangle = 2\pi\delta(x_1 - x_2) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \Phi_{\varepsilon}(0, \mathbf{q}_1). \quad (13.31)$$

Отметим, что если поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ отлично от нуля только в конечном слое $(0, \Delta x)$, а при $x > \Delta x$ поле $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = 0$, то вместо формулы (13.31) получаем выражение

$$\langle \varepsilon_{\mathbf{q}_1}(x_1) \varepsilon_{\mathbf{q}_2}(x_2) \rangle = 2\pi\delta(x_1 - x_2) \theta(\Delta x - x) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \Phi_{\varepsilon}(0, \mathbf{q}_1). \quad (13.32)$$

Если рассмотреть флуктуации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, вызываемые турбулентными пульсациями температуры в атмосфере Земли, то в значительном интервале волновых чисел трехмерная спектральная плотность имеет вид

$$\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{q}) = AC_{\varepsilon}^2 q^{-11/3} \quad (q_{\min} \ll q \ll q_{\max}), \quad (13.33)$$

где $A = 0,033$ — численная постоянная, C_{ε}^2 — структурная характеристика флуктуаций диэлектрической проницаемости, зависящая от внешних параметров среды. В ряде случаев интегралы, описывающие статистические характеристики амплитудно-фазовых флуктуаций волнового поля и содержащие спектральную функцию вида (13.33), расходятся. В этом случае используется феноменологическая спектральная функция вида

$$\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{q}) = \Phi_{\varepsilon}(q) = AC_{\varepsilon}^2 q^{-11/3} \exp(-\mathbf{q}^2/\kappa_m^2), \quad (13.34)$$

где κ_m — волновое число, соответствующее *микромасштабу турбулентности* [32, 33].

Статистические свойства амплитудных флуктуаций в рассматриваемом приближении для среды, занимающей конечную часть пространства Δx , описываются дисперсией уровня амплитуды, т. е. параметром

$$\sigma_0^2(x) = \langle \chi_0^2(x, \mathbf{R}) \rangle,$$

для которого, согласно формулам (13.28) и (13.31), имеем

$$\begin{aligned}\sigma_0^2(x) &= \iint d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \langle \chi_{\mathbf{q}_1}^0(x) \chi_{\mathbf{q}_2}^0(x) \rangle \exp(i(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)\mathbf{R}) = \\ &= \frac{\pi^2 k^2 \Delta x}{2} \int_0^{\infty} dq q \Phi_{\varepsilon}(q) \left\{ 1 - \frac{k}{q^2 \Delta x} \left[\sin \frac{q^2 x}{k} - \sin \frac{q^2(x - \Delta x)}{k} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (13.35)$$

Чтобы найти среднее значение уровня амплитуды, воспользуемся уравнением (13.25).

Для плоской падающей волны, усредняя это уравнение по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, получаем равенство

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = 1,$$

которое можно переписать в виде

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = \langle \exp(2\chi_0(x, \mathbf{R})) \rangle = \exp\left(2\langle \chi_0(x, \mathbf{R}) \rangle + 2\sigma_0^2(x)\right) = 1.$$

Следовательно, в первом приближении МПВ

$$\langle \chi_0(x, \mathbf{R}) \rangle = -\sigma_0^2(x).$$

Условиями применимости первого приближения МПВ является, очевидно, условие

$$\sigma_0^2(x) \ll 1.$$

Что касается дисперсии интенсивности волны, которая называется *индексом мерцания*, то для нее в первом приближения МПВ имеем

$$\beta_0(x) = \langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle - 1 = \langle e^{4\chi_0(x, \mathbf{R})} \rangle - 1 \approx 4\sigma_0^2(x). \quad (13.36)$$

Следовательно, одноточечное распределение вероятностей поля $\chi(x, \mathbf{R})$ в этом приближении имеет вид

$$P(x; \chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_0(x)}} \exp \left\{ -\frac{2}{\beta_0(x)} \left(\chi + \frac{1}{4}\beta_0(x) \right)^2 \right\}.$$

Таким образом, интенсивность волнового поля является логарифмически-нормальным случайным полем, и его одноточечная плотность вероятностей определяется выражением

$$P(x; I) = \frac{1}{I\sqrt{2\pi\beta_0(x)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\beta_0(x)} \ln^2 \left(Ie^{\beta_0(x)/2} \right) \right\}. \quad (13.37)$$

При статистическом анализе обычно рассматриваются два предельных асимптотических случая.

Первый случай соответствует предположению $\Delta x \ll x$ и называется *случайным фазовым экраном*. В этом случае волна после прохождения тонкого слоя флуктуирующей среды распространяется далее в пустом пространстве. В тонком слое среды имеются только фазовые флуктуации волнового поля, которые в дальнейшем при распространении в свободном пространстве трансформируются в амплитудные флуктуации в силу нелинейности уравнений (13.23), (13.24).

Второй случай соответствует *непрерывной среде*, т. е. условию $\Delta x = x$.

Рассмотрим эти случаи подробнее для слабых флуктуаций волнового поля.

13.2.1. Случайный фазовый экран ($\Delta x \ll x$)

В этом случае дисперсия уровня амплитуды описывается выражением, вытекающим из (13.35):

$$\sigma_0^2(x) = \frac{\pi^2 k^2 \Delta x}{2} \int_0^\infty dq q \Phi_\varepsilon(q) \left\{ 1 - \cos \frac{q^2 x}{k} \right\}. \quad (13.38)$$

Если флуктуации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ вызваны турбулентными пульсациями среды, то функция $\Phi_\varepsilon(q)$ описывается формулой (13.33) и интеграл (13.35) легко вычисляется. В результате получаем выражение

$$\sigma_0^2(x) = 0,144 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{5/6} \Delta x, \quad (13.39)$$

и, следовательно, индекс мерцания

$$\beta_0(x) = 0,563 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{5/6} \Delta x. \quad (13.40)$$

Что касается фазовых флуктуаций, то непосредственный физический интерес представляет величина, описывающая угол прихода волны в точку (x, \mathbf{R}) :

$$\alpha(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}).$$

Для ее дисперсии, аналогично выводу формулы (13.38), получаем формулу

$$\langle \alpha^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{\pi^2 \Delta x}{2} \int_0^\infty dq q \Phi_\varepsilon(q) \left\{ 1 + \cos \frac{q^2 x}{k} \right\}.$$

13.2.2. Случай непрерывной среды ($\Delta x = x$)

В этом случае дисперсия уровня амплитуды описывается формулой

$$\sigma_0^2(x) = \frac{\pi^2 k^2 x}{2} \int_0^\infty dq q \Phi_\varepsilon(q) \left\{ 1 - \frac{k}{q^2 x} \sin \frac{q^2 x}{k} \right\}, \quad (13.41)$$

а параметры $\sigma_0^2(x)$ и $\beta_0(x)$ для турбулентных пульсаций среды описываются выражениями

$$\sigma_0^2(x) = 0,077 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6}, \quad \beta_0(x) = 0,307 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6}. \quad (13.42)$$

Дисперсия угла прихода волны в точку (x, \mathbf{R}) в этом случае описывается формулой

$$\langle \alpha^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{\pi^2 x}{2} \int_0^\infty dq q \Phi_\varepsilon(q) \left\{ 1 + \frac{k}{q^2 x} \sin \frac{q^2 x}{k} \right\}. \quad (13.43)$$

Аналогичным образом можно исследовать и дисперсию градиента уровня амплитуды. При этом приходится считать, что спектральная функция $\Phi_\varepsilon(q)$ описывается формулой (13.33). При условии что так называемый *волновой параметр* (см., например, [32, 33]) $D(x) = \kappa_m^2 x/k \gg 1$, для дисперсии градиента уровня амплитуды $\mathbf{q} = \nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})$,

$$\sigma_{\mathbf{q}}^2(x) = \langle [\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})]^2 \rangle,$$

получаем выражение для турбулентной среды, занимающей все пространство:

$$\sigma_{\mathbf{q}}^2(x) = \frac{k^2 \pi^2 x}{2} \int_0^\infty dq q^3 \Phi_\varepsilon(q) \left\{ 1 - \frac{k}{q^2 x} \sin \frac{q^2 x}{k} \right\} = \frac{1,476}{L_f^2(x)} D^{1/6}(x) \beta_0(x), \quad (13.44)$$

где введен естественный масштаб длины в плоскости $x = \text{const}$, не зависящий от параметров среды, — размер первой зоны Френеля $L_f(x) = \sqrt{x/k}$, определяющий размер переходной области свет-тьнь при дифракции на краю непрозрачного экрана (см., например, [32, 33]).

Условием справедливости первого приближения МПВ для амплитудных флуктуаций в общем случае является условие

$$\sigma_0^2(x) \ll 1.$$

Область флуктуаций амплитуды, в которой выполняется это неравенство, называется *областью слабых флуктуаций*. В области, где $\sigma_0^2(x) \geq 1$ (называемой *областью сильных флуктуаций*), необходимо изучать полную нелинейную систему уравнений (13.23), (13.24).

Что касается флуктуаций угла прихода волны в точку наблюдения, связанных с флуктуациями величины $\alpha(x, \mathbf{R}) = k^{-1} \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})$, то они хорошо описываются первым приближением МПВ даже для больших значений параметра $\sigma_0(x)$.

Отметим, что приближение дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для уравнения (13.1) практически не накладывает ограничения на амплитудные флуктуации, и, следовательно, уравнения для моментов поля $u(x, \mathbf{R})$, полученные выше, справедливы и в области сильных флуктуаций амплитуды. Анализ статистических характеристик интенсивности волнового поля в этом случае будет проведен в следующем разделе.

13.3. Континуальная запись решения задачи

Рассмотрим теперь статистическое описание характеристик волнового поля в среде со случайными неоднородностями, основанное на использовании функциональной записи решения задачи.

Для описания процесса распространения волны в неоднородной среде будем исходить, как и ранее, из параболического уравнения (13.1) на с. 319, решение которого можно представить в операторной форме или в виде континуального интеграла, используя метод предложенный Е.С. Фрадкиным в квантовой теории поля [75–77] (см. также [2, 3, 69]).

Для этого рассмотрим вместо (13.1) более сложное уравнение, содержащее произвольную детерминированную векторную функцию $\mathbf{v}(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \Phi(x, \mathbf{R}) + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \Phi(x, \mathbf{R}) + \mathbf{v}(x) \nabla_{\mathbf{R}} \Phi(x, \mathbf{R}), \quad (13.45)$$

$$\Phi(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}).$$

Тогда решению параболического уравнения (13.1) соответствует равенство

$$u(x, \mathbf{R}) = \Phi(x, \mathbf{R}) \Big|_{\mathbf{v}(x)=0}. \quad (13.46)$$

Для вариационной производной $\delta \Phi(x, \mathbf{R}) / \delta \mathbf{v}(x-0)$ стандартным путем получаем выражение

$$\frac{\delta \Phi(x, \mathbf{R})}{\delta \mathbf{v}(x-0)} = \nabla_{\mathbf{R}} \Phi(x, \mathbf{R}), \quad (13.47)$$

и уравнение (13.45) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \frac{\delta^2 \Phi(x, \mathbf{R})}{\delta \mathbf{v}^2(x-0)} + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \Phi(x, \mathbf{R}) + \mathbf{v}(x) \nabla_{\mathbf{R}} \Phi(x, \mathbf{R}). \quad (13.48)$$

Будем искать решение уравнения (13.47) в виде

$$\Phi(x, \mathbf{R}) = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^{x-0} d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right\} \varphi(x, \mathbf{R}). \quad (13.49)$$

Оператор, стоящий в экспоненте (13.49), перестановочен с функцией $\mathbf{v}(x)$, и, следовательно, для функции $\varphi(x, \mathbf{R})$ получаем уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, \mathbf{R}) = i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \varphi(x, \mathbf{R}) + \mathbf{v}(x) \nabla_{\mathbf{R}} \varphi(x, \mathbf{R}), \quad \varphi(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}), \quad (13.50)$$

решение которого, как функционал от $\mathbf{v}(\xi)$, выглядит следующим образом:

$$\varphi(x, \mathbf{R}) = \varphi[x, \mathbf{R}; \mathbf{v}(\xi)] = u_0 \left(\mathbf{R} + \int_0^x d\xi \mathbf{v}(\xi) \right) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_{\xi}^x d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right\}. \quad (13.51)$$

Следовательно, с учетом равенств (13.49) и (13.46) получаем операторную запись решения параболического уравнения (13.1) в виде

$$u(x, \mathbf{R}) = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right\} \times \\ \times u_0 \left(\mathbf{R} + \int_0^x d\xi \mathbf{v}(\xi) \right) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_{\xi}^x d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right\} \Big|_{\mathbf{v}(x)=0}. \quad (13.52)$$

В случае плоской падающей волны $u_0(\mathbf{R}) = u_0$ и формула (13.52) упрощается:

$$u(x, \mathbf{R}) = u_0 \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right\} \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_{\xi}^x d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right\} \Big|_{\mathbf{v}(x)=0}. \quad (13.53)$$

Рассмотрим теперь формально уравнение (13.50) как стохастическое, где функцию $\mathbf{v}(x)$ будем теперь считать «гауссовой» случайной векторной функцией со средним значением, равным нулю, и мнимой «корреляционной» функцией:

$$\langle v_i(x) v_j(x') \rangle = \frac{i}{k} \delta_{ij} \delta(x - x'). \quad (13.54)$$

Легко видеть, что все формулы, справедливые для обычных гауссовых случайных процессов, верны и в этом случае.

Усредняя уравнение (13.50) по ансамблю реализаций случайного процесса $\mathbf{v}(x)$, мы для среднего значения $\langle \varphi(x, \mathbf{R}) \rangle_{\mathbf{v}}$ получаем уравнение, совпадающее с уравнением (13.1). Таким образом, решение параболического уравнения (13.1) допускает вероятностную интерпретацию, а именно: его можно формально записать в виде средней величины:

$$u(x, \mathbf{R}) = \langle \varphi[x, \mathbf{R}; \mathbf{v}(\xi)] \rangle_{\mathbf{v}}. \quad (13.55)$$

Это равенство можно записать в виде *фейнмановского континуального интеграла*:

$$u(x, \mathbf{R}) = \int D\mathbf{v}(x) u_0 \left(\mathbf{R} + \int_0^x d\xi \mathbf{v}(\xi) \right) \times \\ \times \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \left[\mathbf{v}^2(\xi) + \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_\xi^x d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right] \right\}, \quad (13.56)$$

где интегральная мера

$$D\mathbf{v}(x) = \frac{\prod_{\xi=0}^x d\mathbf{v}(\xi)}{\int \cdots \int \prod_{\xi=0}^x d\mathbf{v}(\xi) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \mathbf{v}^2(\xi) \right\}}.$$

Представления (13.52) и (13.55) эквивалентны. В самом деле, рассматривая решение уравнения (13.50) как функционал случайного процесса $\mathbf{v}(\xi)$, равенство (13.55) можно переписать в виде цепочки равенств:

$$u(x, \mathbf{R}) = \langle \varphi [x, \mathbf{R}; \mathbf{v}(\xi) + \mathbf{y}(\xi)]_{\mathbf{v}} \Big|_{\mathbf{y}=0} = \\ = \left\langle \exp \left\{ \int_0^x d\xi \mathbf{v}(\xi) \frac{\delta}{\delta \mathbf{y}(\xi)} \right\} \right\rangle_{\mathbf{v}} \varphi [x, \mathbf{R}; \mathbf{y}(\xi)] \Big|_{\mathbf{y}=0} = \\ = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{y}^2(\xi)} \right\} \varphi [x, \mathbf{R}; \mathbf{y}(\xi)] \Big|_{\mathbf{y}=0},$$

и, следовательно, в операторном виде (13.52).

Исходя из полученных представлений волнового поля, легко получить явные выражения как для среднего поля, так и для функции когерентности второго порядка, полученные ранее из стохастического уравнения. В этом смысле для вычисления указанных величин данные методы можно считать эквивалентными. Представляется, однако, существенным, что с помощью операторного метода (или континуального интеграла) мы можем выписывать выражения для таких величин, которые не могут быть описаны замкнутыми уравнениями (например, выражения, связанные с флуктуациями интенсивности волны). Так, можно получить замкнутое уравнение для функции когерентности четвертого порядка:

$$\Gamma_4(x; \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4) = \langle u(x, \mathbf{R}_1) u(x, \mathbf{R}_2) u^*(x, \mathbf{R}_3) u^*(x, \mathbf{R}_4) \rangle,$$

с помощью которого затем найти величину $\langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle$, полагая в решении $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_4 = \mathbf{R}$. Однако решить аналитически это уравнение не представляется возможным, и оно содержит много лишних (для нахождения $\langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle$) параметров, в то время как запись величины в виде континуального интеграла этих параметров не содержит. Поэтому такая запись решения задачи может быть полезна для изучения

асимптотических характеристик любых моментов и, следовательно, распределения вероятностей для интенсивности волнового поля. Кроме того, в ряде случаев представление поля в операторном виде позволяет найти соответствующие средние характеристики технически проще по сравнению с изучением соответствующих уравнений. Так, если мы захотим, например, вычислить величину

$$\langle \varepsilon(y, \mathbf{R}_1) I(x, \mathbf{R}) \rangle \quad (y < x),$$

то, если исходить из уравнения (13.1), следует составить дифференциальное уравнение для величины $\varepsilon(y, \mathbf{R}_1) u(x, \mathbf{R}_2) u^*(x, \mathbf{R}_3)$ при $y < x$, усреднить его по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, установить граничное условие для величины

$$\langle \varepsilon(y, \mathbf{R}_1) u(x, \mathbf{R}_2) u^*(x, \mathbf{R}_3) \rangle$$

при $x = y$, решить полученное уравнение с соответствующим граничным условием, а уже затем положить $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}$. В то же время вычисление этой величины с помощью представления в операторном виде мало чем отличается от вычисления величины $\langle \psi \psi^* \rangle$, рассмотренного выше.

Перейдем теперь к анализу асимптотического поведения флуктуаций интенсивности плоской волны в области сильных флуктуаций в случайно-неоднородной среде следуя [78] (см. также [2, 3]).

13.3.1. Асимптотический анализ флуктуаций интенсивности плоской волны

Рассмотрим статистический момент поля $u(x, \mathbf{R})$:

$$M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \left\langle \prod_{k=1}^n u(x, \mathbf{R}_{2k-1}) u^*(x, \mathbf{R}_{2k}) \right\rangle. \quad (13.57)$$

В приближении дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ моментная функция $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$ удовлетворяет уравнению (13.9) на с. 321 при $n = m$, которое для плоской падающей волны в переменных \mathbf{R}_k записывается в виде уравнения с начальным условием:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \sum_{l=1}^{2n} (-1)^{l+1} \Delta_{\mathbf{R}_l} \right) M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \\ = \frac{k^2}{8} \sum_{l,j=1}^{2n} (-1)^{l+j} D(\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_j) M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}), \quad (13.58)$$

где функция $D(\mathbf{R})$ описывается формулой

$$D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R}) = 2\pi \int d\mathbf{q} \Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q}) [1 - \cos(\mathbf{q}\mathbf{R})], \quad (13.59)$$

а $\Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q})$ — трехмерный спектр поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ от двумерного вектора \mathbf{q} .

Используя запись поля $u(x, \mathbf{R})$ в виде континуального интеграла (13.56), усредняя по полю $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, получаем выражение для $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$ в виде

$$M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \int \dots \int D\mathbf{v}_1(\xi) \dots D\mathbf{v}_{2n}(\xi) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \int_0^x d\xi \mathbf{v}_j^2(\xi) - \right. \\ \left. - \frac{k^2}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} \int_0^x d\xi D \left(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l + \int_{\xi}^x dx' [\mathbf{v}_j(x') - \mathbf{v}_l(x')] \right) \right\}. \quad (13.60)$$

Формулу (13.60) можно также получить, решая уравнение (13.58) непосредственно методом, описанным выше. Формулу (13.60) можно записать в операторной форме:

$$M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \prod_{l=1}^{2n} \exp \left\{ \frac{i}{2k} (-1)^{l+1} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}_l^2(\xi)} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{k^2}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} \int_0^x dx' D \left(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l + \int_{x'}^x d\xi [\mathbf{v}_j(\xi) - \mathbf{v}_l(\xi)] \right) \right\}_{\mathbf{v}=0}. \quad (13.61)$$

Если теперь совместить точки $\mathbf{R}_{2k-1} = \mathbf{R}_{2k}$, то функция $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$ перейдет в функцию $\left\langle \prod_{k=1}^n I(x, \mathbf{R}_{2k-1}) \right\rangle$, описывающую корреляционные характеристики интенсивности волны. Если же теперь положить все $\mathbf{R}_l = \mathbf{R}$, то функция

$$M_{nn}(x, \mathbf{R}, \dots, \mathbf{R}) = \Gamma_{2n}(x, \mathbf{R}) = \langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$$

будет описывать n -й момент интенсивности волнового поля.

Прежде чем обсуждать асимптотику функций $\Gamma_{2n}(x, \mathbf{R})$ для случая непрерывной случайной среды, рассмотрим более простую задачу о флуктуациях волнового поля за случайным фазовым экраном.

Случайный фазовый экран

Пусть имеется слой неоднородной среды, толщина которого настолько мала, что волна при прохождении через слой приобретает только случайный набег фазы

$$S(\mathbf{R}) = \frac{k}{2} \int_0^{\Delta x} d\xi \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) \quad (13.62)$$

и не меняет амплитуды. Будем считать, как и ранее, что случайное поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ — гауссово дельта-коррелированное по x поле. После прохождения неоднородного слоя волна распространяется в однородной среде, и ее распространение описывается уравнением, которое получается из (13.1) на с. 319 при $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = 0$. Решение этой задачи дается формулами

$$u(x, \mathbf{R}) = \exp \left(i \frac{x}{2k} \Delta \mathbf{R} \right) e^{iS(\mathbf{R})} = \frac{k}{2\pi i x} \int d\mathbf{v} \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \mathbf{v}^2 + iS(\mathbf{R} + \mathbf{v}) \right\}, \quad (13.63)$$

которые являются конечномерным аналогом формул (13.53), (13.56).

Рассмотрим функцию $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$. Подставляя (13.63) в (13.57) и усредняя, легко получаем формулу

$$M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^{2n} \int \dots \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_{2n} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \mathbf{v}_j^2 - \frac{k^2 \Delta x}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} D(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l + \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_l) \right\}. \quad (13.64)$$

Эта формула является аналогом (13.60).

Прежде всего рассмотрим подробнее случай $n = 2$ при попарно совмещенных точках наблюдения:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}', \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_4 = \mathbf{R}'', \quad \mathbf{R}' - \mathbf{R}'' = \boldsymbol{\rho}.$$

Тогда функция

$$\Gamma_4(x; \mathbf{R}', \mathbf{R}', \mathbf{R}'', \mathbf{R}'') = \langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle$$

— ковариация интенсивностей $I(x, \mathbf{R}) = |u(x, \mathbf{R})|^2$. Если в (13.64) (при $n = 2$) ввести новые переменные интегрирования

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{R}_1, \quad \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{R}_3, \quad \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{R},$$

то интегрирование по \mathbf{R} и \mathbf{R}_3 можно выполнить и получить в результате более простую формулу

$$\langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle = \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^2 \iint d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \exp \left\{ \frac{ik}{x} \mathbf{R}_1 (\mathbf{R}_2 - \boldsymbol{\rho}) - \frac{k^2 \Delta x}{4} F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \right\}, \quad (13.65)$$

где $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R}' - \mathbf{R}''$ и функция $F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ определяется из равенства (13.21), т. е.

$$F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = 2D(\mathbf{R}_1) + 2D(\mathbf{R}_2) - D(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) - D(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2),$$

$$D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R}).$$

Интеграл (13.65) подробно исследовался (в том числе и численными методами) во многих работах. И его асимптотика при $x \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle = 1 + \exp \left\{ -\frac{k^2 \Delta x}{2} D(\boldsymbol{\rho}) \right\} + \\ + \pi k^2 \Delta x \int d\mathbf{q} \Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) \left[1 - \cos \frac{\mathbf{q}^2 x}{k} \right] \exp \left\{ i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho} - \frac{k^2 \Delta x}{2} D\left(\frac{\mathbf{q}\mathbf{x}}{k}\right) \right\} + \\ + \pi k^2 \Delta x \int d\mathbf{q} \Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) \left[1 - \cos \left(\mathbf{q}\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{q}^2 x}{k} \right) \right] \exp \left\{ -\frac{k^2 \Delta x}{2} D\left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{q}\mathbf{x}}{k}\right) \right\} + \dots \quad (13.66)$$

Отметим, что теперь в задаче, помимо пространственного масштаба $\rho_{\text{cог}}$, появляется второй характерный пространственный масштаб

$$r_0 = \frac{x}{k\rho_{\text{cог}}}. \quad (13.67)$$

Если теперь в выражении (13.66) положить $\boldsymbol{\rho} = 0$, то для дисперсии квадрата интенсивности можно получить выражение

$$\beta^2(x) = \langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle - 1 = 1 + \pi \Delta x \int d\mathbf{q} q^4 \Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) \exp \left\{ -\frac{k^2 \Delta x}{2} D \left(\frac{\mathbf{q}x}{k} \right) \right\} + \dots \quad (13.68)$$

Если флуктуации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ в неоднородном слое вызваны турбулентностью, так что $\Phi_\varepsilon(\mathbf{q})$ описывается формулой (13.33) на с. 327, то равенство (13.68) приводит к результату

$$\beta^2(x) = 1 + 0,429 \beta_0^{-4/5}(x), \quad (13.69)$$

где $\beta_0(x)$ — дисперсия квадрата интенсивности, рассчитанная по первому приближению метода плавных возмущений для фазового экрана (13.40) на с. 328.

Изложенные соображения легко обобщаются на более высокие моментные функции поля $u(x, \mathbf{R})$ и, в частности, на функции $\Gamma_{2n}(x, \mathbf{R}) = \langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$. Формула (13.64) в этом случае имеет вид

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^{2n} \int \dots \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_{2n} \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \mathbf{v}_j^2 - F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n}) \right\}, \quad (13.70)$$

где

$$F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n}) = \frac{k^2 \Delta x}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} D(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_l). \quad (13.71)$$

Функция $F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n})$ связана со случайными набегами фазы $S(\mathbf{v}_i)$, определяемыми формулой (13.62), соотношением

$$F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n}) = \frac{1}{2} \left\langle \left[\sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} S(\mathbf{v}_j) \right]^2 \right\rangle \geq 0.$$

Отсюда ясно, что если все нечетные точки \mathbf{v}_{2l+1} совпадают попарно с какими-либо четными точками, то положительные и отрицательные набеги фаз компенсируются и функция $F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n})$ обращается в нуль. Поэтому становится очевидным, что при $\sqrt{x/k} \gg \rho_{\text{cог}}$ основной вклад в $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ будут давать те области, где происходит такая компенсация. Нетрудно подсчитать, что число таких областей равно $n!$. Тогда, заменяя (13.70) на умноженный на $n!$ интеграл лишь по одной из этих областей A_1 , в которой

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \sim |\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4| \sim \dots \sim |\mathbf{v}_{2n-1} - \mathbf{v}_{2n}| < \rho_{\text{cог}},$$

получим

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle \approx n! \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^{2n} \int_{A_1} \dots \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_{2n} \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \mathbf{v}_j^2 - F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n}) \right\}. \quad (13.72)$$

Убывание подынтегрального выражения по переменным $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4$ и т. д. обеспечивается соответствующим слагаемым из (13.71):

$$\frac{k^2 \Delta x}{8} D(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \quad \frac{k^2 \Delta x}{8} D(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_l) \quad \text{и т. д.}$$

Эти слагаемые следует оставить в показателе экспоненты, а экспоненту от остальных слагаемых следует разложить в ряд:

$$\begin{aligned} \langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle \approx n! \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^{2n} \int_{A_1} \dots \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_{2n} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \mathbf{v}_j^2 - \frac{k^2 \Delta x}{4} \sum_{l=1}^n D(\mathbf{v}_{2l-1} - \mathbf{v}_{2l}) \right\} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{k^2 \Delta x}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} '(-1)^{j+l+1} D(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_l) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (13.73)$$

Штрих у знака суммы означает, что из нее выброшены члены, вошедшие в экспоненту. В формуле (13.73) интегрирование можно распространить на все пространство, так как вне области A_1 подынтегральная функция пренебрежимо мала. С учетом этого многократный интеграл в (13.73) можно вычислить точно и получить для $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ формулу

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n! \left[1 + n(n-1) \frac{\beta^2(x) - 1}{4} + \dots \right], \quad (13.74)$$

в которой величина $\beta^2(x)$ определяется выражением (13.69). Обсуждение полученной формулы мы проведем несколько позднее, после того как рассмотрим распространение волн в непрерывной случайно-неоднородной среде, поскольку получающиеся в обоих случаях результаты аналогичны.

Случай непрерывной случайной среды

Рассмотрим теперь асимптотику высших моментных функций волнового поля $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$, распространяющегося в случайно-неоднородной среде. Формальное решение этой задачи дается выражениями (13.60), (13.61). От рассмотренных выше формул для фазового экрана они отличаются лишь заменой обычного интегрирования на континуальное. Рассмотрим сначала величину $\langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle$, которая получается из $M_{22}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_4)$ при попарном слиянии точек наблюдения $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}'$, $\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_4 = \mathbf{R}''$. Для плоской падающей волны ($u_0(\mathbf{R}) = 1$), используя (13.61) и вводя новые переменные, аналогичные случаю фазового экрана, получаем

$$(\rho = \mathbf{R}' - \mathbf{R}'')$$

$$\begin{aligned} \langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle &= \exp \left\{ \frac{i}{k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}_1(\xi) \delta \mathbf{v}_2(\xi)} \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx' \left[2D \left(\rho + \int_{x'}^x d\xi \mathbf{v}_1(\xi) \right) + 2D \left(\int_{x'}^x d\xi \mathbf{v}_2(\xi) \right) - \right. \right. \\ &\left. \left. - D \left(\rho + \int_{x'}^x d\xi [\mathbf{v}_1(\xi) + \mathbf{v}_2(\xi)] \right) - D \left(\rho + \int_{x'}^x d\xi [\mathbf{v}_1(\xi) - \mathbf{v}_2(\xi)] \right) \right] \right\}_{\mathbf{v}=0}. \quad (13.75) \end{aligned}$$

Формулу (13.75) можно записать и в виде континуального интеграла, вытекающем из (13.60), однако мы будем использовать операторную форму записи. Аналогично случаю фазового экрана выражение для $\langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle$ можно записать при $x \rightarrow \infty$ в виде

$$B_I(x, \rho) = \langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle - 1 = B_I^{(1)}(x, \rho) + B_I^{(2)}(x, \rho) + B_I^{(3)}(x, \rho), \quad (13.76)$$

где

$$B_I^{(1)}(x, \rho) = \exp \left\{ -\frac{k^2 x}{2} D(\rho) \right\},$$

$$\begin{aligned} B_I^{(2)}(x, \rho) &= \pi k^2 \int_0^x dx' \int d\mathbf{q} \Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) \left[1 - \cos \frac{\mathbf{q}^2}{k} (x - x') \right] \times \\ &\times \exp \left\{ i\mathbf{q}\rho - \frac{k^2 x'}{2} D \left(\frac{\mathbf{q}}{k} (x - x') \right) - \frac{k^2}{2} \int_{x'}^x dx'' D \left(\frac{\mathbf{q}}{k} (x - x'') \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_I^{(3)}(x, \rho) &= \pi k^2 \int_0^x dx' \int d\mathbf{q} \Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) \left[1 - \cos \left(\mathbf{q}\rho - \frac{\mathbf{q}^2}{k} (x - x') \right) \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{k^2 x'}{2} D \left(\rho - \frac{\mathbf{q}}{k} (x - x') \right) - \frac{k^2}{2} \int_{x'}^x dx'' D \left(\rho - \frac{\mathbf{q}}{k} (x - x'') \right) \right\}. \end{aligned}$$

Полагая здесь $\rho = 0$ и учитывая первый член разложения в ряд функции

$$1 - \cos \frac{\mathbf{q}^2}{k} (x - x'),$$

для дисперсии интенсивности

$$\beta^2(x) = \langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle - 1 = B_I(x, 0) - 1$$

будем иметь формулу, аналогичную (13.68):

$$\begin{aligned} \beta^2(x) &= 1 + \pi \int_0^x dx' (x - x') \int d\mathbf{q} q^4 \Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{k^2 x'}{2} D \left(\frac{\mathbf{q}}{k} (x - x') \right) - \frac{k^2}{2} \int_{x'}^x dx'' D \left(\frac{\mathbf{q}}{k} (x - x'') \right) \right\} + \dots \quad (13.77) \end{aligned}$$

Если рассмотреть случай турбулентной среды, то из (13.77) имеем

$$\beta^2(x) = 1 + 0,861 (\beta_0(x))^{-2/5}, \quad (13.78)$$

где $\beta_0(x)$ — дисперсия интенсивности волнового поля, рассчитанная по первому приближению метода плавных возмущений (13.42).

Выражение (13.77) остается в силе и в том случае, когда функции $\Phi_\varepsilon(\mathbf{q})$, $D(\rho)$ медленно меняются вдоль оси x . В этом случае легко перейти от (13.90) к (13.68), если считать, что $\Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) = 0$ вне слоя $0 \leq x' \leq \Delta x \ll x$.

Относительно корреляционной функции $B_I(x, \rho)$ отметим, что главный член $B_I^{(1)}(x, \rho)$ в (13.76) представляет собой квадрат модуля функции когерентности второго порядка (см., например, [78]).

Рассмотрим теперь высшие моментные функции $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = \Gamma_{2n}(x, 0)$. Аналогично случаю фазового экрана, легко получить, что и при распространении волн в случайно-неоднородной среде для дисперсии интенсивности волнового поля имеет место разложение

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n! \left[1 + n(n-1) \frac{\beta^2(x) - 1}{4} + \dots \right], \quad (13.79)$$

совпадающее с выражением (13.74) для фазового экрана; при этом, разумеется, $\beta^2(x)$ в каждом случае определяется различными формулами.

Формула (13.79) дает первые два члена асимптотического разложения функции $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ при $\beta_0(x) \rightarrow \infty$. Так как $\beta^2(x) \rightarrow 1$ при $\beta_0(x) \rightarrow \infty$, второе слагаемое в (13.79) мало по сравнению с первым при достаточно больших $\beta_0(x)$. Лишь в том случае, когда

$$n(n-1) \frac{\beta^2(x) - 1}{4} \ll 1, \quad (13.80)$$

выражение (13.79) имеет смысл. Однако при фиксированном $\beta_0(x)$ всегда найдутся такие номера n , для которых условие (13.80) будет нарушаться. Поэтому формула (13.79) справедлива лишь для не слишком больших n . Следует также отметить, что и выход на асимптотику (13.79) при $\beta_0^2(x) \rightarrow \infty$ может быть достаточно медленным.

Формула (13.79) приводит к плотности вероятностей для интенсивности с сингулярными особенностями. Чтобы избежать их, можно аппроксимировать эту формулу выражением (см., например, [79])

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n! \exp \left\{ n(n-1) \frac{\beta^2(x) - 1}{4} \right\}, \quad (13.81)$$

которому соответствует плотность вероятностей вида (см., например, [79, 80])

$$P(x, I) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta(x) - 1)}} \int_0^\infty dz \exp \left\{ -zI - \frac{\left[\ln z - \frac{\beta(x) - 1}{4} \right]^2}{\beta(x) - 1} \right\}. \quad (13.82)$$

Отметим, что, вообще говоря, распределение вероятностей (13.82) неприменимо в узкой окрестности $I \sim 0$ (окрестность тем уже, чем больше параметр $\beta_0(x)$). Это

связано с тем, что из формулы (13.82) следуют бесконечно большие значения для моментов величины $1/I(x, \mathbf{R})$. Однако для конечного значения $\beta_0(x)$ (сколь велико оно ни было бы) величины $\langle 1/I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ конечны и, следовательно, должно выполняться равенство $P(x, 0) = 0$. Существование такой узкой окрестности точки $I \sim 0$, конечно, не сказывается на поведении моментов (13.81) для больших значений параметра $\beta_0(x)$.

Асимптотические формулы (13.81), (13.82) описывают переход в область *насыщенных* флуктуаций интенсивности, где $\beta(x) \rightarrow 1$ при $\beta_0(x) \rightarrow \infty$. В этой области соответственно имеем

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n!, \quad P(x, I) = e^{-I}. \quad (13.83)$$

Экспоненциальное распределение вероятностей (13.83) означает, что комплексное поле $u(x, \mathbf{R})$ является гауссовым случайным полем. При этом

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R})e^{iS(x, \mathbf{R})} = u_1(x, \mathbf{R}) + iu_2(x, \mathbf{R}), \quad (13.84)$$

где $u_1(x, \mathbf{R})$ и $u_2(x, \mathbf{R})$ — действительная и мнимая части соответственно. Тогда интенсивность волнового поля

$$I(x, \mathbf{R}) = A^2(x, \mathbf{R}) = u_1^2(x, \mathbf{R}) + u_2^2(x, \mathbf{R}).$$

Гауссовость комплексного поля $u(x, \mathbf{R})$ означает, что случайные поля $u_1(x, \mathbf{R})$ и $u_2(x, \mathbf{R})$ также гауссовы статистически независимые поля с дисперсиями

$$\langle u_1^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \langle u_2^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{2}. \quad (13.85)$$

Естественно считать, что и их градиенты

$$\mathbf{p}_1(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} u_1(x, \mathbf{R}), \quad \mathbf{p}_2(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} u_2(x, \mathbf{R})$$

также статистически не зависят от полей $u_1(x, \mathbf{R})$, $u_2(x, \mathbf{R})$ и являются гауссовыми однородными и изотропными полями в плоскости \mathbf{R} с дисперсиями

$$\sigma_{\mathbf{p}}^2(x) = \langle \mathbf{p}_1^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \langle \mathbf{p}_2^2(x, \mathbf{R}) \rangle. \quad (13.86)$$

Следовательно, совместная плотность вероятностей полей $u_1(x, \mathbf{R})$, $u_2(x, \mathbf{R})$ и их градиентов $\mathbf{p}_1(x, \mathbf{R})$ и $\mathbf{p}_2(x, \mathbf{R})$ имеет вид

$$P(x; u_1, u_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{\pi^3 \sigma_{\mathbf{p}}^4(x)} \exp \left\{ -u_1^2 - u_2^2 - \frac{\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2}{\sigma_{\mathbf{p}}^2(x)} \right\}. \quad (13.87)$$

Рассмотрим теперь совместную плотность вероятностей интенсивности волнового поля $I(x, \mathbf{R})$ и градиента амплитуды:

$$\kappa(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} A(x, \mathbf{R}) = \frac{u_1(x, \mathbf{R})\mathbf{p}_1(x, \mathbf{R}) + u_2(x, \mathbf{R})\mathbf{p}_2(x, \mathbf{R})}{\sqrt{u_1^2(x, \mathbf{R}) + u_2^2(x, \mathbf{R})}}.$$

Для нее имеем

$$\begin{aligned} P(x; I, \kappa) &= \langle \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \delta(\kappa(x, \mathbf{R}) - \kappa) \rangle_{u_i, \mathbf{p}_i} = \\ &= \frac{1}{\pi^3 \sigma_{\mathbf{p}}^4(x)} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} du_2 \int d\mathbf{p}_1 \int d\mathbf{p}_2 \exp \left\{ -u_1^2 - u_2^2 - \frac{\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2}{\sigma_{\mathbf{p}}^2(x)} \right\} \times \\ &\times \delta \left(u_1^2 + u_2^2 - I \right) \delta \left(\frac{u_1 \mathbf{p}_1 + u_2 \mathbf{p}_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} - \kappa \right) = \frac{1}{2\pi \sigma_{\mathbf{p}}^2(x)} \exp \left\{ -I - \frac{\kappa^2}{2\sigma_{\mathbf{p}}^2(x)} \right\}, \end{aligned} \quad (13.88)$$

и, следовательно, поперечный градиент амплитуды статистически не зависит от интенсивности волнового поля и является гауссовым случайным полем с дисперсией

$$\langle \kappa^2(x, \mathbf{R}) \rangle = 2\sigma_{\mathbf{p}}^2(x). \quad (13.89)$$

Отметим, что поперечный градиент амплитуды также статистически не зависит от вторых производных по поперечным координатам интенсивности волнового поля.

В области сильных флуктуаций интенсивности функция когерентности второго порядка не зависит от дифракционных явлений и описывается выражением

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x, \mathbf{R} - \mathbf{R}') &= \langle u(x, \mathbf{R})u^*(x, \mathbf{R}') \rangle = \\ &= \langle u_1(x, \mathbf{R})u_1^*(x, \mathbf{R}') \rangle + \langle u_2(x, \mathbf{R})u_2^*(x, \mathbf{R}') \rangle = \exp \left(-\frac{1}{4}k^2 x D(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \right), \end{aligned} \quad (13.90)$$

где $D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R})$. И, следовательно, величина $\sigma_{\mathbf{p}}^2(x)$ из (13.85) определяется выражением

$$\sigma_{\mathbf{p}}^2(x) = \frac{k^2 x}{8} \Delta_{\mathbf{R}} D(\mathbf{R}) \Big|_{\mathbf{R}=0} = -\frac{k^2 x}{8} \Delta_{\mathbf{R}} A(\mathbf{R}) \Big|_{\mathbf{R}=0},$$

которое для турбулентных флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ совпадает, естественно, с формулой (13.44) на с. 329:

$$\sigma_{\mathbf{p}}^2(x) = \frac{1,476}{L_f^2(x)} D^{1/6}(x) \beta_0(x), \quad (13.91)$$

где $L_f(x) = \sqrt{x/k}$ — размер первой зоны Френеля, $D(x) = \kappa_m^2 x/k \gg 1$ — волновой параметр, а κ_m — волновое число, соответствующее микромасштабу турбулентности.

В заключение этого раздела отметим, что представление поля $u(x, \mathbf{R})$ в виде континуального интеграла позволяет исследовать и вопрос о пределах применимости приближения дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для флуктуаций интенсивности волны. При этом оказывается, что все условия применимости дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для вычисления величины $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ совпадают с условиями применимости дельта-коррелированного приближения для величины $\langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle$. Иначе говоря, приближение дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ не изменяет вида распределения вероятностей для интенсивности волнового поля.

Для турбулентных пульсаций температуры в области слабых флуктуаций приближение дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ справедливо при выполнении неравенств

$$\lambda \ll \sqrt{\lambda x} \ll x,$$

где $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны.

В области же сильных флуктуаций условием применимости приближения дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ является условие

$$\lambda \ll \rho_{\text{cog}} \ll r_0 \ll x,$$

где ρ_{cog} и r_0 определяются формулами (13.20) на с. 323 и (13.67) на с. 336. Все эти неравенства имеют простой физический смысл. Пока в задаче о распространении волны в среде со случайными неоднородностями наименьшим из всех продольных масштабов является радиус корреляции $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ (его роль для турбулентных пульсаций температуры играет размер первой зоны Френеля), справедливо дельта-коррелированное приближение. При распространении волны в область сильных флуктуаций появляется продольный масштаб $\sim \rho_{\text{cog}}\sqrt{kx}$, который постепенно уменьшается, так что при достаточно большом значении параметра $\beta_0(x)$ он может стать меньше радиуса корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. При возникновении такой ситуации уже нельзя пользоваться дельта-коррелированным приближением.

Приведенные выше неравенства можно рассматривать и как ограничения снизу и сверху на величину масштаба функции корреляции интенсивности. При этом дельта-коррелированное приближение справедливо лишь в том случае, когда любые масштабы, возникающие в задаче, остаются малыми по сравнению с длиной трассы.

13.4. Элементы статистической топографии случайного поля интенсивности

Рассмотренные выше статистические характеристики волнового поля $u(x, \mathbf{R})$, например его корреляционная функция или средняя интенсивность в области сильных флуктуаций, совершенно не отражают реального поведения волнового поля в отдельных реализациях параметров среды (см. рис. 1.16, рис. 1.17 на с. 50). В общем случае интенсивность волнового поля описывается уравнением (13.25) на с. 325:

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} [I(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})] = 0, \quad I(0, \mathbf{R}) = I_0(\mathbf{R}). \quad (13.92)$$

Отсюда следует, что в общем случае произвольного падающего волнового пучка сохраняется мощность волнового поля в плоскости $x = \text{const}$:

$$E_0 = \int I(x, \mathbf{R}) d\mathbf{R} = \int I_0(\mathbf{R}) d\mathbf{R}.$$

Уравнение (13.92) можно трактовать как уравнение переноса консервативной примеси в потенциальном поле скоростей, для которой возникает кластерная структура

поля примеси. Следовательно, реализации поля интенсивности волны также должны иметь кластерный характер. Это явление в рассматриваемом случае проявляется в виде каустических структур из-за эффектов случайных фокусировок и дефокусировок волнового поля в случайной среде. Так, на рис. 13.1 приведены фотографии поперечного сечения лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной среде в лабораторных исследованиях [81] при различных интенсивностях флуктуаций диэлектрической проницаемости. Аналогичные фотографии из работы [82] приведены на рис. 13.2. Эти фотографии получены путем численного моделирования, выполненного в работах [83, 84]. На этих рисунках ясно видно возникновение каустической структуры волнового поля.

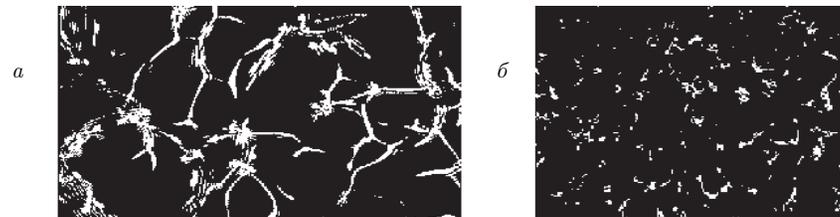


Рис. 13.1. Поперечное сечение лазерного пучка при распространении в турбулентной среде (в лабораторных условиях) в области сильных фокусировок (а) и в области сильных (насыщенных) флуктуаций (б)

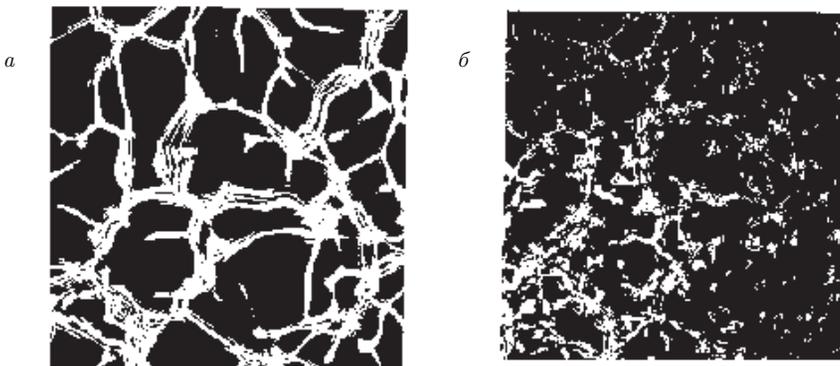


Рис. 13.2. Поперечное сечение лазерного пучка при распространении в турбулентной среде (численное моделирование) в области сильных фокусировок (а) и в области сильных (насыщенных) флуктуаций (б)

Для анализа детальной структуры случайного волнового поля можно воспользоваться методами статистической топографии [70], которые позволяют понять, каким образом образуется каустическая структура волнового поля, и выяснить, какими статистическими параметрами она описывается.

Для плоской падающей волны, в силу пространственной однородности, все одно-точечные статистические характеристики, в том числе и плотности вероятностей, не

зависят от переменной \mathbf{R} . В этом случае можно ввести удельные (приходящиеся на единицу площади) значения ряда физических величин, достаточно полно характеризующих кластерную структуру интенсивности волнового поля. При этом, как указывалось выше, естественным масштабом длины в плоскости $x = \text{const}$, не зависящим от параметров среды, является размер *первой зоны Френеля* $L_f(x) = \sqrt{x/k}$, определяющий размер переходной области свет-тень при дифракции на краю непрозрачного экрана. К таким величинам относятся:

- удельная средняя общая площадь областей в плоскости $\{\mathbf{R}\}$, ограниченных линиями уровня, где $I(x, \mathbf{R}) > I$,

$$\langle s(x, I) \rangle = \int_I^\infty dI' P(x; I'),$$

где $P(x; I)$ — плотность вероятностей интенсивности волнового поля $I(x, \mathbf{R})$;

- удельная средняя мощность поля, заключенная в этих областях,

$$\langle e(x, I) \rangle = \int_I^\infty I' dI' P(x; I');$$

- удельное среднее значение длины этих контуров

$$\langle l(x, I) \rangle = L_f(x) \langle |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle,$$

где $\mathbf{p}(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} I(x, \mathbf{R})$ — поперечный градиент интенсивности волнового поля;

- оценка для среднего числа разности числа контуров с противоположной ориентацией векторов нормали, приходящихся на первую зону Френеля:

$$\langle n(x, I) \rangle = \frac{1}{2\pi} L_f^2(x) \langle \kappa(x, \mathbf{R}; I) |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle,$$

где $\kappa(x, \mathbf{R}; I)$ — кривизна линии уровня,

$$\begin{aligned} \kappa(x, \mathbf{R}; I) = \\ = \frac{-p_y^2(x, \mathbf{R}) \frac{\partial^2 I(x, \mathbf{R})}{\partial z^2} - p_z^2(x, \mathbf{R}) \frac{\partial^2 I(x, \mathbf{R})}{\partial y^2} + 2p_y(x, \mathbf{R}) p_z(x, \mathbf{R}) \frac{\partial^2 I(x, \mathbf{R})}{\partial y \partial z}}{p^3(x, \mathbf{R})}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь динамику всех этих величин в зависимости от проходимой волной дистанции x (параметра $\beta_0(x)$).

13.4.1. Область слабых флуктуаций интенсивности

Область слабых флуктуаций интенсивности ограничивается значениями параметра $\beta_0(x) \leq 1$, и в этом случае интенсивность волнового поля имеет логнормальный характер и описывается выражением (13.37) на с. 328.

Для этого логарифмически нормального процесса кривой типичной реализации случайной интенсивности является экспоненциально спадающая с дистанцией кривая

$$I^*(x) = e^{-\beta_0(x)/2},$$

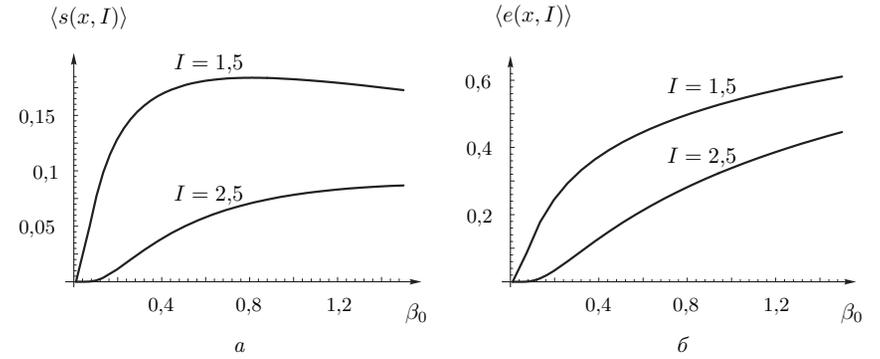


Рис. 13.3. Зависимости средних удельной площади (а) и мощности (б) от параметра $\beta_0(x)$

и формирование статистики (например, моментных функций $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$) осуществляется за счет больших выбросов процесса $I(x, \mathbf{R})$ относительно этой кривой.

Кроме того, для реализаций логарифмически нормального процесса существуют также различные мажорантные оценки. Так, например, с вероятностью $p = 1/2$ для отдельных реализаций интенсивности волнового поля выполняется неравенство

$$I(x) < 4e^{-\beta_0(x)/4}$$

на всем интервале расстояний $x \in (0, \infty)$. Все эти обстоятельства указывают на начало образования кластерной структуры интенсивности волнового поля.

Знание плотности вероятностей (13.37) позволяет, как указывалось выше, получить некоторые количественные характеристики таких кластерных образований. Так, средняя удельная площадь областей, внутри которых $I(x, \mathbf{R}) > I$, равна

$$\langle s(x, I) \rangle = \text{Pr} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_0(x)}} \ln \left(\frac{1}{I} e^{-\beta_0(x)/2} \right) \right), \quad (13.93)$$

а удельная средняя мощность, сосредоточенная в этих областях, описывается выражением

$$\langle e(x, I) \rangle = \text{Pr} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_0(x)}} \ln \left(\frac{1}{I} e^{\beta_0(x)/2} \right) \right), \quad (13.94)$$

где $\text{Pr}(z)$ — интеграл вероятностей (4.18) на с. 94.

Характер пространственной эволюции кластерной структуры при изменении параметра $\beta_0(x)$ существенно зависит от фиксируемого уровня I . В наиболее интересном случае $I > 1$, в начальной плоскости $\langle s(0, I) \rangle = 0$ и $\langle e(0, I) \rangle = 0$. С ростом $\beta_0(x)$ образуются небольшие кластерные области, где $I(x, \mathbf{R}) > I$, практически сохраняющиеся на некоторых расстояниях и интенсивно втягивающие в себя значительную часть общей мощности. В дальнейшем площади этих областей уменьшаются с увеличением $\beta_0(x)$, а содержащаяся в них мощность увеличивается, что соответствует увеличению средней яркости внутри этих областей. Данные процессы связаны с фокусировкой

излучения отдельными участками среды. На рис. 13.3, *a, б* приведены графики изменения функций $\langle s(x, I) \rangle$ и $\langle e(x, I) \rangle$ в зависимости от параметра $\beta_0(x)$ из указанного диапазона значений. Максимальная величина средней удельной площади достигается при $\beta_0(x) = 2 \ln(I)$ и

$$\langle s(x, I) \rangle_{\max} = \text{Pr} \left(-\sqrt{2 \ln I} \right).$$

При этом значении $\beta_0(x)$ средняя мощность $\langle e(x, I) \rangle = 1/2$.

В области слабых флуктуаций интенсивности пространственный градиент уровня амплитуды $\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})$ статистически не зависит от $\chi(x, \mathbf{R})$. Это позволяет как вычислить удельную среднюю длину контуров $I(x, \mathbf{R}) = I$, так и оценить удельное среднее число таких контуров. В самом деле, плотность вероятностей для градиента уровня амплитуды $\mathbf{q}(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})$ в области слабых флуктуаций имеет вид гауссова распределения:

$$P(x; \mathbf{q}) = \langle \delta(\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R}) - \mathbf{q}) \rangle = \frac{1}{\sigma_{\mathbf{q}}^2(x)} \exp \left\{ -\frac{\mathbf{q}^2}{\sigma_{\mathbf{q}}^2(x)} \right\}, \quad (13.95)$$

где $\sigma_{\mathbf{q}}^2(x) = \langle \mathbf{q}^2(x, \mathbf{R}) \rangle$ — дисперсия градиента уровня амплитуды, описываемая формулой (13.44).

Следовательно, для удельной средней длины контуров получаем выражение

$$\langle l(x, I) \rangle = 2L_f(x) \langle |q(x, \mathbf{R})| \rangle IP(x; I) = L_f(x) \sqrt{\pi \sigma_{\mathbf{q}}^2(x)} IP(x; I). \quad (13.96)$$

Аналогичным образом, для удельного среднего числа контуров имеем

$$\begin{aligned} \langle n(x, I) \rangle &= \frac{1}{2\pi} L_f^2(x) \langle \kappa(x, \mathbf{R}, I) | \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ &= -\frac{1}{2\pi} L_f^2(x) I \langle \Delta_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R}) \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ &= -\frac{1}{\pi} L_f^2(x) \langle \mathbf{q}^2(x, \mathbf{R}) \rangle I \frac{\partial}{\partial I} IP(x; I) = \frac{L_f^2(x) \sigma_{\mathbf{q}}^2(x)}{\pi \beta_0(x)} \ln \left(I e^{\beta_0(x)/2} \right) IP(x; I). \end{aligned} \quad (13.97)$$

Отметим, что при значении $I = I_0(x) = e^{-\frac{1}{2}\beta_0(x)}$ выражение (13.97) обращается в нуль. Это означает, что для данного уровня интенсивности среднее удельное число контуров, ограничивающих область $I(x, \mathbf{R}) > I_0$, совпадает со средним удельным числом контуров, для которых $I(x, \mathbf{R}) < I_0$. Графики зависимости $\langle l(x, I) \rangle$ и $\langle n(x, I) \rangle$ от параметра $\beta_0(x)$ приведены на рис. 13.4, *a, б*.

Зависимость средней удельной длины линий уровня и среднего удельного числа контуров от микромасштаба турбулентности указывает на существование мелкой ряби, накладывающейся на крупномасштабный случайный рельеф. Эта рябь не влияет на перераспределение площадей и мощности, но ведет к большей изрезанности линий уровня и появлению малых контуров.

Как указывалось ранее, полученное описание справедливо при значениях $\beta_0(x) \leq 1$. При дальнейшем увеличении параметра $\beta_0(x)$ метод плавных возмущений уже неприменим и необходимо принимать во внимание нелинейный характер уравнения для комплексной фазы волнового поля. Эта область флуктуаций, называемая

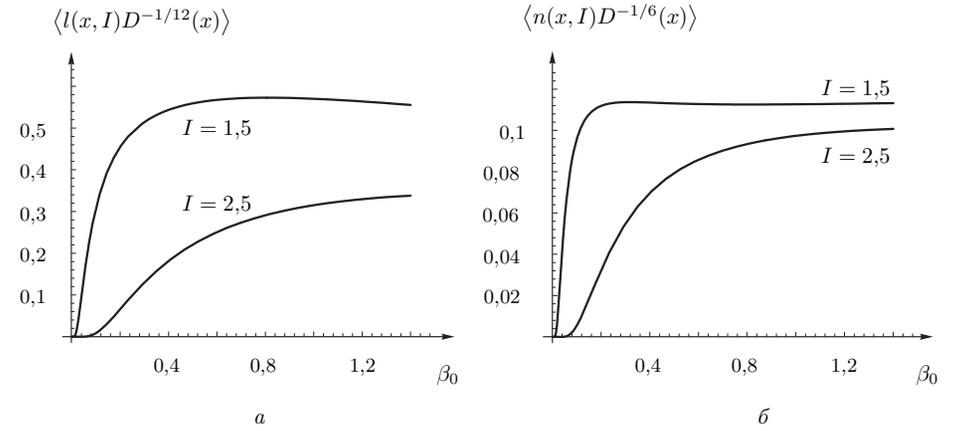


Рис. 13.4. Зависимости средних удельной длины контуров (*a*) и их числа (*б*) от параметра $\beta_0(x)$

областью сильных фокусировок, очень трудна для аналитических исследований. При дальнейшем же увеличении параметра $\beta_0(x)$ ($\beta_0^2(x) \geq 10$) статистические характеристики интенсивности выходят на режим насыщения, и эта область изменения параметра $\beta_0(x)$ называется *областью сильных флуктуаций интенсивности*.

13.4.2. Область сильных флуктуаций интенсивности

Из выражения для плотности вероятностей (13.82) следует, что средняя удельная площадь областей, внутри которых $I(x, \mathbf{R}) > I$, равна

$$\langle s(x, I) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta(x) - 1)}} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z} \exp \left\{ -zI - \frac{[\ln z - (\beta(x) - 1)/4]^2}{\beta(x) - 1} \right\}, \quad (13.98)$$

а удельная средняя мощность, сосредоточенная в этих областях, описывается выражением

$$\begin{aligned} \langle e(x, I) \rangle &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta(x) - 1)}} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z} \left(I + \frac{1}{z} \right) \exp \left\{ -zI - \frac{[\ln z - (\beta(x) - 1)/4]^2}{\beta(x) - 1} \right\}. \end{aligned} \quad (13.99)$$

На рис. 13.5, *a, б* приведены графики зависимости выражений (13.98) и (13.99) от параметра $\beta(x)$. Отметим очень медленную зависимость параметра $\beta(x)$ от $\beta_0(x)$. Так, предельному переходу $\beta_0(x) \rightarrow \infty$ соответствует значение параметра $\beta(x) = 1$, а величине $\beta_0(x) = 1$ соответствует значение параметра $\beta(x) = 1,861$.

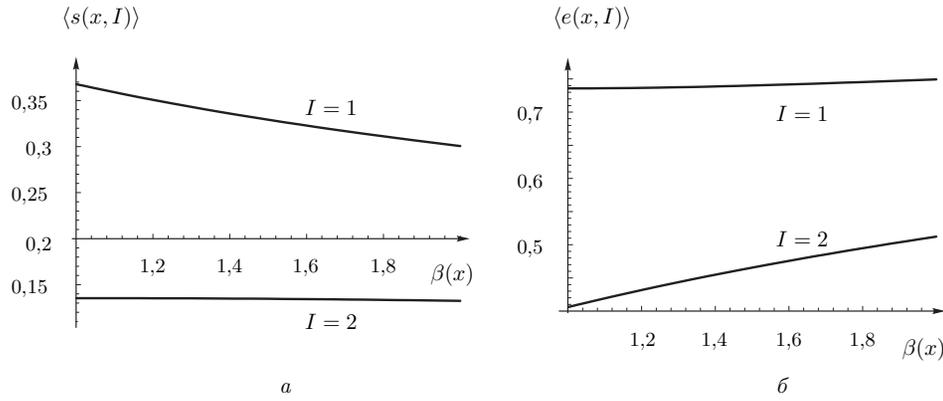


Рис. 13.5. Зависимости средних удельной площади (а) и мощности (б) в области сильных флуктуаций интенсивности от параметра $\beta(x)$

Асимптотические формулы (13.98), (13.99) описывают переход в область насыщенных флуктуаций интенсивности ($\beta(x) \rightarrow 1$). В этой области соответственно имеем

$$P(I) = e^{-I}, \quad \langle s(I) \rangle = e^{-I}, \quad \langle e(I) \rangle = (I+1)e^{-I}, \quad (13.100)$$

а для удельной средней длины контуров получаем выражение

$$\begin{aligned} \langle l(x, I) \rangle &= L_f(x) \langle |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = 2L_f(x) \sqrt{I} \langle |\boldsymbol{\kappa}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ &= 2L_f(x) \sqrt{I} \langle |\mathbf{q}(x, \mathbf{R})| \rangle P(x; I) = L_f(x) \sqrt{2\pi\sigma_{\mathbf{q}}^2(x)I} P(x; I), \end{aligned} \quad (13.101)$$

где дисперсия градиента уровня амплитуды в области насыщенных флуктуаций совпадает с дисперсией, вычисленной по первому приближению метода плавных возмущений. Максимальное значение в (13.101) достигается при $I = 1/\sqrt{2}$.

Для оценки среднего удельного числа контуров в этой области имеем

$$\begin{aligned} \langle n(x, I) \rangle &= \frac{L_f^2(x)}{2\pi} \langle \boldsymbol{\kappa}(x, \mathbf{R}, I) | \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) | \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ &= -\frac{L_f^2(x)}{2\pi} \sqrt{I} \langle \Delta_{\mathbf{R}} A(x, \mathbf{R}) \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = -\frac{L_f^2(x)}{\pi} \langle \boldsymbol{\kappa}^2(x, \mathbf{R}) \rangle \sqrt{I} \frac{\partial}{\partial I} \sqrt{I} P(x; I) = \\ &= -\frac{2L_f^2(x)\sigma_{\mathbf{q}}^2(x)}{\pi} \sqrt{I} \frac{\partial}{\partial I} \sqrt{I} e^{-I} = \frac{2L_f^2(x)\sigma_{\mathbf{q}}^2(x)}{\pi} \left(I - \frac{1}{2} \right) e^{-I}. \end{aligned} \quad (13.102)$$

Максимальное значение в (13.102) достигается при $I = 3/2$, а значение уровня, при котором среднее удельное число контуров, ограничивающих область $I(x, \mathbf{R}) > I_0$, совпадает со средним удельным числом контуров, для которых $I(x, \mathbf{R}) < I_0$, в данном случае равно $I_0 = 1/2$.

Отметим, что формула (13.102) неприменима в узкой окрестности значения $I \sim 0$. Для $I = 0$ должно быть $\langle n(x, 0) \rangle = 0$.

Как видно из выражений (13.101), (13.102) в области насыщенных флуктуаций средняя длина линий уровня и среднее число контуров продолжает расти с ростом параметра $\beta_0(x)$, хотя ограниченные ими средние площади и мощности, заключенные в них, остаются постоянными. Это связано с тем, что определяющую роль в этом режиме играет интерференция парциальных волн, приходящих с разных направлений.

Динамическая картина поведения линий уровня зависит от соотношения между процессами фокусировки и дефокусировки излучения отдельными участками турбулентной среды. Фокусировка на неоднородностях большого масштаба проявляется в возникновении высоких пиков на случайном рельефе интенсивности. В режиме максимальных фокусировок ($\beta_0(x) \sim 1$) около половины всей мощности волны концентрируется в узких высоких пиках. При увеличении параметра $\beta_0(x)$ начинает преобладать дефокусировка излучения, приводящая к расплыванию высоких пиков и образованию сильноизрезанного (интерференционного) рельефа с большим числом вершин уровня $I \sim 1$.

Средняя длина уровня и среднее число контуров зависят, кроме параметра $\beta_0(x)$, также от волнового параметра $D(x)$, т. е. растут с уменьшением микромасштаба неоднородностей. Это связано с тем, что на более крупномасштабный рельеф накладываются мелкая рябь, возникающая вследствие рассеяния на малых неоднородностях.

Таким образом, мы сделали попытку дать качественное объяснение кластерной (каустической) структуры волнового поля плоской световой волны в поперечной плоскости при распространении ее в турбулентной среде и количественно оценить параметры такой структуры. В общем случае задача является многопараметрической. Однако если ограничиться анализом задачи в фиксированной плоскости, то для плоской волны, при постоянном значении волнового параметра, решение задачи описывается единственным параметром — дисперсией интенсивности в области слабых флуктуаций $\beta_0(x)$. Мы проанализировали два крайних асимптотических случая, соответствующие слабым и насыщенным флуктуациям интенсивности. Следует заметить, что, скорее всего, пределы применимости асимптотических формул зависят от величины уровня интенсивности I . Естественно думать, что для меньших значений уровня эти пределы расширяются.

Для анализа же наиболее интересного с точки зрения приложений промежуточного случая, соответствующего области развитой каустической структуры, требуется знание плотности вероятностей интенсивности и ее поперечного градиента для произвольного значения дистанции, пройденной волной. Такой анализ можно произвести либо используя аппроксимирующие выражения для плотности вероятностей для всех значений параметров [80], либо на основе численного моделирования, выполненного, например, в работах [83–85].

Задачи

Задача 13.1. Получить функцию когерентности второго порядка и среднюю интенсивность волнового поля на оси параболического волновода в задаче, описываемой динамическим уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} [-\alpha^2 \mathbf{R}^2 + \varepsilon(x, \mathbf{R})] u(x, \mathbf{R}),$$

в приближении гауссова однородного, изотропного и дельта-коррелированного по x случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ с параметрами

$$\langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \rangle = 0, \quad B_{\varepsilon}(x, \mathbf{R}) = B_{\varepsilon}^{\text{eff}}(x, \mathbf{R}) = A(\mathbf{R})\delta(x).$$

Решение.

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = \frac{e^{-i\alpha \mathbf{R} \rho \tan(\alpha x)}}{\cos^2(\alpha x)} \int d\mathbf{q} \gamma_0 \left(\mathbf{q}, \frac{1}{\cos(\alpha x)} \rho - \frac{\mathbf{q}}{\alpha k} \tan(\alpha x) \right) \times \\ \times \exp \left\{ i \frac{1}{\cos(\alpha x)} \mathbf{q} \mathbf{R} - \frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\frac{\cos(\alpha \xi)}{\cos(\alpha x)} \rho - \frac{1}{\alpha k} \frac{\sin[\alpha(x-\xi)]}{\cos(\alpha x)} \mathbf{q} \right) \right\},$$

где

$$\gamma_0(\mathbf{q}, \rho) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} \Gamma_2(0, \mathbf{R}, \rho) e^{-i\mathbf{q} \mathbf{R}},$$

а $D(\rho) = A(0) - A(\rho)$.

Полагая $\mathbf{R} = 0$ и $\rho = 0$, получаем изменение средней интенсивности волнового поля вдоль оси волновода:

$$\langle I(x, \mathbf{0}) \rangle = \frac{1}{\cos^2(\alpha x)} \int d\mathbf{q} \gamma_0 \left(\mathbf{q}, -\frac{\mathbf{q}}{\alpha k} \tan(\alpha x) \right) \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\frac{1}{\alpha k} \frac{\sin(\alpha \xi)}{\cos(\alpha x)} \mathbf{q} \right) \right\}.$$

Задача 13.2. Исходя из параболического уравнения (13.1) получить уравнения для среднего поля $\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$ и функции когерентности второго порядка

$$\Gamma_2(x; \mathbf{R}, \rho) = \left\langle u \left(x, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\rho \right) u^* \left(x, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\rho \right) \right\rangle$$

в рамках диффузионного приближения [86, 87].

Решение.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right) \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \\ = -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx' \int d\mathbf{R}' B_{\varepsilon}(x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') e^{\frac{i\alpha'}{2k} \Delta_{\mathbf{R}}} \left[\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') e^{-\frac{i\alpha'}{2k} \Delta_{\mathbf{R}}} \langle u(x, \mathbf{R}') \rangle \right],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\rho} \right) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = \\ = -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx_1 \int d\mathbf{R}_1 \left[B_{\varepsilon} \left(x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1 + \frac{1}{2}\rho \right) - B_{\varepsilon} \left(x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1 - \frac{1}{2}\rho \right) \right] \times \\ \times e^{\frac{i\alpha}{k} x_1 \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\rho}} \left[\delta \left(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 + \frac{1}{2}\rho \right) - \delta \left(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 - \frac{1}{2}\rho \right) \right] e^{-\frac{i\alpha}{k} x_1 \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\rho}} \Gamma_2(x - x_1, \mathbf{R}, \rho).$$

Если теперь ввести двумерную спектральную плотность неоднородностей по поперечным координатам:

$$B_{\varepsilon}(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{q} \Phi_{\varepsilon}^{(2)}(x, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \mathbf{R}}, \quad \Phi_{\varepsilon}^{(2)}(x, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} B_{\varepsilon}(x, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q} \mathbf{R}}$$

и Фурье-образ волнового поля $u(x, \mathbf{R})$ и функции когерентности второго порядка $\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho)$ по поперечным координатам

$$u(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{q} \tilde{u}(x, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \mathbf{R}}, \quad \tilde{u}(x, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} u(x, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q} \mathbf{R}},$$

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = \int d\mathbf{q} \tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}, \rho) e^{i\mathbf{q} \mathbf{R}},$$

$$\tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}, \rho) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) e^{-i\mathbf{q} \mathbf{R}},$$

то получаем выражение для среднего поля

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{R}' u_0(\mathbf{R}') \exp \left\{ i\mathbf{q}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') - i\frac{\mathbf{q}^2 x}{2} - \frac{k^2}{2} \int_0^x dx' D(x', \mathbf{q}) \right\},$$

где

$$D(x, \mathbf{q}) = \int_0^x d\xi \int d\mathbf{q}' \Phi_{\varepsilon}^{(2)}(\xi, \mathbf{q}') \exp \left\{ -\frac{i\xi}{2k} (\mathbf{q}'^2 - 2\mathbf{q}' \mathbf{q}) \right\},$$

а для функции $\tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}, \rho)$ получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{k} \mathbf{q} \nabla_{\rho} \right) \tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}, \rho) = -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx_1 \int d\mathbf{q}_1 \Phi_{\varepsilon}^{(2)}(x_1, \mathbf{q}_1) \times \\ \times \left\{ \cos \left[\frac{x_1}{2k} \mathbf{q}_1 (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}) \right] - \cos \left[\mathbf{q}_1 \rho - \frac{x_1}{2k} \mathbf{q}_1 (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}) \right] \right\} \tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}_1, \rho).$$

При расстояниях, проходимых волной $x \gg l_{\parallel}$, где l_{\parallel} — продольный радиус корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, получаем

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{R}' u_0(\mathbf{R}') \exp \left\{ i\mathbf{q}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') - i\frac{\mathbf{q}^2 x}{2} - \frac{k^2}{2} x D(\mathbf{q}) \right\},$$

где

$$D(\mathbf{q}) = \int_0^{\infty} d\xi \int d\mathbf{q}' \Phi_{\varepsilon}^{(2)}(\xi, \mathbf{q}') \exp \left\{ -\frac{i\xi}{2k} (\mathbf{q}'^2 - 2\mathbf{q}' \mathbf{q}) \right\}.$$

Для плоской падающей волны $u_0(\mathbf{R}) = 1$, и, следовательно, получаем не зависящее от \mathbf{R} выражение

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} k^2 x D(0) \right\}.$$

Условием применимости этого выражения является условие

$$\frac{k^2}{2} D(0) l_{\parallel} \ll 1.$$

Задача 13.3. Получить операторное выражение для среднего поля плоской падающей волны в общем случае гауссового поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ с корреляционной функцией $B_\varepsilon(x, \mathbf{R})$ и вычислить среднее поле для дельта-коррелированного приближения.

Решение. Усредняя выражение (13.53) на с. 331 по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, получаем в общем случае выражение

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0 \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{k^2}{8} \int_0^x d\xi_1 \int_0^x d\xi_2 B_\varepsilon \left(\xi_1 - \xi_2, \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right\} \Big|_{\mathbf{v}(x)=0}.$$

Для гауссового дельта-коррелированного поля с корреляционной функцией (13.5) на с. 320 – $B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) = A(\mathbf{R})\delta(x)$ и, следовательно, получаем выражение

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0 \exp \left\{ -\frac{k^2}{8} A(0)x \right\}.$$

Задача 13.4. Получить операторное выражение для функции когерентности второго порядка для плоской падающей волны в общем случае гауссового поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ с корреляционной функцией $B_\varepsilon(x, \mathbf{R})$ и вычислить функцию когерентности второго порядка для дельта-коррелированного приближения.

Решение. Для функции когерентности второго порядка для плоской падающей волны имеем операторное выражение

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) = \langle u(x, \mathbf{R}_1) u^*(x, \mathbf{R}_2) \rangle = |u_0|^2 \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \left[\frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}_1^2(\xi)} - \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}_2^2(\xi)} \right] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 + \int_{\xi}^x d\eta [\mathbf{v}_1(\eta) - \mathbf{v}_2(\eta)] \right) \right\} \Big|_{\mathbf{v}_i=0},$$

где $D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R})$.

Делая функциональную замену переменных

$$\mathbf{v}_1(x) - \mathbf{v}_2(x) = \mathbf{v}(x), \quad \mathbf{v}_1(x) + \mathbf{v}_2(x) = 2\mathbf{V}(x)$$

и обозначая

$$\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 = \boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = 2\mathbf{R},$$

получаем решение задачи в виде

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) = |u_0|^2 \exp \left\{ \frac{i}{k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}(\xi) \delta \mathbf{V}(\xi)} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\boldsymbol{\rho} + \int_{\xi}^x d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right\} \Big|_{\mathbf{v}_i=0} = |u_0|^2 \exp \left\{ -\frac{k^2 x D(\boldsymbol{\rho})}{4} \right\}.$$

Список литературы

1. Новиков Е. А. Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности // ЖЭТФ. 1964. Т. 47, № 5. С. 1919–1926.
2. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения глазами физика. Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения. — М.: Физматлит, 2001.
3. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения. Теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиоп физике. Т. 1, 2 — М.: Физматлит, 2008.
4. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. Радио, 1961.
5. Кляцкин В. И., Саичев А. И. Статистическая теория диффузии плавучей пассивной примеси в случайном поле скоростей // ЖЭТФ. 1997. Т. 111, № 4. С. 1297–1313.
6. Кляцкин В. И., Саичев А. И. Статистическая и динамическая локализация плоских волн в случайных слоистых средах // УФН. 1992. Т. 162, № 3. С. 161–194.
7. Кляцкин В. И., Гурарий Д. Когерентные явления в стохастических динамических системах // УФН. 1999. Т. 169, № 2. С. 171–207.
8. Nicolis G., Prigogin I. Exploring Complexity, an Introduction — N. Y.: W. H. Freeman and Company, 1989.
9. Isichenko M. B. Percolation, statistical topography, and transport in random media // Rev. Modern Phys. 1992. V. 64, № 4. P. 961–1043.
10. Кляцкин В. И., Кошель К. В. Простейший пример возникновения кластерной структуры поля пассивной примеси в случайных потоках // УФН. 2000. Т. 170, № 7. С. 771–778.
11. Кляцкин В. И. Кластеризация и диффузия частиц и плотности пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках // УФН. 2003. Т. 173, № 7. С. 689–710.
12. Кляцкин В. И. Статистическая топография и ляпуновские экспоненты в динамических стохастических системах // УФН. 2008. Т. 178, № 4. С. 419–431.

13. *Кляцкин В. И.* Современные методы описания стохастических динамических систем // УФН. 2009. Т. 179, № 5. С. 547–553.
14. *Кляцкин В. И., Чхетиани О. Г.* О диффузии и кластеризации магнитного поля в случайных полях скоростей // ЖЭТФ. 2009. Т. 136, № 2(8). С. 400–413.
15. *Кляцкин В. И.* Интегральные характеристики - ключ к пониманию структурообразования в стохастических динамических системах // УФН. 2011. Т. 180.
16. *Кошель К. В., Александрова О. В.* Некоторые результаты численного моделирования диффузии пассивной примеси в случайном поле скоростей // Изв. АН, Физ. атмосфер. и океана. 1999. Т. 35, № 5. С. 638–648.
17. *Zirbel C. L., Çinlar E.* Mass transport by Brownian motion / In: Stochastic Models in Geosystems, eds. S.A. Molchanov, W.A. Woyczynski, IMA Volumes in Math. and its Appl., 1996. V. 85. P. 459–492. — N.Y.: Springer-Verlag.
18. *Ареф Х.* Развитие хаотической адвекции // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2, № 1. С. 111–133.
19. *Mesinger F., Mintz Y.* Numerical simulation of the 1970–1971 Eole experiment, Numerical simulation of weather and climate, Technical Report № 4. — Los Angeles: Dep. Meteorology, Univ. of California, 1970.
20. *Mesinger F., Mintz Y.* Numerical simulation of the clustering of the constant-volume balloons in the global domain, Numerical simulation of weather and climate, Technical Report № 5. — Los Angeles: Dep. Meteorology, Univ. of California, 1970.
21. *Mehlig B., Wilkinson M.*, Coagulation by random velocity fields as a Kramers Problem // Phys. Rev. Letters. 2004. V. 92, № 25. P. 250602-1–250602-4.
22. *Wilkinson M., Mehlig B.*, Caustics in turbulent aerosols // Europhys. Letters. 2005. V. 71, № 2. P. 186–192.
23. *Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А.* Нелинейные системы гидродинамического типа. — М.: Наука, 1974.
24. *Obukhov A. M.* On the problem of nonlinear interaction in fluid dynamics // Gerlands Beitr. Geophys. 1973. V. 82, № 4. P. 282–290.
25. *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20, № 3. P. 130–141.
26. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
27. *Бэтчелор Дж.* Теория однородной турбулентности. — М.: ИЛ, 1955.

28. *Maxey M. R.* The Gravitational Settling of Aerosol Particles in Homogeneous turbulence and random flow field // J. Fluid Mech. 1987. V. 174. P. 441–465.
29. *Лэмб Г.* Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947.
30. *Кляцкин В. И., Эльперин Т.* Кластеризация поля плотности числа малоинерционных частиц в случайных бездивергентных гидродинамических потоках // ЖЭТФ. 2002. Т. 122, № 2. С. 327–340.
31. *Пелиновский Е. Н.* Спектральный анализ плоских волн // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1976. Т. 19, № 3. С. 373–383.
32. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1977–1978.
33. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
34. *Михайлов А. С., Упоров И. В.* Критические явления в средах с разложением, распадом и диффузией // УФН. 1984. Т. 144, № 3. С. 79–112.
35. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидродинамика. Ч. 1, 2. — М.: Наука, 1965, 1967.
36. *Ambartsumian V. A.* Diffuse reflection of light by a foggy medium // Comptes Rendus (Doklady) de l'USSR. 1943. V. 38, № 8. P. 229–232.
37. *Ambartsumian V. A.* On the problem of diffuse reflection of light // Journal of Physics USSR. 1944. V. 8, № 1. P. 65.
38. *Амбарцумян В. А.* О принципе инвариантности и его некоторых применениях / В кн.: Принцип инвариантности и его приложения, С. 9–18, под ред. М.А. Мнацаканяна, О.В. Пикичяна — Ереван: АН Армянской ССР, 1989.
39. *Кастри Дж., Калаба Р.* Методы погружения в прикладной математике. — М.: Мир, 1973.
40. *Kagiwada H. H., Kalaba R.* Integral Equations Via Imbedding Methods. — Addison-Wesley, Reading, MA., 1974.
41. *Bellman R., Wing G. M. P.* An Introduction to Invariant Imbedding / Classics in Applied Mathematics. V. 8. — Philadelphia: SIAM, 1992.
42. *Golberg M. A.* Invariant imbedding and Riccati transformations // Appl. Math. and Com. 1975. V. 1, № 1. P. 1–24.
43. *Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г.* Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // Прикл. матем. и мех. 1961. Т. 25, № 6. С. 1140–1143.

44. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости // Прикл. матем. и мех. 1965. Т. 29, № 3. С. 453–467.
45. Кляцкин В. И. К нелинейной теории устойчивости периодических течений // Прикл. мат. и мех. 1972. Т. 36, № 2. С. 263–271.
46. Furutsu K. On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium // J. Res. NBS. 1963. V. D-67. P. 303.
47. Shapiro V. E., Loginov V. M. «Formulae of differentiation» and their use for solving stochastic equations // Physica. 1978. V. 91A. P. 563–574.
48. Шапиро В. Е., Логинов В. М. Динамические системы под воздействием случайных влияний. — Новосибирск: Наука, 1983.
49. Bourret R. C., Frish U., Pouquet A. Brownian motion of harmonical oscillator with stochastic frequency // Physica A. 1973. V. 65, № 2. P. 303–320.
50. Кляцкин В. И., Эльперин Т. Диффузия малоинерционных частиц под действием случайных сил и проблема Крамерса // Изв. АН, Физ. атмосф. и океана. 2002. Т. 38, № 6. С. 817–823.
51. Татарский В. И. Распространение света в среде со случайным показателем преломления в приближении марковского процесса // ЖЭТФ. 1969. Т. 56, № 6. С. 2106–2117.
52. Кляцкин В. И. Пространственно-временное описание стационарной и однородной турбулентности // Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа. 1971, № 4. С. 120–127.
53. Кузовлев Ю. Е., Бочков Г. Н. Операторные методы анализа стохастических не гауссовых процессов и систем // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1977. Т. 20, № 10. С. 1505–1515.
54. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. О гидродинамических флуктуациях // ЖЭТФ. 1957. Т. 32, № 2.
55. Левин М. Л., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. — М: Наука, 1967.
56. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика, Часть 2, Теория конденсированного состояния. — М.: Наука, 1978.
57. Зельдович Я. Б., Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Перемежаемость в случайной среде // УФН. 1987. Т. 152. № 5. С. 1505–1515.
58. Moffatt H. K. The interaction of turbulence with strong wind shear / In: Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation, eds. A. M. Yaglom, V. I. Tatarskii, P. 139–154. — Moscow: Nauka, 1967.

59. Lighthill J. On sound generated aerodynamically. 1. General theory // Proc. Roy. Soc. 1952. V. A211, № 1107. P. 564–587.
60. Lighthill J. On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound // Proc. Roy. Soc. 1954. V. A222, № 1148. P. 1–32.
61. Lighthill J. Sound generated aerodynamically // Proc. Roy. Soc. 1962. V. A267, № 1329. P. 147–182.
62. Кляцкин В. И. Излучение звука вихревыми системами // Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа. 1966, № 6. С. 87–92.
63. Милл-Томсон Л. М. Теоретическая гидромеханика. — М.: Мир, 1965.
64. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1988.
65. Кляцкин В. И. Интегральные одноточечные статистические характеристики векторных полей в стохастических магнитогидродинамических потоках // ЖЭТФ. 2009. Т. 136, № 6(12). С. 1194–1208.
66. Balkovsky E., Falkovich G., Fouxon A. Clustering of inertial particles in turbulent flows // <http://arxiv.org/abs/chao-dyn/9912027>. 2000.
67. Balkovsky E., Falkovich G., Fouxon A. Intermittent Distribution of Inertial Particles in Turbulent Flows // Phys. Rev. Letters. 2001. V. 86, № 13. P. 2790–2793.
68. Guzev M. A., Klyatskin V. I., Popov G. V. Phase fluctuations and localization length in layered randomly inhomogeneous media // Waves in Random Media. 1992. V. 2, № 2. P. 117–123.
69. Кляцкин В. И. Распространение электромагнитных волн в случайно-неоднородной среде как задача статистической математической физики // УФН. 2004. Т. 174, № 2. С. 177–195.
70. Кляцкин В. И., Якушкин И. Г. К статистической теории распространения оптического излучения в турбулентной среде // ЖЭТФ. 1997. Т. 111, № 6. С. 2044–2059.
71. Обухов А. М. О влиянии слабых неоднородностей атмосферы на распространение звука и света // Изв. АН СССР, Сер. геофиз. 1953, № 2. С. 155–165.
72. Обухов А. М. Турбулентность и динамика атмосферы — Ленинград: Гидрометеоздат, 1988.
73. Грачева М. Е., Гурвич А. С. О сильных флуктуациях интенсивности света при распространении в приземном слое атмосферы // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1965. Т. 8, № 4. С. 717.
74. Грачева М. Е., Гурвич А. С., Ломадзе С. О., Покасов В. В., Хрупин А. С. Вероятностное распределение «сильных» флуктуаций интенсивности света в атмосфере // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1974. Т. 17, № 1. С. 105–112.

75. *Фрадкин Е. С.* Метод функций Грина в теории квантованных полей и квантовой статистике // Труды ФИАН. 1965. Т. 29, № 7.
76. *Fradkin E. S.* Applications of functional methods in a quantum field theory and quantum statistics, II // Nucl. Phys. 1966. V. 11, P. 588.
77. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.* Приближение параболического уравнения для распространения волн в среде со случайными неоднородностями // ЖЭТФ. 1970. Т. 58, № 2. С. 624–634.
78. *Заворотный В. У., Кляцкин В. И., Татарский В. И.* Сильные флуктуации интенсивности электромагнитных волн в случайно неоднородных средах // ЖЭТФ. 1977. Т. 73, № 2. С. 481–497.
79. *Dashen R.* Distribution of intensity in a multiply scattering medium // Opt. Lett. 1984. V. 9. P. 110–112.
80. *Churnside J. H., Clifford S. F.* Log-normal Rician probability-density function of optical scintillations in the turbulent atmosphere // JOSA. 1987. V. A4, № 10. P. 1923–1930.
81. *Гурвич А. С., Каллистратова М. А., Мартвелль Ф. Е.* Исследование сильных флуктуаций интенсивности света в турбулентной среде при малых волновых параметрах // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1977. Т. 20, № 7. С. 1020–1031.
82. *Kravtsov Yu. A.* Propagation of electromagnetic waves through a turbulent atmosphere // Rep. Prog. Phys. 1992. V. 55. P. 39–112.
83. *Flatté S. M., Wang G. Y., Martin J.* Irradiance variance of optical waves through atmospheric turbulence by numerical simulation and comparison with experiment // JOSA. 1993. V. A10. P. 2363–2370.
84. *Flatté S. M., Bracher C., Wang G. Y.* Probability-density functions of irradiance for waves in atmospheric turbulence calculated by numerical simulation // JOSA. 1994. V. A11. P. 2080–2092.
85. *Martin J. M., Flatté S. M.* Intensity images and statistics from numerical simulation of wave propagation in 3-D random media // Appl. Opt. 1990. V. 27, № 11. P. 2111–2126; Simulation of point-source scintillation through three-dimensional random media // J. Opt. Soc. Am. 1990. V. A7. P. 838–847.
86. *Саичев А. И., Славинский М. М.* Уравнения для моментных функций волн, распространяющихся в случайно неоднородной среде с протяженными неоднородностями // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1985. Т. 28, № 1. С. 75–83.
87. *Вировлянский А. Л., Саичев А. И., Славинский М. М.* Моментные функции при распространении волн в волноводах с протяженными случайными неоднородностями показателя преломления // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1985. Т. 28, № 9. С. 1149–1159.

Предметный указатель

- Броуновское движение, 20, 180, 212
- Вариационная производная, 47, 61, 64, 65, 86, 98
- Вихревая линия, 235
- Вихревое кольцо, 238
- Вихрь скорости, 106
- Волновой параметр, 329, 341
- Волны
Римана, 46
в 3-х мерных случайных средах, 48–51, 83–85, 319–349
в слоистых случайных средах, 30
- Гамильтонова система, 20, 211, 221
- Гидродинамическая турбулентность, 52, 85
- Движение частиц, 15
- Динамическая
локализация, 11, 33
причинность, 65, 67, 83, 121
- Диссипация, 282, 286
- Диффузия
в случайных потоках, 34–40, 77–79
динамическая, 38, 40, 244
частиц, 14–19, 142–150, 249
- Длина локализации, 299, 309
- Закон
Био–Савара, 238
Колмогорова–Обухова, 324
- Зона Френеля, 341, 342, 344
- Игра вихревых колец, 239
- Индекс мерцания, 328
- Интегральная функция распределения, 95, 99
- Каустическая структура, 49, 342–349
- Кластеризация, 15, 17, 19, 36, 194, 255, 258
- Когерентные явления, 11
- Континуальный интеграл, 330–339
Феймана, 332
- Коэффициент
отражения, 31, 293, 297–303
прохождения, 31, 293, 297–303, 308
- Краевая задача, 30–34, 67–70, 306
несогласованная, 31
согласованная, 33
- Крамерса
время, 223
проблема, 21, 148, 212
- Кривая
мажорантная, 186–187
типичной реализации, 99, 100, 186, 252, 255, 257, 309, 344
для гауссова процесса, 105
- Кронекера символ, 92
- Локализационная кривая, 314
- Локализация, 194
динамическая, 299, 305, 309
статистическая, 299, 305
- Ляпуновская экспонента, 186, 255, 309
- Марковский процесс, 111, 117–301
гауссов, 115, 171
пуассоновский, 111, 112
телеграфный, 111, 113–115, 119, 124–126, 169–171
обобщенный, 111, 115–116
- Метод
Галеркина, 57
Фрадкина, 330

отражения, 182
 плавных возмущений Рытова, 325
 погружения, 33, 67, 293, 316
 усреднения по быстрым осцилляциям, 224
 характеристик, 34, 46, 50
 Микромасштаб турбулентности, 327, 341
 Миллионщикова гипотеза, 229
 Модель Лоренца, 23

Область
 насыщенных флуктуаций, 340
 сильных флуктуаций, 319, 330, 347
 сильных фокусировок, 346
 слабых флуктуаций, 330

Образование кластеров, 11

Описание
 лагранжево, 35–38, 76–82, 247, 249
 эйлерово, 35–40, 76–82, 246, 247, 256

Параметрический резонанс, 312
 стохастический, 30, 160–163
 волновой, 312

Переменяемость, 95, 183, 194

Перенос излучения, 32, 296, 306

Плотность вероятностей, 90–101, 116, 136, 138, 251, 299
 перехода, 117–118, 178, 301
 стационарная, 211–213, 219, 221

Поглощение волны, 32, 292

Постоянная Больцмана, 214

Поток колмогоровский, 54

Преобразование
 Конторовича–Лебедева, 210, 314
 Лапласа, 170, 171
 Мелера–Фока, 209, 299
 Фурье, 53, 91, 97, 116, 232, 326

Приближение
 геометрической оптики, 49, 50, 82
 дельта-коррелированного поля
 гауссова, 153, 175–195
 диффузионное, 195, 200

Принцип инвариантности Амбарцумяна, 67

Псевдовектор, 38
 Псевдотензор, 38

Радиус когерентности, 323

Распределение
 Больцмана, 212
 Гиббса, 212
 Максвелла, 212, 214
 Пуассона, 95

Рейнольдса тензор напряжений, 230

Свойство
 выкальывающее дельта-функции, 73
 эргодичности, 315

Система гидродинамического типа, 21–28, 140, 213–220

Скобка Пуассона, 87, 212

Случайная величина, 90–95
 гаусова, 93

Случайное поле, 96, 101
 дельта-коррелированное, 152, 153
 гауссово, 176
 пространственно однородное, 97
 и изотропное, 97

Случайный процесс, 95–116
 Орнштейна–Уленбека, 197
 винеровский, 180–182, 186
 время корреляции, 96
 гауссов, 104, 122
 дельта-коррелированный, 112, 126–130, 152, 153, 248
 гауссов, 126, 154
 пуассоновский, 112, 127, 154
 логарифмически нормальный (логнормальный), 108, 140, 183–194
 пуассоновский, 123
 разрывный, 110
 стационарный во времени, 96

Спиральность, 106, 107, 274, 284

Статистическая
 топография, 12, 343
 эквивалентность, 188, 213, 222, 257, 289

Стохастическое (турбулентное) динамо, 246

Структурная матрица, 254, 273

Уравнение
 Бернулли, 236
 Бюргерса, 47, 151
 со сносом, 151
 Гамильтона, 51
 Гамильтона–Якоби, 50
 Гельмгольца, 30–294
 Дайсона, 199
 Дюффинга, 21, 220
 Колмогорова–Феллера, 155
 Ланжевена, 46, 195, 211
 Лиувилля, 73–82, 176, 249, 253, 297
 обратное, 75, 77, 179
 Матье, 30
 Навье–Стокса, 52, 85
 Ньютона, 19
 Орра–Зоммерфельда, 56
 Риккати, 33, 293, 295
 матричное, 69
 Римана, 46, 81
 Фоккера–Планка, 148, 154, 175–179, 250, 251, 253, 298, 307
 обобщенное, 140–142, 145
 обратное, 179
 прямое, 179
 Хопфа, 76, 83, 86

Шредингера, 50
 нелинейное, 50

Эйлера, 21, 53

Эйнштейна–Смолуховского, 212, 221

индукции, 38, 244

непрерывности, 34, 244

обратное, 66

параболическое, 48, 82, 83, 319, 330
 нелинейное, 50

переноса, 49

Фазовый экран, 50, 328–329, 334–337

Флуктуационно-диссипативная теорема, 215

Формула
 Пуассона, 110

Стокса, 45
 Фурутцу–Новикова, 122, 129, 177, 201, 297, 320
 Эйнштейна, 214
 дифференцирования, 125, 169

Фрактальный характер, 36

Функция
 Бесселя, 324
 Гамильтона, 20, 211
 Гамма, 189
 Ганкеля, 237, 241
 Дирака, 61, 64, 90, 96
 Лежандра, 209
 полином, 241
 Макдональда, 210
 Хевисайда, 64, 74, 90, 96
 временная спектральная, 96
 индикаторная, 35, 73–82, 96, 176, 247, 249, 253, 297
 расширенная, 78–80, 82, 260
 интеграл вероятностей, 94, 181, 257, 345
 интегральная показательная, 302
 когерентности, 320
 массовая, 199
 пространственная спектральная, 97
 пространственно-временная спектральная, 97
 распределения вероятностей, 90
 интегральная, 90
 тока, 55
 характеристическая, 91–94

Хаотическая адвекция, 15

Характеристические кривые, 44, 246
 лучи, 50
 частицы, 34

Характеристический
 показатель, 185
 функционал, 83, 97, 118–119

Число Маха, 235
 Число Рейнольдса, 55