

В.И. КЛЯЦКИН

КОГЕРЕНТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ  
В ДИНАМИКЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Том 2.

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В СЛУЧАЙНЫХ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ  
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Настоящий электронный вариант монографии, представляет переработку второго тома монографии [40], дополненного необходимой информацией из первого тома. Для удобства пользования материал разбит на три небольших совершенно независимых тома, так как в них рассматриваются разные физические проблемы, не связанные друг с другом.

В первом томе на основе функционального подхода с единой точки зрения рассматриваются задачи о диффузии пассивной примеси в случайных потоках как в лагранжевом, так и эйлеровом описании. Основное внимание концентрируется на описании когерентных явлений на основе идей статистической топографии. Эти явления, происходящие с вероятностью равной единице, осуществляются практически во всех реализациях процесса диффузии примеси. К ним относятся такие явления как кластеризация частиц и поля примеси в случайных сжимаемых полях скоростей, имеющих потенциальную составляющую, кластеризация малонерционных частиц в случайных несжимаемых полях скоростей, резкое обострение градиентов поля плотности и возникновение фрактальной структуры изолиний постоянной концентрации в бездивергентных полях скоростей. Все эти явления анализируются на основе единого подхода, основанного на анализе одноточечных пространственно-временных плотностей вероятностей.

Во втором томе рассматривается задача о распространении плоских волн в слоистых средах, которая описывается одномерной краевой задачей и традиционно привлекает внимание многих исследователей. Это обусловлено, с одной стороны, ее простотой по сравнению с аналогичными задачами для двух и трех измерений, а с другой стороны, ее важностью для понимания процесса распространения волн в случайных средах. Учитывая, что одномерная задача допускает точное асимптотическое решение, можно проследить на ее примере влияние различных моделей, параметров среды и краевых условий на статистические характеристики волнового поля.

В третьем томе рассматривается проблема статистического описания волнового поля при распространении волн в случайных многомерных средах в рамках приближения квазиоптики на основе параболического уравнения (в том числе и задача формирования каустической структуры волнового поля). Эти проблемы описываются как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных, и каждая из них распадается на большое множество отдельных задач, представляющих самостоятельный физический интерес.

Для научных работников, специализирующихся в областях акустики, радиофизики, прикладной математики, теоретической и математической физики, имеющих дело со стохастическими динамическими системами, а также для студентов старших курсов и аспирантов.

## Содержание

<b>Предисловие</b> .....	<b>5</b>
<b>Глава 1. Формулировка краевых одномерных волновых задач и особенностей их решений</b> .....	<b>7</b>
1.1. Падение волны на слой неоднородной среды .....	7
1.2. Источник внутри слоя неоднородной среды .....	13
<b>Глава 2. Статистическое описание волнового поля на границах</b> .....	<b>17</b>
2.1. Коэффициенты отражения и прохождения волны .....	17
2.1.1. Недиссипативная среда (случай нормального падения волны на слой среды) .....	19
2.1.2. Недиссипативная среда (случай наклонного падения волны на слой среды) .....	22
2.1.3. Диссипативная среда .....	24
2.2. Источник внутри слоя неоднородной среды .....	28
2.3. Статистическая локализация энергии .....	28
2.4. Диффузионное приближение .....	30
2.4.1. Задача с несогласованной границей .....	30
2.4.2. Задача с согласованной границей .....	31
<b>Глава 3. Статистическая теория переноса излучения</b> .....	<b>36</b>
3.1. Нормальное падение волны на слой среды .....	36
3.1.1. Недиссипативная среда (стохастический волновой параметрический резонанс и динамическая локализация волн) .....	38
3.1.2. Диссипативная среда .....	45
3.2. Источник плоских волн внутри случайно-неоднородной среды .....	49
3.2.1. Неограниченное пространство случайно-неоднородной среды .....	50
3.2.2. Полупространство случайно-неоднородной среды .....	52
3.2.3. Асимптотический случай малого поглощения .....	53
3.3. Особенности статистического описания акустического поля в океане ..	56
3.4. Численное моделирование .....	60
3.4.1. Падение волны на слой среды .....	62
3.4.2. Источник плоских волн внутри среды .....	63
3.4.3. Нелинейная задача о самовоздействии волны в случайной среде ..	67
<b>Глава 4. Собственные значения и собственные функции стохастических краевых задач</b> .....	<b>69</b>
4.1. Общие соотношения .....	69
4.2. Статистическое усреднение .....	71

<b>Глава 5. Многомерные волновые задачи в слоистых случайных средах</b>	<b>76</b>
5.1. Нестационарные задачи	76
5.1.1. Формулировка краевых волновых задач	76
5.1.2. Статистическое описание	78
5.2. Точечный источник в слоистой случайной среде	82
5.2.1. Факторизация волнового уравнения в слоистых средах	82
5.2.2. Параболическое уравнение	84
5.2.3. Общий случай	87
<b>Глава 6. Двухслойная модель среды</b>	<b>89</b>
6.1. Постановка краевых задач	89
6.2. Статистический анализ	93
<b>Приложения</b>	<b>100</b>
<b>Глава А. Метод погружения в краевых волновых задачах</b>	<b>100</b>
А.1. Общие замечания	100
А.2. Стационарные краевые волновые задачи	102
А.2.1. Одномерные стационарные краевые волновые задачи	103
А.2.2. Волны в периодически неоднородных средах	130
А.2.3. Краевая стационарная задача о самовоздействии волны	135
А.3. Одномерная нестационарная краевая волновая задача	150
А.3.1. Случай нестационарной среды	150
А.3.2. Стационарная среда	154
А.3.3. Одномерная нелинейная волновая задача	161
<b>Глава Б. Фундаментальные решения волновых задач</b>	<b>163</b>
Б.1. Случай свободного пространства	163
Б.2. Случай слоистой среды	166
<b>Глава В. Элементы математического аппарата для описания когерентных явлений</b>	<b>170</b>
В.1. Вариационные (функциональные) производные	170
В.2. Принцип динамической причинности	174
В.3. Уравнение Лиувилля	175
В.4. Статистические характеристики случайных процессов и полей	177
В.4.1. Общие замечания	177
В.4.2. Расщепление корреляций (формула Фурутцу–Новикова)	179
В.4.3. Типичная реализация случайного процесса	182
В.4.4. Простейшие примеры случайных процессов	183
В.5. Приближение дельта-коррелированного гауссова случайного поля	185
В.5.1. Уравнение Фоккера–Планка	185
В.5.2. Плотность вероятностей перехода	187
В.5.3. Об условиях применимости уравнения Фоккера–Планка	188
В.5.4. Простейшие марковские случайные процессы	189
В.6. Диффузионное приближение	194
<b>Список литературы</b>	<b>196</b>
<b>Предметный указатель</b>	<b>207</b>

## Предисловие

Задача о распространении плоских волн в слоистых средах описывается одномерной краевой задачей и традиционно привлекает внимание многих исследователей. Это обусловлено, с одной стороны, ее простотой по сравнению с аналогичными задачами для двух и трех измерений, а с другой стороны, ее важностью для понимания процесса распространения волн в случайных средах. Учитывая, что одномерная задача допускает точное асимптотическое решение, можно проследить на ее примере влияние различных моделей, параметров среды и краевых условий на статистические характеристики волнового поля.

При статистическом описании динамических систем используются различные статистические методы, которые применимы, однако, только к задачам определенного типа, обладающим свойством динамической причинности, когда решение задачи определяется лишь «предыдущими» (по времени или пространству) значениями параметров и не зависит от последующих. Краевые задачи не относятся к этому типу. В таких случаях желательно перейти к задачам эволюционного типа с начальными условиями. Такой переход необходим для статистических задач и может быть полезным для численного решения детерминированных проблем. Этот переход можно осуществить на основе метода погружения.

Использование *метода погружения* (обычно называемого в математической литературе *методом инвариантного погружения*) позволяет свести рассматриваемые краевые задачи к задачам эволюционного типа с начальными условиями, обладающими свойством динамической причинности по вспомогательному параметру.

Идея метода впервые была предложена в работах В. А. Амбарцумяна [3, 80, 81] (так называемый *принцип инвариантности Амбарцумяна*) для решения уравнений линейной теории переноса излучения. В дальнейшем эта идея была взята «на вооружение» математиками для сведения краевых, вообще говоря нелинейных, задач к задачам эволюционного типа с начальными данными, более удобным для численных расчетов. По этой тематике опубликовано несколько монографий (см., например, [35, 88, 108]), в которых рассматриваются как физические аспекты метода, так и его вычислительные возможности.

Для случая волновых краевых задачах метод погружения развивался в работах [5, 36, 86, 110]. Примечательно, что в волновых задачах параметром погружения для построения эволюционных уравнений является геометрически наглядная величина — координата границы раздела сред. По-видимому, метод погружения является наиболее простым методом, позволяющим в общем случае поставить правильным образом статистические волновые краевые задачи.

Основные уравнения метода получены для многих стационарных, нестационарных, линейных и нелинейных краевых волновых задач в пространствах различной размерности. Они описываются нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями в конечномерном, а зачастую, и в бесконечномерном пространстве с вариационными производными. В общем случае эти уравнения достаточно сложны и практически неисследованные. Исключение составляют стационарные задачи о плоских волнах в слоистых средах, которые сводятся к одномерным задачам и допускают достаточно полный систематический анализ [87, 112].

Отметим, что такие естественные природные среды, как атмосфера Земли и океаны, могут рассматриваться в первом приближении как слоистые. И задачи о плоских волнах в слоистых средах могут служить первоначальной основой для анализа более сложных задач.

Любопытно отметить, что метод погружения, развитый первоначально для решения некоторых простейших уравнений теории переноса излучения, в настоящее время представляется тем инструментом, который может дать обоснование линейной теории переноса излучения и указать, каким образом она должна быть видоизменена в случае ее неприменимости.

Метод погружения также удобен для численного решения детерминированных задач при естественной стратификации параметров среды, так как он допускает использование натуральных данных, полученных путем непосредственного зондирования среды. Для стохастических задач при наличии эргодичности по параметру погружения полученные уравнения чрезвычайно удобны для нахождения и анализа статистических характеристик волновых полей на основе численного моделирования. Это особенно важно ввиду того, что в естественных условиях, как правило, имеется одна или несколько реализаций параметров среды и невозможно осуществить усреднение по ансамблю реализаций. При наличии же эргодичности достаточно иметь лишь одну реализацию параметров среды.

В Приложении подробно рассматривается метод погружения для краевых одномерных задач о волнах в слоистых средах и элементы математического аппарата, позволяющие описать динамическую локализацию плоских волн в слоистых случайных средах.

## Глава 1

### ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВЫХ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ И ОСОБЕННОСТИ ИХ РЕШЕНИЙ

#### 1.1. Падение волны на слой неоднородной среды

Пусть слой неоднородной среды занимает часть пространства  $L_0 < x < L$ . Плоская волна с единичной амплитудой  $u_0(x) = e^{-ik(x-L)}$  падает на него из области  $x > L$  (рис. 1.1, а). Волновое поле в слое неоднородной среды описывается уравнением Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + k^2(x)u(x) = 0, \quad (1.1)$$

где

$$k^2(x) = k^2[1 + \varepsilon(x)],$$

а функция  $\varepsilon(x)$  описывает неоднородности среды.

Вне слоя считаем, что  $k(x) = k$ , т.е.  $\varepsilon(x) = 0$ ; внутри же слоя предполагаем, что  $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + i\gamma$ , где  $\varepsilon_1(x)$  — действительная часть, ответственная за процессы рассеяния волны в среде, а мнимая часть  $\gamma \ll 1$  описывает поглощение волны в среде.

В области  $x > L$  волновое поле имеет структуру

$$u(x) = e^{-ik(x-L)} + R_L e^{ik(x-L)},$$

где  $R_L$  — комплексный коэффициент отражения.

В области  $x < L_0$  волновое поле имеет структуру

$$u(x) = T_L e^{ik(L_0-x)},$$

где  $T_L$  — комплексный коэффициент прохождения.

Краевыми условиями для уравнения (1.1) являются условия непрерывности функции и ее производной на границах слоя, которые можно записать в виде

$$u(L) + \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 2, \quad u(L_0) - \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (1.2)$$

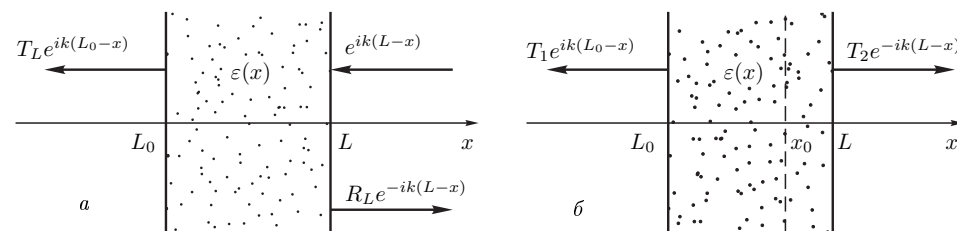


Рис. 1.1. Падение плоской волны на слой среды (а) и источник внутри среды (б)

Таким образом, волновое поле в слое неоднородной среды описывается краевой задачей (1.1), (1.2). Отметим, что в этом случае функция  $\varepsilon(x)$  разрывна на границах слоя, и мы будем называть краевую задачу (1.1), (1.2) краевой *задачей с несогласованными границами*. Для таких задач рассеяние волны происходит не только на неоднородностях среды, но и на скачках функции  $\varepsilon(x)$  на границах слоя.

Из уравнения (1.1) при  $x < L$  следует равенство

$$k\gamma I(x) = \frac{d}{dx} S(x), \quad (1.3)$$

где плотность потока энергии —  $S(x)$  — определяется равенством

$$S(x) = \frac{i}{2k} \left[ u(x) \frac{d}{dx} u^*(x) - u^*(x) \frac{d}{dx} u(x) \right],$$

а интенсивность волнового поля  $I(x) = |u(x)|^2$ . При этом

$$S(L) = 1 - |R_L|^2, \quad S(L_0) = |T_L|^2.$$

Следовательно, интегрируя (1.3) по пространству неоднородной среды, получаем равенство

$$|R_L|^2 + |T_L|^2 + k\gamma \int_{L_0}^L dx I(x) = 1. \quad (1.4)$$

Если затухание волны в среде отсутствует ( $\gamma = 0$ ), то сохранение плотности потока энергии выражается равенством

$$|R_L|^2 + |T_L|^2 = 1.$$

Остановимся на некоторых особенностях решения стохастической краевой задачи (1.1), (1.2). При отсутствии неоднородностей среды ( $\varepsilon_1(x) = 0$ ) и для достаточно малого поглощения волны  $\gamma$  интенсивность волнового поля слабо, экспоненциальным образом затухает вглубь среды по закону

$$I(x) = |u(x)|^2 = e^{-k\gamma(L-x)}. \quad (1.5)$$

На рис. 1.2 приведены две реализации интенсивности волнового поля в достаточно толстом слое среды, соответствующие двум реализациям неоднородностей среды, полученные численным моделированием и отличающиеся тем, что для них функции  $\varepsilon_1(x)$  в середине слоя на расстоянии длины волны имеют разный знак. Это позволяет увидеть влияние малой расстройки среды на поведение решения краевой задачи. Не останавливаясь на детальном описании параметров задачи, отметим только, что на этом рисунке явно просматривается тенденция резкого экспоненциального спада (с большими выбросами как в сторону увеличения интенсивности, так и к значениям, близким к нулю), обусловленная многократным переотражением волны в хаотически неоднородной среде (*динамическая локализация*). При этом параметр  $\gamma \ll 1$ , и, следовательно, влияние малого поглощения на динамическую локализацию не существенно.

Хорошо известно, что уравнение второго порядка (1.1) можно расщепить на два уравнения первого порядка, вводя новую функцию

$$\psi(x) = \frac{i}{k} \frac{d}{dx} \ln u(x),$$

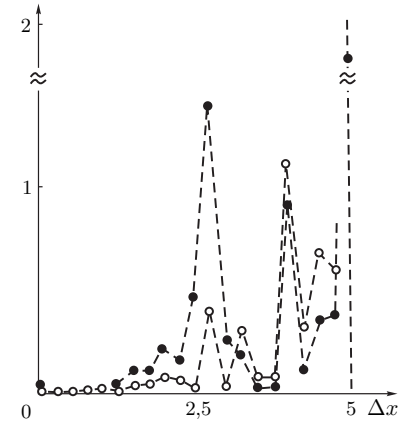


Рис. 1.2. Численное моделирование динамической локализации для двух реализаций неоднородностей среды

замкнутое уравнение для которой вытекает из уравнения (1.1):

$$\frac{d}{dx} \psi(x) = ik [\psi^2(x) - 1 - \varepsilon(x)], \quad \psi(L_0) = 1. \quad (1.6)$$

Из краевого условия на границе ( $x = L$ ) следует, что

$$u(L) = \frac{2}{1 + \psi(L)},$$

и, следовательно, коэффициент отражения определяется по решению уравнения (1.6) на основе равенства

$$R_L = \frac{1 - \psi(L)}{1 + \psi(L)}.$$

Введя новую функцию

$$R(x) = \frac{1 - \psi(x)}{1 + \psi(x)}, \quad \psi(x) = \frac{1 - R(x)}{1 + R(x)},$$

уравнение (1.6) можно переписать в виде *уравнения Риккати*

$$\frac{d}{dx} R(x) = 2ikR(x) + \frac{i}{2k} \varepsilon(x)(1 + R(x))^2, \quad R(L_0) = 0, \quad (1.7)$$

решение которого при  $x = L$  определяет коэффициент отражения, т. е.

$$R_L = R(L).$$

Волновое поле  $u(x)$  внутри среды выражается при этом через функцию  $R(x)$  с помощью равенства

$$u(x) = [1 + R(L)] \exp \left[ ik \int_x^L d\xi \frac{1 - R(\xi)}{1 + R(\xi)} \right]. \quad (1.8)$$

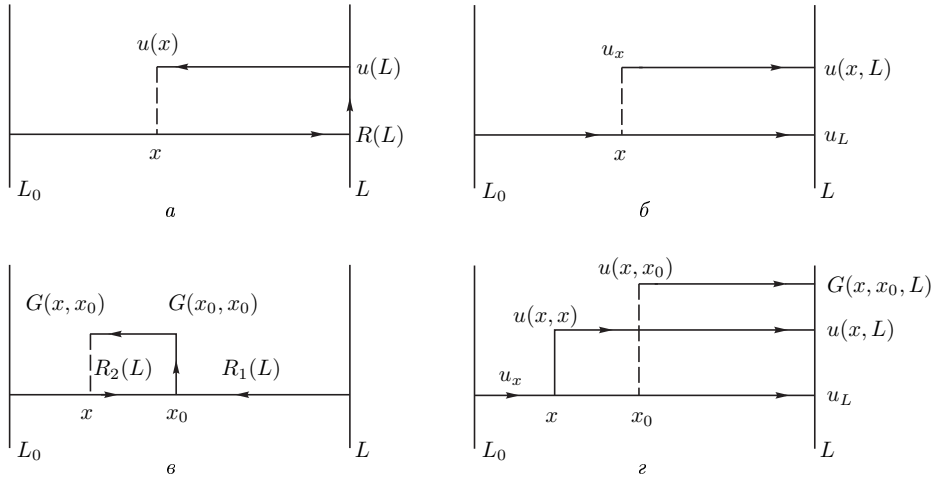


Рис. 1.3. Схема решения краевой задачи (1.1), (1.2) методом прогонки (а) и методом погружения (б); краевой задачи (1.20) методом прогонки (в) и методом погружения (г)

Таким образом, традиционная схема решения задачи приведена на рис. 1.3, а. Сперва решается уравнение (1.7), а затем волновое поле восстанавливается с помощью формулы (1.8). Этот метод хорошо известен и называется *методом прогонки*. Однако он непригоден для анализа статистических задач.

Волновое поле внутри среды может быть представлено также в виде

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x),$$

$$\frac{d}{dx}u(x) = -ik[u_1(x) - u_2(x)],$$

где  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  — комплексные *встречные волны*. Они связаны с волновым полем с помощью соотношений

$$u_1(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{i}{k} \frac{d}{dx} \right] u(x), \quad u_1(L) = 1,$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{i}{k} \frac{d}{dx} \right] u(x), \quad u_2(L_0) = 0,$$
(1.9)

и, следовательно, краевую задачу (1.1), (1.2) можно переписать в виде

$$\left( \frac{d}{dx} + ik \right) u_1(x) = -\frac{ik}{2} \varepsilon(x) [u_1(x) + u_2(x)], \quad u_1(L) = 1,$$

$$\left( \frac{d}{dx} - ik \right) u_2(x) = -\frac{ik}{2} \varepsilon(x) [u_1(x) + u_2(x)], \quad u_2(L_0) = 0.$$
(1.10)

Отметим, что в этом случае функция  $R(x)$ , введенная выше, связана с функциями  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  с помощью равенства

$$R(x) = \frac{u_2(x)}{u_1(x)}.$$

Краевую задачу (1.1), (1.2) с помощью *метода погружения* можно переформулировать в виде динамической задачи с начальными условиями по параметру  $L$  — геометрическому положению правой границы слоя, рассматривая решение краевой задачи как функцию этого параметра (см. Приложение А., с. 105). Так, коэффициент отражения  $R_L$  удовлетворяет при этом уравнению Риккати:

$$\frac{d}{dL}R_L = 2ikR_L + \frac{ik}{2}\varepsilon(L)(1 + R_L)^2, \quad R_{L_0} = 0, \quad (1.11)$$

совпадающему, естественно, с уравнением (1.7), а волновое поле в слое среды  $u(x) \equiv u(x, L)$  описывается линейным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial L}u(x, L) = ik u(x, L) + \frac{ik}{2}\varepsilon(L)(1 + R_L)u(x, L),$$

$$u(x, x) = 1 + R_x,$$
(1.12)

которое можно получить, например, дифференцируя выражение (1.8) по параметру  $L$ . Схема решения задачи в этом случае приведена на рис. 1.3, б. Сравнивая эту схему со схемой решения задачи на основе метода прогонки (рис. 1.3, а), видим, что направление решения задачи меняется, и именно это обстоятельство и позволит далее построить статистическое описание решения стохастической задачи.

Из уравнений (1.11) и (1.12) следуют уравнения для квадрата модуля коэффициента отражения  $W_L = |R_L|^2$  и интенсивности волнового поля  $I(x, L) = |u(x, L)|^2$  вида

$$\frac{d}{dL}W_L = -\frac{k\gamma}{2} [4W_L + (R_L + R_L^*)(1 + W_L)] - \frac{ik}{2}\varepsilon_1(L) (R_L - R_L^*)(1 - W_L),$$

$$W_{L_0} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial L}I(x, L) = -\frac{k\gamma}{2} (2 + R_L + R_L^*) I(x, L) - \frac{ik}{2}\varepsilon_1(L) (R_L - R_L^*) I(x, L),$$

$$I(x, x) = |1 + R_x|^2,$$
(1.13)

которые можно переписать в виде

$$\frac{d}{dL} \ln(1 - W_L) = -\frac{k\gamma}{2} \frac{4W_L + (R_L + R_L^*)(1 + W_L)}{1 - W_L} - \frac{ik}{2}\varepsilon_1(L) (R_L - R_L^*),$$

$$\frac{\partial}{\partial L} \ln I(x, L) = -\frac{k\gamma}{2} (2 + R_L + R_L^*) - \frac{ik}{2}\varepsilon_1(L) (R_L - R_L^*).$$
(1.14)

Исключая из (1.14) члены, связанные с функцией  $\varepsilon_1(L)$ , получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial L} \ln \frac{I(x, L)}{1 - W_L} = -k\gamma \frac{|1 + R_L|^2}{1 - W_L}.$$

Следовательно, интенсивность волнового поля связана с коэффициентом отражения с помощью равенства

$$I(x, L) = \frac{|1 + R_x|^2 (1 - W_L)}{1 - W_x} \exp \left\{ -k\gamma \int_x^L d\xi \frac{|1 + R_\xi|^2}{1 - W_\xi} \right\}. \quad (1.15)$$

Полагая в (1.15) точку  $x = L_0$ , получаем связь модуля коэффициента прохождения волны с коэффициентом отражения:

$$|T_L|^2 = (1 - W_L) \exp \left\{ -k\gamma \int_{L_0}^L d\xi \frac{|1 + R_\xi|^2}{1 - W_\xi} \right\}. \quad (1.16)$$

При отсутствии поглощения в среде из равенства (1.15) следует выражение

$$I(x, L) = \frac{|1 + R_x|^2 (1 - W_L)}{1 - W_x}, \quad (1.17)$$

и при этом

$$|R_L|^2 + |T_L|^2 = 1.$$

Таким образом, при отсутствии в среде поглощения уравнение (1.13) для интенсивности волнового поля интегрируется, и интенсивность волнового поля внутри неоднородной среды простым образом связана с коэффициентом отражения волны от слоя среды.

Разделение на «встречные волны» (1.9) носит, конечно, условный характер и является математическим приемом, позволяющим расщепить уравнение второго порядка (1.1) на два уравнения первого порядка с простейшими краевыми условиями.

Если, в отличие от рассмотренной задачи, функция  $k(x)$  непрерывна на границе  $x = L$ , т. е. волновое число в свободном полупространстве  $x > L$  равно  $k(L)$ , то краевыми условиями для задачи (1.1), вместо условий (1.2), будут условия

$$u(L) + \frac{i}{k(L)} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 2, \quad u(L_0) - \frac{i}{k(L_0)} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (1.18)$$

Краевую задачу (1.1), (1.18) будем называть задачей *со согласованной границей*. Для нее удобнее представить волновое поле в виде

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x),$$

$$\frac{du(x)}{dx} = -ik(x) [u_1(x) - u_2(x)],$$

где теперь комплексные *встречные волны* —  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  — связаны с волновым полем с помощью соотношений

$$u_1(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{i}{k(x)} \frac{d}{dx} \right] u(x), \quad u_1(L) = 1,$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{i}{k(x)} \frac{d}{dx} \right] u(x), \quad u_2(L_0) = 0,$$

и удовлетворяют краевой задаче

$$\left( \frac{d}{dx} + ik(x) \right) u_1(x) = -\frac{k'(x)}{k(x)} [u_1(x) - u_2(x)], \quad u_1(L) = 1,$$

$$\left( \frac{d}{dx} - ik(x) \right) u_2(x) = \frac{k'(x)}{k(x)} [u_1(x) - u_2(x)], \quad u_2(L_0) = 0,$$

где  $k'(x) = dk(x)/dx$ . Теперь функция  $R(x) = u_2(x)/u_1(x)$  описывается уравнением Риккати

$$\frac{d}{dx} R(x) = 2ikR(x) + \frac{k'(x)}{2k} [1 - R^2(x)], \quad R(L_0) = 0, \quad (1.19)$$

и коэффициент отражения определяется через решение уравнения (1.19) с помощью равенства

$$R_L = R(L).$$

Если функция  $\varepsilon(x)$  достаточно мала, то уравнение (1.19) можно переписать в виде уравнения

$$\frac{dR(x)}{dx} = 2ikR(x) + \frac{1}{4}\varepsilon'(x) (1 - R^2(x)),$$

содержащего, в отличие от уравнения (1.11), производную функции  $\varepsilon(x)$ .

## 1.2. Источник внутри слоя неоднородной среды

Аналогичным образом, поле точечного источника, расположенного в слое случайно неоднородной среды, описывается краевой задачей для функции Грина уравнения Гельмгольца:

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x, x_0) + k^2 [1 + \varepsilon(x)] G(x, x_0) = 2ik\delta(x - x_0), \quad (1.20)$$

$$\left( \frac{d}{dx} + ik \right) G(x, x_0) \Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left( \frac{d}{dx} - ik \right) G(x, x_0) \Big|_{x=L} = 0.$$

Вне слоя среды решение в этом случае имеет вид уходящих волн (рис. 1.1, б):

$$G(x, x_0) = T_1 e^{ik(x-L)} \quad (x \geq L), \quad G(x, x_0) = T_2 e^{-ik(x-L_0)} \quad (x \leq L_0).$$

Отметим, что положение источника на границе слоя  $x_0 = L$  соответствует краевой задаче (1.1), (1.2) о падении волны на слой среды, т. е.

$$G(x, L) = u(x, L).$$

Решение краевой задачи (1.20) имеет структуру

$$G(x, x_0) = G(x_0, x_0) \begin{cases} \exp \left[ ik \int_x^{x_0} \psi_1(\xi) d\xi \right], & x_0 \geq x, \\ \exp \left[ ik \int_{x_0}^x \psi_2(\xi) d\xi \right], & x_0 \leq x, \end{cases} \quad (1.21)$$

где поле в точке расположения источника, в силу условия скачка производной, определяется формулой

$$G(x_0, x_0) = \frac{2}{\psi_1(x_0) + \psi_2(x_0)},$$

а функции  $\psi_i(x)$  описываются уравнениями Риккати

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \psi_1 &= ik [\psi_1^2 - 1 - \varepsilon(x)], & \psi_1(L_0) &= 1, \\ \frac{d}{dx} \psi_2 &= -ik [\psi_2^2 - 1 - \varepsilon(x)], & \psi_2(L) &= 1. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Схема решения задачи методом прогонки приведена на рис. 1.3, в. Сперва решаются два уравнения (1.22), а затем волновое поле восстанавливается с помощью формулы (1.21).

Вместо функций  $\psi_i(x)$  введем новые функции  $R_i(x)$  с помощью равенств

$$\psi_i(x) = \frac{1 - R_i(x)}{1 + R_i(x)}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда волновое поле в области  $x < x_0$  может быть записано в виде

$$G(x, x_0) = \frac{[1 + R_1(x_0)][1 + R_2(x_0)]}{1 - R_1(x_0)R_2(x_0)} \exp \left[ ik \int_x^{x_0} d\xi \frac{1 - R_1(\xi)}{1 + R_1(\xi)} \right], \quad (1.23)$$

где функция  $R_1(x)$  по переменной  $x$  описывается уравнением Риккати (1.7).

При  $x_0 = L$  выражение (1.23) переходит в

$$G(x, L) = u(x, L) = [1 + R_1(L)] \exp \left[ ik \int_x^L d\xi \frac{1 - R_1(\xi)}{1 + R_1(\xi)} \right], \quad (1.24)$$

и, следовательно, величина  $R_1(L) = R_L$  — коэффициент отражения плоской волны, падающей на слой среды из области  $x > L$ . Аналогичным образом величина  $R_2(x_0)$  — коэффициент отражения волны, падающей на слой среды  $(x_0, L)$  из однородного полупространства  $x < x_0$  (т. е. при  $\varepsilon = 0$ ).

Используя равенство (1.24), формулу (1.23) можно переписать в виде

$$G(x, x_0) = \frac{1 + R_2(x_0)}{1 - R_1(x_0)R_2(x_0)} u(x, x_0), \quad x \leq x_0,$$

где  $u(x, x_0)$  — волновое поле в слое неоднородной среды  $(L_0, x_0)$  при падении на нее волны из свободного полупространства  $x > x_0$ .

Следовательно, поле точечного источника в области  $x < x_0$  пропорционально волновому полю плоской волны, падающей на слой среды  $(L_0, x_0)$  из однородного полупространства  $x > x_0$ . Влияние части слоя  $(x_0, L)$  описывается только величиной  $R_2(x_0)$ .

Отметим, что положение источника на границе слоя  $x_0 = L$  соответствует краевой задаче (1.1), (1.2) о падении волны на слой среды, т. е.

$$G(x, L) = u(x, L).$$

Отметим, что если рассматривать зависимость волнового поля от параметра  $L$  (т. е.  $G(x, x_0) \equiv G(x, x_0, L)$ ), то метод погружения приведет к системе уравнений с начальными условиями:

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x, x_0, L) = i \frac{k}{2} \varepsilon(L) u(x_0, L) u(x, L),$$

$$G(x, x_0, L)_{L=\max(x, x_0)} = \begin{cases} u(x, x_0), & x \geq x_0, \\ u(x_0, x), & x \leq x_0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x, L) = ik \{1 + \varepsilon(L)u(L, L)\} u(x, L), \quad u(x, L)|_{L=x} = u(x, x),$$

$$\frac{d}{dL} u(L, L) = 2ik [u(L, L) - 1] + i \frac{k}{2} \varepsilon(L) u^2(L, L), \quad u(L_0, L_0) = 1. \quad (1.25)$$

При этом два последних уравнения описывают волновое поле в задаче о падении волны на слой среды. Схема решения задачи в этом случае приведена на рис. 1.3, г.

Задачи с абсолютно отражающими границами, на которых поля  $G(x, x_0)$  или  $\frac{d}{dx}G(x, x_0)$  обращаются в нуль, имеют большое прикладное значение. Так, в последнем случае для источника плоских волн, расположенного на этой границе, имеем  $R_2(x_0) = 1$ , и, следовательно,

$$G_{\text{ref}}(x, x_0) = \frac{2}{1 - R_1(x_0)} \exp \left[ ik \int_x^{x_0} d\xi \frac{1 - R_1(\xi)}{1 + R_1(\xi)} \right], \quad x \leq x_0. \quad (1.26)$$

Из уравнения (1.20) при  $x < x_0$  вытекает также равенство для интенсивности волнового поля  $I(x, x_0) = |G(x, x_0)|^2$ :

$$k\gamma I(x, x_0) = \frac{d}{dx} S(x, x_0), \quad (1.27)$$

где плотность потока энергии —  $S(x, x_0)$  — определяется равенством

$$S(x, x_0) = \frac{i}{2k} \left[ G(x, x_0) \frac{d}{dx} G^*(x, x_0) - G^*(x, x_0) \frac{d}{dx} G(x, x_0) \right].$$

Используя выражение (1.21), можно представить  $S(x, x_0)$  в виде ( $x \leq x_0$ )

$$S(x, x_0) = S(x_0, x_0) \exp \left[ -k\gamma \int_x^{x_0} d\xi \frac{|1 + R_1(\xi)|^2}{1 - |R_1(\xi)|^2} \right],$$

где плотность потока энергии в точке расположения источника

$$S(x_0, x_0) = \frac{[1 - |R_1(x_0)|^2] |1 + R_2(x_0)|^2}{|1 - R_1(x_0)R_2(x_0)|^2} \quad (1.28)$$

Далее нас будут интересовать статистические задачи о падении волны на полупространство случайно-неоднородной среды ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ) и об источнике в неограниченном пространстве ( $L_0 \rightarrow -\infty, L \rightarrow \infty$ ) при достаточно малом поглощении ( $\gamma \rightarrow 0$ ).

Из выражения (1.27) видно, что, вообще говоря, эти предельные переходы непостоянны. Действительно, если  $\gamma = 0$ , то имеет место сохранение плотности потока энергии  $S(x, x_0)$  во всем полупространстве  $x < x_0$ . В присутствии малого конечного поглощения, однако, интегрируя равенство (1.27) по полупространству  $x < x_0$ , получаем ограничение на значение энергии, сосредоточенной в этом полупространстве:

$$k\gamma \int_{-\infty}^{x_0} dx I(x, x_0) = S(x_0, x_0) = \frac{[1 - |R_1(x_0)|^2] |1 + R_2(x_0)|^2}{|1 - R_1(x_0)R_2(x_0)|^2}. \quad (1.29)$$

Представляют интерес три простейшие статистические задачи:

- падение волны на слой среды (конечный и полупространство);
- источник волн внутри слоя среды (конечного и неограниченного пространства);
- влияние границ на статистические характеристики волнового поля.



Все эти задачи удается решить в полном объеме аналитическими методами. Также легко в этом случае осуществить численное моделирование и провести сопоставление результатов с аналитическими результатами.

Будем считать, что  $\varepsilon_1(x)$  — гауссов дельта-коррелированный случайный процесс с параметрами

$$\langle \varepsilon_1(L) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_1(L)\varepsilon_1(L') \rangle = B_\varepsilon(L - L') = 2\sigma_\varepsilon^2 l_0 \delta(L - L'), \quad (1.30)$$

где  $B_\varepsilon(L - L')$  — корреляционная функция,  $\sigma_\varepsilon^2 \ll 1$  — дисперсия, а  $l_0$  — радиус корреляции для случайной функции  $\varepsilon_1(L)$ . Такая аппроксимация означает, что переход к асимптотическому случаю  $l_0 \rightarrow 0$  в точном решении задачи с конечным радиусом корреляции  $l_0$  приводит к результатам, совпадающим с решением статистической задачи с параметрами (1.30).

В силу малости параметра  $\sigma_\varepsilon^2$ , все статистические эффекты могут быть разделены на два типа — локальные и накапливающиеся из-за эффекта многократного переотражения волны в среде. Нас будут интересовать последние.

Из постановки краевых волновых задач на основе метода погружения видно, что существует два типа характеристик волнового поля, представляющих непосредственный интерес. Первый тип величин связан со значениями волнового поля на границах слоя (коэффициенты отражения и прохождения  $R_L, T_L$ ), полем в точке местонахождения источника  $G(x_0, x_0)$ , плотностью потока энергии в точке нахождения точечного источника  $S(x_0, x_0)$  и т. д. Второй тип величин связан с определением статистических характеристик интенсивности волнового поля внутри слоя среды, что и является предметом статистической теории переноса излучения.

## Глава 2

### СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ НА ГРАНИЦАХ СЛОЯ СРЕДЫ

#### 2.1. Коэффициенты отражения и прохождения волны

Комплексный коэффициент отражения волны от слоя среды описывается замкнутым уравнением — уравнением Риккати (1.11).

Обозначим модуль коэффициента отражения через  $\rho_L$ , т. е. положим  $R_L = \rho_L e^{i\phi_L}$ , где  $\phi_L$  — фаза коэффициента отражения. Тогда исходя из уравнения (1.11) для величины  $W_L = \rho_L^2 = |R_L|^2$  — квадрата модуля коэффициента отражения и его фазы, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} W_L &= -2k\gamma W_L + k\varepsilon_1(L)\sqrt{W_L}(1 - W_L)\sin\phi_L, \quad W_{L_0} = 0, \\ \frac{d}{dL} \phi_L &= 2k + k\varepsilon_1(L)\left\{1 + \frac{1 + W_L}{2\sqrt{W_L}}\cos\phi_L\right\}, \quad \phi_{L_0} = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Быстроосциллирующие функции в диссипативных членах, не вносящие вклада в накапливающиеся эффекты, опущены в системе уравнений (2.1) (ср. с уравнением (1.13)).

Введем индикаторную функцию  $\varphi(L, W) = \delta(W_L - W)$ , которая описывается уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial}{\partial L} \varphi(L, W) = 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} \{W\varphi(L, W)\} - k\varepsilon_1(L) \frac{\partial}{\partial W} \left\{ \sqrt{W}(1 - W)\sin\phi_L \varphi(L, W) \right\}. \quad (2.2)$$

Усредним это уравнение по ансамблю реализаций функции  $\varepsilon_1(L)$  и воспользуемся формулой Фурутцу–Новикова (В.45) на с. 181 в Приложении В. для расщепления корреляций, которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$\langle \varepsilon_1(L)F[L, L_0; \varepsilon_1(x)] \rangle = \int_{L_0}^L dL' B_\varepsilon(L - L') \left\langle \frac{\delta}{\delta\varepsilon_1(L')} F[L, L_0; \varepsilon_1(x)] \right\rangle. \quad (2.3)$$

Эта формула справедлива для произвольного функционала  $F[L, L_0; \varepsilon_1(x)]$  случайного процесса  $\varepsilon_1(x)$  при  $L_0 \leq x \leq L$ . Для гауссова дельта-коррелированного процесса  $\varepsilon_1(x)$  с параметрами (1.30) формула (2.3) упрощается и принимает вид

$$\langle \varepsilon_1(L)F[L, L_0; \varepsilon_1(x)] \rangle = \sigma_\varepsilon^2 l_0 \left\langle \frac{\delta}{\delta\varepsilon_1(L - 0)} F[L, L_0; \varepsilon_1(x)] \right\rangle. \quad (2.4)$$

В результате получаем для плотности вероятностей квадрата модуля коэффициента отражения  $P(L, W) = \langle \varphi(L, W) \rangle$  в общем случае уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(L, W) &= 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} \{WP(L, W)\} - k \frac{\partial}{\partial W} \int_{L_0}^L dL' B_\varepsilon(L - L') \sqrt{W}(1 - W) \times \\ &\times \left\langle \cos\phi_L \frac{\delta\phi_L}{\delta\varepsilon_1(L')} \varphi(L, W) + \sin\phi_L \frac{\delta\varphi(L, W)}{\delta\varepsilon_1(L')} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $B_\varepsilon(L - L')$  — корреляционная функция случайного процесса  $\varepsilon_1(L)$ . Подставляя теперь в это уравнение функцию вида (1.30) и учитывая равенства

$$\frac{\delta\varphi(L, W)}{\delta\varepsilon_1(L - 0)} = -k \frac{\partial}{\partial W} \left\{ \sqrt{W} (1 - W) \sin \phi_L \varphi(L, W) \right\},$$

$$\frac{\delta\phi_L}{\delta\varepsilon_1(L - 0)} = k \left\{ 1 + \frac{1 + W_L}{2\sqrt{W_L}} \cos \phi_L \right\},$$

вытекающие непосредственно из уравнений (2.2) и (2.1), получаем для плотности вероятностей  $P(L, W)$  незамкнутое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(L, W) &= 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} \{WP(L, W)\} - \\ &- k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0 \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \left\langle \left[ \sqrt{W} \cos \phi_L + \frac{1}{2} (1 + W) \cos^2 \phi_L \right] \varphi(L, W) \right\rangle + \\ &+ k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0 \frac{\partial}{\partial W} \left\{ \sqrt{W} (1 - W) \frac{\partial}{\partial W} \left[ \sqrt{W} (1 - W) \langle \sin^2 \phi_L \varphi(L, W) \rangle \right] \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что фаза коэффициента отражения имеет структуру

$$\phi_L = k(L - L_0) + \tilde{\phi}_L,$$

т. е. быстро меняется на расстояниях порядка длины волны, можно дополнительно усреднить это уравнение по быстрым осцилляциям, что справедливо при естественном ограничении  $k/D \gg 1$ , и мы приходим к уравнению Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(L, W) &= 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} WP(L, W) - 2D \frac{\partial}{\partial W} W(1 - W) P(L, W) + \\ &+ D \frac{\partial}{\partial W} W(1 - W)^2 \frac{\partial}{\partial W} P(L, W) \quad (2.6) \end{aligned}$$

с коэффициентом диффузии

$$D = \frac{k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0}{2}.$$

В некоторых случаях оказывается более удобным представлять величину  $W_L$  в виде

$$W_L = \frac{u_L - 1}{u_L + 1}, \quad u_L = \frac{1 + W_L}{1 - W_L}, \quad u_L \geq 1. \quad (2.7)$$

Тогда величина  $u_L$  описывается стохастической системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} u_L &= -k\gamma (u_L^2 - 1) + k\varepsilon_1(L) \sqrt{u_L^2 - 1} \sin \phi_L, \quad u_{L_0} = 1, \\ \frac{d}{dL} \phi_L &= 2k + k\varepsilon_1(L) \left\{ 1 + \frac{u_L}{\sqrt{u_L^2 - 1}} \cos \phi_L \right\}, \quad \phi_{L_0} = 0, \end{aligned}$$

и для плотности вероятностей случайной величины  $u_L - P(L, u) = \langle \delta(u_L - u) \rangle$  получаем уравнение Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial}{\partial L} P(L, u) = k\gamma \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) P(L, u) + D \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} P(L, u). \quad (2.8)$$

Отметим, что величина, обратная коэффициенту диффузии, определяющая естественный масштаб длины, связанный со случайными неоднородностями среды, обычно называется *длиной локализации* (см. п. 3.1.1., с. 44), т. е.

$$l_{\text{loc}} = \frac{1}{D}.$$

Далее, при анализе статистических характеристик волнового поля, мы увидим, что именно эта величина определяет масштаб *динамической локализации волн* в отдельных реализациях волнового поля, несмотря на то, что в ряде случаев *статистическая локализация*, связанная со статистическими характеристиками волнового поля, может и не осуществляться.

### 2.1.1. Недиссипативная среда (случай нормального падения волны на слой среды)

Если поглощение в среде отсутствует (т. е.  $\gamma = 0$ ), то уравнение Фоккера–Планка (2.8) для безразмерной толщины слоя  $\eta = D(L - L_0)$  принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \eta} P(\eta, u) = \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} P(\eta, u) \quad (2.9)$$

с начальным условием

$$P(0, u) = \delta(u - 1).$$

Аналогичным образом, для плотности вероятностей перехода

$$p(u, \eta | u_0, \eta_0) = \langle \delta(u - u(\eta)) | u_0, \eta_0 \rangle$$

получаем уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial \eta} p(u, \eta | u_0, \eta_0) = \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} p(u, \eta | u_0, \eta_0), \quad (2.10)$$

$$p(u, \eta_0 | u_0, \eta_0) = \delta(u - u_0).$$

Его решение легко получить, используя интегральное *преобразование Мелера–Фока* (см., например, [33]), которое определяется посредством интеграла

$$F(\mu) = \int_1^\infty du f(u) P_{-1/2+i\mu}(u) \quad (\mu > 0), \quad (2.11)$$

где  $P_{-1/2+i\mu}(u)$  — *функция Лежандра первого рода (функция конуса)*, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d}{du} (u^2 - 1) \frac{d}{du} P_{-1/2+i\mu}(u) = - \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) P_{-1/2+i\mu}(u). \quad (2.12)$$

Формула обращения для преобразования (2.11) имеет вид

$$f(u) = \int_0^\infty d\mu \mu \operatorname{th}(\pi\mu) F(\mu) P_{-1/2+i\mu}(u) \quad (1 \leq u \leq \infty), \quad (2.13)$$

где  $F(\mu)$  описывается формулой (2.11).

Введем обозначение

$$p(\mu, \eta) = \int_1^{\infty} du p(u, \eta|u_0, \eta_0) P_{-1/2+i\mu}(u).$$

Умножая теперь уравнение (2.10) на  $P_{-1/2+i\mu}(u)$  и интегрируя по  $u$  в пределах от 1 до  $\infty$ , получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \eta} p(\mu, \eta) = \int_1^{\infty} du P_{-1/2+i\mu}(u) \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} p(u, \eta|u_0, \eta_0) \quad (2.14)$$

с начальным условием

$$p(\mu, \eta_0) = P_{-1/2+i\mu}(u_0). \quad (2.15)$$

Интегрируя дважды по частям в правой части (2.14) и используя дифференциальное уравнение Лежандра для  $P_{-1/2+i\mu}(u)$  (2.12), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для  $p(\mu, \eta)$ :

$$\frac{d}{d\eta} p(\mu, \eta) = -\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right) p(\mu, \eta),$$

решение которого с начальным условием (2.15) имеет вид

$$p(\mu, \eta) = P_{-1/2+i\mu}(u_0) \exp\left(-\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)(\eta - \eta_0)\right).$$

Используя теперь формулу обращения (2.13), получаем решение уравнения (2.10) в виде интеграла Мелера-Фока:

$$p(u, \eta|u_0, \eta_0) = \int_0^{\infty} d\mu \mu \operatorname{th}(\pi\mu) \exp\left(-\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)(\eta - \eta_0)\right) P_{-1/2+i\mu}(u) P_{-1/2+i\mu}(u_0). \quad (2.16)$$

При отсутствии слоя неоднородной среды  $\eta_0 = 0$  величина  $u_0 = 1$ , и мы получаем выражение

$$P(u, \eta) = \int_0^{\infty} d\mu \mu \operatorname{th}(\pi\mu) \exp\left(-\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)(\eta - \eta_0)\right) P_{-1/2+i\mu}(u), \quad (2.17)$$

соответствующее решению уравнения Фоккера-Планка для одноточечной плотности вероятностей (2.9).

Учитывая, что

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^n} P_{-1/2+i\mu}(x) = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\mu\pi)} K_n(\mu),$$

где

$$K_{n+1}(\mu) = \frac{1}{2n} \left[ \mu^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \right] K_n(\mu), \quad K_1(\mu) = 1,$$

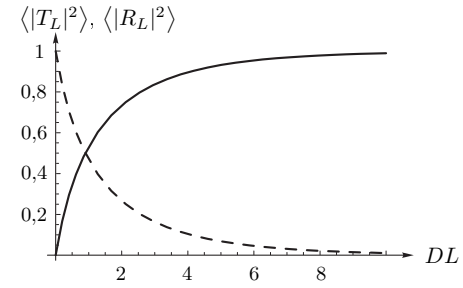


Рис. 2.1. Зависимости величин  $\langle |R_L|^2 \rangle$  и  $\langle |T_L|^2 \rangle$  от толщины слоя

из представления (2.17) можно вычислить статистические характеристики коэффициентов отражения  $W_L = |R_L|^2$  и прохождения  $|T_L|^2 = 1 - |R_L|^2 = 2/(1+u_L)$  и, в частности, получить выражение для моментов квадрата модуля коэффициента прохождения [36, 110]:

$$\langle |T_L|^{2n} \rangle = 2^n \pi \int_0^{\infty} d\mu \frac{\mu \operatorname{sh}(\mu\pi)}{\operatorname{ch}^2(\mu\pi)} K_n(\mu) \exp\left(-\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)\eta\right). \quad (2.18)$$

График зависимости величин  $\langle W_L \rangle = \langle |R_L|^2 \rangle$  и  $\langle |T_L|^2 \rangle = 1 - \langle |R_L|^2 \rangle$  от толщины слоя приведен на рис. 2.1.

При достаточно большой толщине слоя, а именно  $\eta = D(L - L_0) \gg 1$ , для моментов модуля коэффициента прохождения из (2.18) следует асимптотическая формула

$$\langle |T_L|^{2n} \rangle \approx \frac{[(2n-3)!!]^2 \pi^2 \sqrt{\pi}}{2^{2n-1} (n-1)!} \frac{1}{\eta \sqrt{\eta}} e^{-\eta/4},$$

и, следовательно, асимптотическая зависимость любого момента модуля коэффициента прохождения  $|T_L|$  от толщины слоя имеет универсальную зависимость (меняется лишь численный коэффициент).

Стремление к нулю всех моментов величины  $|T_L|$  с увеличением толщины слоя означает, что  $|R_L| \rightarrow 1$  с вероятностью единица, т.е. *полупространство случайно-неоднородной недиссипативной слоистой среды полностью отражает падающую на нее волну*. Очевидно, что это явление не зависит от статистической модели среды и от условия справедливости описания с помощью дополнительного усреднения по быстрым осцилляциям, связанным с фазой коэффициента отражения.

Подчеркнем, что в приближении дельта-коррелированности случайного процесса  $\varepsilon_1(L)$  случайные процессы  $W_L$  и  $u_L$  — марковские процессы по параметру  $L$ . При этом очевидно, что плотность вероятностей перехода

$$p(u, L|u', L') = \langle \delta(u_L - u|u_{L'} = u') \rangle$$

описывается также уравнением (2.10), т.е.

$$\frac{\partial}{\partial L} p(u, L|u', L') = D \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} p(u, L|u', L'),$$

с начальным условием

$$p(u, L'|u', L') = \delta(u - u'),$$

решение которого имеет структуру (2.16):

$$p(u, L|u', L') = \int_0^\infty d\mu \mu \operatorname{th}(\pi\mu) \exp\left(-D\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)(L - L')\right) P_{-1/2+i\mu}(u) P_{-1/2+i\mu}(u'). \quad (2.19)$$

При  $L' = L_0$  и  $u' = 1$  выражение (2.19) переходит в односточную плотность вероятностей (2.17).

### 2.1.2. Недиссипативная среда (случай наклонного падения волны на слой среды)

Ситуация не меняется и для случая наклонного падения волны на полупространство случайно-неоднородной слоистой среды под углом  $\theta$  к оси  $x$ . В этом случае коэффициент отражения и волновое поле внутри среды описываются уравнениями погружения (A.41), с. 110 приложения А:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} R_L &= 2ik(\cos\theta) R_L + \frac{ik}{2(\cos\theta)} \varepsilon(L) (1 + R_L)^2, \quad R_{L_0} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial L} u(x, L) &= ik(\cos\theta) u(x, L) + \frac{ik}{2(\cos\theta)} \varepsilon(L) (1 + R_L) u(x, L), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$u(x, x) = 1 + R_x.$$

Из первого уравнения (2.20) следует, что для недиссипативной среды величина  $W_L = |R_L|^2$  описывается уравнением

$$\frac{d}{dL} W_L = \frac{k}{\cos\theta} \varepsilon_1(L) \sqrt{W_L} (1 - W_L) \sin\phi_L, \quad W_{L_0} = 0, \quad (2.21)$$

где  $\phi_L$  — фаза коэффициента отражения. Совершенно очевидно, что с вероятностью, равной единице, для любого случайного процесса  $\varepsilon_1(L)$  и для любого угла  $\theta$  падения для полупространства случайной среды ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ) величина  $W_L \rightarrow 1$ .

В этом случае коэффициент отражения имеет структуру  $R_L = e^{i\phi_L}$ , где фаза  $\phi_L$  описывается уравнением погружения, вытекающим из (2.20):

$$\frac{d}{dL} \phi_L = 2k(\cos\theta) + \frac{k}{\cos\theta} \varepsilon_1(L) (1 + \cos\phi_L), \quad \phi_{L_0} = 0. \quad (2.22)$$

Нас интересует закон распределения вероятностей случайной величины  $\phi_L$ . Решение уравнения (2.22) определяет его на всей оси  $\phi_L (-\infty, \infty)$ . Однако для приложений полезнее знание распределения вероятностей на интервале  $(-\pi, \pi)$ , которое для полупространства, естественно, не должно зависеть от  $L$ . Для получения этого распределения удобно вместо фазы волны  $\phi_L$  рассматривать функцию  $z_L = \operatorname{tg}(\phi_L/2)$ , имеющую сингулярные точки. Динамическое уравнение для нее имеет вид

$$\frac{d}{dL} z_L = k \cos\theta (1 + z_L^2) + \frac{k}{\cos\theta} \varepsilon_1(L), \quad z_{L_0} = 0. \quad (2.23)$$

Считая, что случайная функция  $\varepsilon_1(L)$  является гауссовой дельта-коррелированной случайной функцией с параметрами (1.30) для плотности вероятностей

$$P(L, z) = \langle \delta(z_L - z) \rangle,$$

определенной на всей оси  $(-\infty, \infty)$ , получаем уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial L} P(L, z) = -k \cos\theta \frac{\partial}{\partial z} (1 + z_L^2) P(L, z) + \frac{2D}{\cos^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial z^2} P(L, z). \quad (2.24)$$

Для полупространства случайно-неоднородной среды ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ) соответствующее «стационарное» решение уравнения Фоккера–Планка

$$P(z) = \lim_{L_0 \rightarrow -\infty} P(L, z),$$

независящее от  $L$ , описывается уравнением

$$-\kappa \frac{d}{dz} (1 + z^2) P(z) + \frac{d^2}{dz^2} P(z) = 0, \quad (2.25)$$

где параметр

$$\kappa = \frac{\alpha}{2} \cos^3\theta, \quad \alpha = \frac{k}{D}, \quad D = \frac{k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0}{2}.$$

Отметим, что в случае нормального падения волны ( $\theta = 0$ ) параметр  $\kappa = \alpha/2$  описывает влияние волнового числа на статистические характеристики задачи [70, 71, 75].

Решение уравнения (2.25), соответствующее постоянству плотности потока вероятностей, имеет вид [105, 112]

$$P(z) = J(\kappa) \int_z^\infty d\xi \exp\left\{-\kappa\xi \left[1 + \frac{\xi^3}{3} + z(z + \xi)\right]\right\}, \quad (2.26)$$

где «стационарное» значение плотности потока вероятностей

$$J^{-1}(\kappa) = \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \int_0^\infty \xi^{-1/2} d\xi \exp\left\{-\kappa \left(\xi + \frac{\xi^3}{12}\right)\right\}.$$

Соответствующее распределение вероятностей для фазы волны в интервале  $(-\pi, \pi)$

$$P(\phi) = \frac{1 + z^2}{2} P(z) \Big|_{z=\operatorname{tg}(\phi/2)}$$

приведено на рис. 2.2, а для различных значений параметра  $\kappa = 0, 1; 1, 0; 10$ .

При  $\kappa \gg 1$  получаем асимптотику

$$P(z) = \frac{1}{\pi(1 + z^2)},$$

что соответствует равномерному распределению фазы коэффициента отражения:

$$P(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi < \phi < \pi.$$

В обратном предельном случае  $\kappa \ll 1$ , соответствующем пологому падению волны на полупространство ( $\theta \rightarrow \pi/2$ ), мы получаем

$$P(z) = \kappa^{1/3} \left(\frac{3}{4}\right)^{1/6} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(1/6)} \Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\kappa z^3}{3}\right),$$

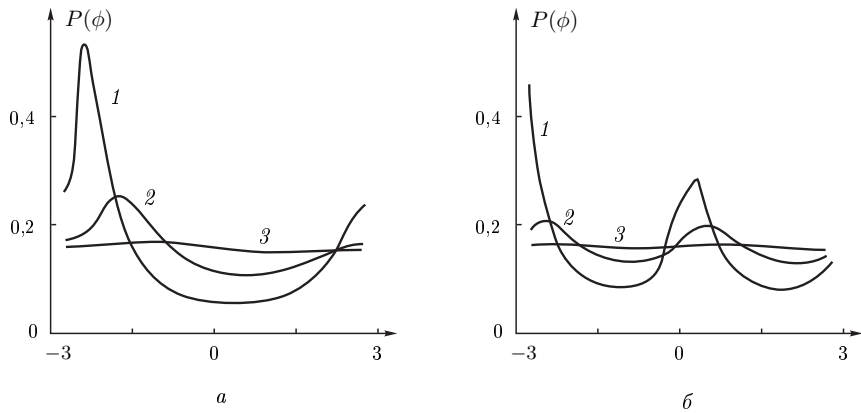


Рис. 2.2. Стационарная плотность вероятностей  $P(\phi)$  для несогласованной (а) и согласованной (б) границ. Кривая 1 соответствует параметру  $\kappa = 0,1$ ; 2 —  $\kappa = 1$ ; 3 —  $\kappa = 10$

где  $\Gamma(\mu, z)$  — *неполная гамма-функция*. При  $\kappa|z|^3 \gg 3$  и  $|z| \rightarrow \infty$  отсюда следует, что

$$P(z) = \kappa^{1/3} \left(\frac{3}{4}\right)^{1/6} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/6)} \left(\frac{3}{\kappa z^3}\right)^{2/3}.$$

Распределение вероятностей (2.26) позволяет вычислить различные статистические характеристики, связанные с коэффициентом отражения. В частности, например на границе слоя  $x = L$ , средняя интенсивность волнового поля описывается асимптотическими выражениями

$$\langle I(L, L) \rangle = 2 \langle 1 + \cos \phi_L \rangle = \begin{cases} 2, & \kappa \gg 1, \\ 2 \cdot 3^{1/6} \cdot \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \kappa^{1/3}, & \kappa \ll 1. \end{cases}$$

Таким образом, для пологого падения волны, когда  $\theta \rightarrow \pi/2$ , величина  $R_L \rightarrow -1$  и, следовательно, волновое поле на границе слоя  $x = L - u(L, L) = 1 + R_L$  стремится к нулю. Этот результат показывает, что случайно-неоднородная среда для пологого падения волны является как бы зеркалом. Этот эффект существенно связан со скачком функции  $\varepsilon_1(x)$  на границе слоя  $x = L$ . Этот малый скачок не вносит существенного вклада в статистику при малых углах падения волны (нормальное падение), однако для пологого падения этот скачок проявляется как бесконечный барьер и статистическая ситуация меняется кардинальным образом. Следовательно, распределение вероятностей для фазы коэффициента отражения (2.26) содержит информацию как о рассеянии волны на случайных неоднородностях среды, так и о рассеянии на скачке функции  $\varepsilon_1(x)$  на границе слоя без разделения этих эффектов. Разделить эти эффекты можно, рассматривая задачу с согласованной границей в рамках диффузионного приближения, что и будет сделано в дальнейшем.

### 2.1.3. Диссипативная среда

При наличии поглощения в среде уравнения (2.6) и (2.8) не могут быть решены аналитически для слоя конечной толщины. Однако для полупространства ( $L_0 \rightarrow -\infty$ )

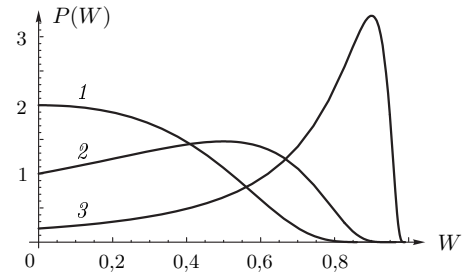


Рис. 2.3. Плотность вероятностей для квадрата модуля коэффициента отражения  $P(W)$ . Кривая 1 соответствует параметру  $\beta = 1$ ; 2 —  $\beta = 0,5$ ; 3 —  $\beta = 0,1$

существует «стационарная» плотность вероятностей для величин  $W_L$  и  $u_L$  [1, 117], не зависящая от  $L$  и удовлетворяющая уравнениям

$$2(\beta - 1 + W)P(W) + (1 - W)^2 \frac{d}{dW}P(W) = 0, \quad 0 < W < 1, \quad (2.27)$$

$$\beta P(u) + \frac{d}{du}P(u) = 0, \quad u > 1,$$

где  $\beta = k\gamma/D$  — безразмерный коэффициент поглощения.

Решения уравнений (2.27) имеют вид

$$P(W) = \frac{2\beta}{(1 - W)^2} \exp\left\{-\frac{2\beta W}{1 - W}\right\}, \quad P(u) = \beta e^{-\beta(u-1)}, \quad (2.28)$$

и график функции  $P(W)$  представлен для различных значений параметра  $\beta$  на рис. 2.3.

Физический смысл плотности вероятностей (2.28) очевиден — она описывает статистические свойства коэффициента отражения от достаточно протяженного хаотически неоднородного слоя, до конца которого падающая волна не проникает вследствие ее динамического поглощения средой.

С помощью распределений (2.28) можно вычислить все моменты величины  $W_L = |R_L|^2$ . Так, для среднего значения квадрата модуля коэффициента отражения получаем

$$\langle W \rangle = \int_0^1 dW W P(W) = \int_1^\infty du \frac{u-1}{u+1} P(u) = 1 + 2\beta e^{2\beta} \text{Ei}(-2\beta),$$

где  $\text{Ei}(-x) = -\int_x^\infty dt e^{-t}/t$ , ( $x > 0$ ) — *интегральная показательная функция*. Учитывая асимптотические разложения для функции  $\text{Ei}(-x)$  (см., например, [2])

$$\text{Ei}(-x) = \begin{cases} \ln x & (x \ll 1), \\ -e^{-x} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) & (x \gg 1), \end{cases}$$

получаем асимптотические разложения для величины  $\langle W \rangle = \langle |R_L|^2 \rangle$ :

$$\langle W \rangle \approx \begin{cases} 1 - 2\beta \ln\left(\frac{1}{\beta}\right), & \beta \ll 1, \\ \frac{1}{2\beta}, & \beta \gg 1. \end{cases} \quad (2.29)$$

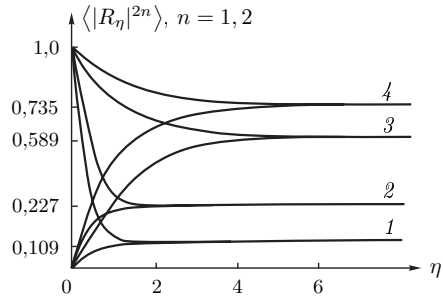


Рис. 2.4. Графики зависимости статистических характеристик  $W_L = |R_L|^2$ : кривые 1, 2, — первый и второй моменты при  $\beta = 1$ , кривые 3, 4 — первый и второй моменты при  $\beta = 0,08$

Для нахождения высших моментов величины  $W_L = |R_L|^2$  умножим первое уравнение в (2.27) на  $W^n$  и проинтегрируем по  $W$  от 0 до 1. В результате получаем рекуррентное соотношение

$$n \langle W^{n+1} \rangle - 2(\beta + n) \langle W^n \rangle + n \langle W^{n-1} \rangle = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.30)$$

с помощью которого можно последовательно вычислить все старшие моменты. Так, для  $n = 1$  получаем

$$\langle W^2 \rangle = 2(\beta + 1) \langle W \rangle - 1.$$

Переход к «стационарному» распределению вероятностей можно осуществить не только предельным переходом  $L_0 \rightarrow -\infty$ , но и переходом  $L \rightarrow \infty$ . Уравнение (2.6) решалось численно для двух значений параметра:  $\beta = 1,0$  и  $\beta = 0,08$ , для различных начальных условий [36, 110]. По найденному решению вычислялись величины  $\langle W_L \rangle$ ,  $\langle W_L^2 \rangle$ , графики поведения которых в зависимости от безразмерной толщины слоя  $\eta = D(L - L_0)$  представлены на рис. 2.4. Из графиков видно, что при  $\beta \geq 1$  распределение вероятностей выходит на свое «стационарное» распределение довольно быстро ( $\eta \sim 1,5$ ), в случае же  $\beta = 0,08$  (большая «стохастичность» задачи)  $\eta \geq 5$ .

Отметим, что для рассматриваемой задачи плотность потока энергии и интенсивность волнового поля на границе слоя среды  $x = L$  выражаются через коэффициент отражения и, следовательно, при  $\beta \ll 1$

$$\langle S(L, L) \rangle = 1 - \langle W_L \rangle = 2\beta \ln \left( \frac{1}{\beta} \right), \quad \langle I(L, L) \rangle = 1 + \langle W_L \rangle = 2. \quad (2.31)$$

Учитывая, что для полупространства случайно-неоднородной среды  $|T_L| = 0$ , для энергии волнового поля, заключенного в этом полупространстве:

$$E = D \int_{-\infty}^L dx I(x, L),$$

исходя из равенства (1.4), получаем распределение вероятностей вида

$$P(E) = \beta P(W)_{W=(1-\beta E)} = \frac{2}{E^2} \exp \left\{ -\frac{2}{E} (1 - \beta E) \right\} \theta(1 - \beta E), \quad (2.32)$$

и, в частности, например при  $\beta \ll 1$ ,

$$\langle E \rangle = 2 \ln \left( \frac{1}{\beta} \right). \quad (2.33)$$

Отметим, что распределение вероятностей (2.32) допускает предельный переход  $\beta = 0$ , в результате которого получаем предельную плотность вероятностей

$$P(E) = \frac{2}{E^2} \exp \left\{ -\frac{2}{E} \right\}, \quad (2.34)$$

затухающую степенным образом для больших значений энергии  $E$  с интегральной функцией распределения

$$F(E) = \exp \left\{ -\frac{2}{E} \right\}.$$

Следствием (2.34) является тот факт, что все моменты полной энергии волнового поля равны бесконечности. И в то же время существует конечная вероятность ограничения полной энергии произвольной величиной в отдельных реализациях волнового поля.

Можно также показать [36], что для полупространства ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ) при  $\beta \ll 1$  имеет место выражение

$$D \int_{-\infty}^L dx \langle I^2(x, L) \rangle = \frac{1}{\beta}.$$

### Замечание 2.1. Корреляционная функция коэффициента отражения

Выше мы подробно рассмотрели статистическое описание квадрата модуля коэффициента отражения. Аналогичным образом можно рассмотреть и корреляции самой комплексной функции  $R_L$ . Рассмотрим в качестве примера функцию  $\langle R_L R_{L'}^* \rangle$ , где  $L' < L$ .

Умножая уравнение (1.11) на  $R_{L'}^*$  и усредняя по ансамблю реализаций случайного процесса  $\varepsilon_1(L)$ , получаем уравнение

$$\frac{d}{dL} \langle R_L R_{L'}^* \rangle = 2ik \langle R_L R_{L'}^* \rangle + \frac{ik}{2} \langle \varepsilon_1(L) (1 + R_L)^2 R_{L'}^* \rangle - \frac{k\gamma}{2} \langle (1 + R_L)^2 R_{L'}^* \rangle$$

с начальным условием

$$\langle R_L R_{L'}^* \rangle_{L=L'} = \langle |R_{L'}|^2 \rangle.$$

Используя далее формулу Фурутцу–Новикова (2.4) и выражения для вариационных производных

$$\frac{\delta}{\delta \varepsilon_1(L)} R_L = \frac{ik}{2} (1 + R_L)^2,$$

$$\frac{\delta}{\delta \varepsilon_1(L)} R_{L'}^* = 0,$$

после дополнительного усреднения по быстрым осцилляциям получаем уже замкнутое уравнение

$$\frac{d}{dL} \langle R_L R_{L'}^* \rangle = [2ik - D(3 + \beta)] \langle R_L R_{L'}^* \rangle, \quad \langle R_L R_{L'}^* \rangle_{L=L'} = \langle |R_{L'}|^2 \rangle,$$

решение которого

$$\langle R_L R_{L'}^* \rangle = \langle |R_{L'}|^2 \rangle \exp \{ [2ik - D(3 + \beta)] (L - L') \}. \quad (2.35)$$

Отметим, что сама величина  $\langle R_L R_{L'}^* \rangle$  физического смысла не имеет. Она описывает корреляционную зависимость решений двух различных краевых задач, соответствующих слоям с толщинами  $(L - L_0)$  и  $(L' - L_0)$ . Однако эта величина удобна для сопоставления с результатами численного моделирования и, в частности, для установления эргодичности коэффициента отражения по параметру  $L$ . ♦

## 2.2. Источник внутри слоя неоднородной среды

Для источника плоских волн, находящегося внутри среды, волновое поле и плотность потока энергии в точке расположения источника описываются формулами (1.23) и (1.28). Для модели дельта-коррелированных флуктуаций  $\varepsilon_1(x)$  величины  $R_1(x_0)$  и  $R_2(x_0)$  статистически независимы в неперекрывающихся частях пространства, так как они описываются динамическими уравнениями (1.22) на с. 13. Для неограниченного пространства ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ,  $L \rightarrow \infty$ ) плотности вероятностей для величин  $R_1(x_0)$  и  $R_2(x_0)$  описываются формулой (2.28) и, следовательно, для средней интенсивности волнового поля в точке расположения источника и среднего значения плотности потока энергии в точке расположения источника получаем выражение [36, 110]

$$\langle I(x_0, x_0) \rangle = 1 + \frac{1}{\beta}. \quad (2.36)$$

Неограниченный рост средней интенсивности в точке расположения источника при  $\beta \rightarrow 0$  свидетельствует о накоплении энергии волны в хаотически слоистой среде, а в то же время среднее значение плотности потока энергии в точке расположения источника  $\langle S(x_0, x_0) \rangle = 1$  не зависит от флуктуаций параметра среды и совпадает с плотностью потока энергии в свободном пространстве.

Аналогичным образом, с помощью формул (1.26) и (1.28) для источника, расположенного на отражающей границе  $x_0 = L$ , получаем

$$\langle I_{\text{ref}}(L, L) \rangle = 4 \left( 1 + \frac{2}{\beta} \right), \quad \langle S_{\text{ref}}(L, L) \rangle = 4, \quad (2.37)$$

т. е. среднее значение плотности потока энергии от источника, расположенного на отражающей границе, также не зависит от флуктуаций параметров среды и совпадает с плотностью потока энергии в свободном пространстве.

Отметим, что полученные выше формулы (2.36), (2.37) при  $\beta \rightarrow 0$  обращаются в бесконечность, т. е. наличие поглощения в среде (хоть и сколь угодно малого) является регуляризирующим фактором в задаче о точечном источнике.

Используя равенство (1.29), можно получить распределение вероятностей для энергии волнового поля в полупространстве:

$$E = D \int_{-\infty}^{x_0} dx I(x, x_0).$$

В частности, для источника, находящегося на отражающей границе, получаем выражение

$$P_{\text{ref}}(E) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{E\sqrt{E}} \exp \left\{ -\frac{2}{E} \left( 1 - \frac{\beta E}{4} \right)^2 \right\},$$

допускающее предельный переход  $\beta \rightarrow 0$ , аналогично случаю падения волны на полупространство случайно-неоднородной среды.

## 2.3. Статистическая локализация энергии

Полученные выше равенства, связанные со значениями волнового поля в фиксированных точках пространства (на границе среды и в точке расположения источника), позволяют, в силу равенства (1.29), сделать некоторые общие заключения и о поведении средней интенсивности волнового поля внутри случайно-неоднородной среды.

Так, для средней энергии, содержащейся в полупространстве  $(-\infty, x)$ , из (1.29) следует выражение

$$\langle E \rangle = D \int_{-\infty}^{x_0} dx \langle I(x, x_0) \rangle = \frac{1}{\beta} \langle S(x_0, x_0) \rangle. \quad (2.38)$$

Следовательно, для падающей на полупространство  $x \leq L$  плоской волны ( $x_0 = L$ ) при условии  $\beta \ll 1$  из (2.31) и (2.38) вытекают равенства

$$\langle E \rangle = 2 \ln \left( \frac{1}{\beta} \right), \quad \langle I(L, L) \rangle = 2. \quad (2.39)$$

Следовательно, большая часть средней энергии сосредоточена в части пространства

$$Dl_\beta \cong \ln \left( \frac{1}{\beta} \right),$$

т. е. осуществляется *статистическая локализация волнового поля*, связанная с поглощением волны. Отметим, что и при отсутствии флуктуаций параметров среды также осуществляется локализация энергии на масштабах порядка длины поглощения  $D \cdot l_{\text{abs}} \cong 1/\beta$ . Однако при выполнении условия  $\beta \ll 1$  имеем:  $l_{\text{abs}} \gg l_\beta$ . Если  $\beta \rightarrow 0$ , то величина  $l_\beta \rightarrow \infty$ , и в предельном случае непоглощающей среды, статистическая локализация волнового поля отсутствует.

Для источника в неограниченном пространстве имеем

$$\langle E \rangle = \frac{1}{\beta}, \quad \langle I(x_0, x_0) \rangle = 1 + \frac{1}{\beta},$$

и, следовательно, в отличие от предыдущего случая, локализация средней энергии осуществляется на пространственном масштабе

$$D|x - x_0| \cong 1$$

при  $\beta \rightarrow 0$ .

Аналогичным образом, для источника, расположенного на отражающей границе, имеем

$$\langle E \rangle = \frac{4}{\beta}, \quad \langle I_{\text{ref}}(L, L) \rangle = 4 \left( 1 + \frac{2}{\beta} \right),$$

и, следовательно, локализация средней энергии осуществляется на вдвое меньшем пространственном масштабе

$$D(L - x) \cong \frac{1}{2}$$

при  $\beta \rightarrow 0$ .

В рассмотренных выше задачах средняя энергия волнового поля существенно зависит от параметра  $\beta$  и стремится к бесконечности при условии  $\beta \rightarrow 0$ . Однако это справедливо только для средних величин. Далее, при анализе волнового поля внутри случайно-неоднородной среды мы убедимся, что даже при отсутствии поглощения в среде в отдельных реализациях волнового поля осуществляется *динамическая локализация*, что соответствует так называемой *андерсоновской локализации* [82].

### Замечание 2.2. Влияние модели среды

Развитая выше теория базировалась на модели гауссовых дельта-коррелированных флуктуаций величины  $\varepsilon_1(x)$ . Рассматриваемая задача может быть решена точно и для ряда других моделей одномасштабных случайных процессов с экспоненциальной корреляционной функцией (телеграфный, обобщенный телеграфный процессы) [50]. Результаты такого анализа совпадают с результатами диффузионного приближения. ◆

## 2.4. Диффузионное приближение

### 2.4.1. Задача с несогласованной границей

При выводе уравнений (2.6) и (2.8) мы использовали приближение дельта-коррелированности функции  $\varepsilon_1(x)$  и дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям, что накладывает определенные ограничения на условие малости пространственного радиуса корреляции  $l_0$  случайного процесса  $\varepsilon_1(x)$ . Для учета конечности пространственного радиуса корреляции  $l_0$  можно воспользоваться диффузионным приближением. В рамках этого приближения предполагается малость влияния флуктуаций процесса  $\varepsilon_1(x)$  на динамику волнового поля на масштабах порядка радиуса корреляции  $l_0$ , т. е. предполагается, что на масштабах порядка  $l_0$  волна распространяется как в свободном пространстве.

Исходным уравнением является точное равенство (2.5). В рамках диффузионного приближения вариационные производные  $\delta\phi_L/\delta\varepsilon_1(L')$  и  $\delta\varphi(L, W)/\delta\varepsilon_1(L')$  на масштабах порядка  $l_0$  описываются уравнениями с начальными условиями (поглощение волны в среде также считаем малым):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \frac{\delta\varphi(L, W)}{\delta\varepsilon_1(L')} = 0, \quad \frac{\delta\varphi(L, W)}{\delta\varepsilon_1(L')} \Big|_{L=L'} &= -k \frac{\partial}{\partial W} \left\{ \sqrt{W} (1 - W) \sin \phi_L \varphi(L', W) \right\}, \\ \frac{d}{dL} \frac{\delta\phi_L}{\delta\varepsilon_1(L')} = 0, \quad \frac{\delta\phi_L}{\delta\varepsilon_1(L')} \Big|_{L=L'} &= k \left\{ 1 + \frac{1 + W_{L'}}{2\sqrt{W_{L'}}} \cos \phi_{L'} \right\}. \end{aligned}$$

При этом и сами функции  $\varphi(L, W)$ ,  $W_L$  и  $\phi_L$  на масштабах порядка  $l_0$  описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \varphi(L, W) = 0, \quad \varphi(L, W) \Big|_{L=L'} &= \varphi(L', W), \\ \frac{d}{dL} W_L = 0, \quad W_L \Big|_{L=L'} = W_{L'}, \quad \frac{d}{dL} \phi_L = 2k, \quad \phi_L \Big|_{L=L'} &= \phi_{L'}. \end{aligned}$$

Следовательно, в рамках диффузионного приближения

$$\varphi(L', W) = \varphi(L, W), \quad W_{L'} = W_L, \quad \phi_{L'} = \phi_L - 2k(L - L'),$$

и вариационные производные  $\delta\phi_L/\delta\varepsilon_1(L')$  и  $\delta\varphi(L, W)/\delta\varepsilon_1(L')$  запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\delta\varphi(L, W)}{\delta\varepsilon_1(L')} &= -k \frac{\partial}{\partial W} \left\{ \sqrt{W} (1 - W) \sin [\phi_L - 2k(L - L')] \varphi(L, W) \right\}, \\ \frac{\delta\phi_L}{\delta\varepsilon_1(L')} &= k \left\{ 1 + \frac{1 + W_{L'}}{2\sqrt{W_{L'}}} \cos [\phi_L - 2k(L - L')] \right\}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Подставляя равенства (2.40) в уравнение (2.5), проводя дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям и считая, что толщина слоя случайно-неоднородной среды много больше масштаба  $l_0$  и длины волны, мы приходим к уравнению Фоккера-Планка (2.6) с коэффициентом диффузии:

$$D(k, l_0) = \frac{k^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi B_\varepsilon(\xi) \cos(2k\xi) = \frac{k^2}{4} \Phi_\varepsilon(2k), \quad (2.41)$$

где  $\Phi_\varepsilon(q) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi B_\varepsilon(\xi) e^{iq\xi}$  — спектральная функция случайного процесса  $\varepsilon_1(x)$ . Появление спектра функции  $\varepsilon_1(x)$  на удвоенной пространственной гармонике физически

связано с известным *условием Брэгга* для дифракции на пространственных структурах (см., например, [8]).

Диффузионное приближение соответствует предположению о малости влияния флуктуаций процесса  $\varepsilon_1(x)$  на динамику волнового поля на масштабах порядка радиуса корреляции  $l_0$ . В этом случае волновое поле, как функция параметра  $L$ , является марковским случайным процессом, что справедливо при выполнении условий

$$D(k, l_0) l_0 \ll 1, \quad \alpha = \frac{k}{D(k, l_0)} \gg 1.$$

Структура коэффициента диффузии  $D(k, l_0)$  зависит от параметра  $kl_0$ . Если  $kl_0 \ll 1$ , справедливо приближение дельта-коррелированности процесса  $\varepsilon_1(x)$ , в котором коэффициент диффузии не зависит от модели среды и

$$D(k, l_0) = \frac{k^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi B_\varepsilon(\xi) = \frac{k^2}{4} \Phi_\varepsilon(0).$$

В другом предельном случае,  $kl_0 \gg 1$ , коэффициент диффузии может существенно зависеть от модели среды.

Таким образом, диффузионное приближение справедливо для достаточно малого значения параметра  $\sigma_\varepsilon^2 \ll 1$ .

### 2.4.2. Задача с согласованной границей

Как отмечалось ранее для несогласованной границы  $x = L$ , отражение волны осуществляется не только за счет неоднородностей среды, но и за счет скачка функции  $\varepsilon_1(x)$  на этой границе. Разделить эти эффекты можно, рассматривая случай согласованной границы, когда отсутствует скачок функции  $\varepsilon_1(x)$  на границе слоя  $x = L$ , т. е. когда волновое число в свободном полупространстве  $x > L - k_L = k\sqrt{1 + \varepsilon_1(L)}$ . В этом случае волновое поле описывается краевой задачей

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) + k^2(x) u(x) = 0, \quad (2.42)$$

$$\left( 1 + \frac{i}{k(x)} \frac{d}{dx} \right) u(x) \Big|_{x=L} = 2, \quad \left( 1 - \frac{i}{k(x)} \frac{d}{dx} \right) u(x) \Big|_{x=L_0} = 0,$$

где

$$k^2(x) = k^2[1 + \varepsilon(x)].$$

Краевую задачу (2.42) с помощью метода погружения также можно переформулировать как задачу с начальными условиями по параметру  $L$  — положению правой границы слоя, на которую падает волна (см. приложение А, с. 114). Коэффициент отражения  $R_L$  и волновое поле в слое среды  $u(x) \equiv u(x, L)$  для малых флуктуаций функции  $\varepsilon_1(L)$  описываются уравнениями

$$\frac{d}{dL} R_L = 2ikR_L - k\gamma R_L + \frac{\xi(L)}{2} (1 - R_L^2), \quad R_{L_0} = 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x, L) = iku(x, L) - \frac{k\gamma}{2} u(x, L) + \frac{\xi(L)}{2} (1 - R_L) u(x, L), \quad u(x, x) = 1 + R_x, \quad (2.44)$$



где  $\xi(L) = \varepsilon'_1(L)$ , и мы видим, что изменилась структура нелинейного члена в уравнении для коэффициента отражения и случайные неоднородности описываются пространственной производной функции  $\varepsilon_1(L)$ . Ввиду этого приближение дельта-коррелированности процесса неприменимо, и необходимо в качестве простейшего приближения использовать диффузионное приближение.

Для гауссова процесса с корреляционной функцией  $B_\varepsilon(x)$  случайный процесс  $\xi(x)$  также гауссов с корреляционной функцией

$$B_\xi(x - x') = \langle \xi(x)\xi(x') \rangle = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} B_\varepsilon(x - x'). \quad (2.45)$$

Рассмотрим, как и ранее, величину  $W_L = |R_L|^2$ . Для нее получаем динамическое уравнение

$$\frac{d}{dL} W_L = -2k\gamma W_L + \frac{\xi(L)}{2} (1 - W_L) (R_L + R_L^*), \quad W_{L_0} = 0. \quad (2.46)$$

Введем индикаторную функцию  $\varphi(L, W) = \delta(W_L - W)$ , которая описывается уравнением Лиувилля:

$$\left( \frac{\partial}{\partial L} - 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} W \right) \varphi(L, W) = -\frac{\xi(L)}{2} \frac{\partial}{\partial W} \{ (1 - W) (R_L + R_L^*) \varphi(L, W) \}. \quad (2.47)$$

Усредняя это уравнение по ансамблю реализаций функции  $\xi(L)$  и используя формулу Фурутцу–Новикова (2.3) на с. 17, получаем для плотности вероятностей квадрата модуля коэффициента отражения  $P(L, W) = \langle \varphi(L, W) \rangle$  уравнение

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial L} - 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} W \right) P(L, W) = & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial W} \int_{L_0}^L dL' B_\xi(L - L') (1 - W) \times \\ & \times \left\langle \left( \frac{\delta R_L}{\delta \xi(L')} + \frac{\delta R_L^*}{\delta \xi(L')} \right) \varphi(L, W) + (R_L + R_L^*) \frac{\delta \varphi(L, W)}{\delta \xi(L')} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.48)$$

где  $B_\xi(L - L')$  — корреляционная функция случайного процесса  $\xi(L)$ .

В рамках диффузионного приближения вариационные производные  $\delta R_L / \delta \xi(L')$  и  $\delta \varphi(L, W) / \delta \xi(L')$  на масштабах порядка  $l_0$  описываются уравнениями с начальными условиями (поглощение волны в среде также считаем малым):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \frac{\delta \varphi(L, W)}{\delta \xi(L')} = 0, \quad \frac{\delta \varphi(L, W)}{\delta \xi(L')} \Big|_{L=L'} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial W} \{ (1 - W) (R_{L'} + R_{L'}^*) \varphi(L', W) \}, \\ \frac{d}{dL} \frac{\delta R_L}{\delta \xi(L')} = 2ik \frac{\delta R_L}{\delta \xi(L')}, \quad \frac{\delta R_L}{\delta \xi(L')} \Big|_{L=L'} = & \frac{1}{2} (1 - R_{L'}^2). \end{aligned}$$

При этом и сами функции  $\varphi(L, W)$  и  $W_L$  на масштабах порядка  $l_0$  описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \varphi(L, W) = 0, \quad \varphi(L, W) \Big|_{L=L'} = & \varphi(L', W), \\ \frac{d}{dL} R_L = 2ik R_L, \quad R_L \Big|_{L=L'} = & R_{L'}. \end{aligned}$$

Следовательно, в рамках диффузионного приближения

$$\varphi(L', W) = \varphi(L, W), \quad R_{L'} = R_L e^{-2ik(L-L')},$$

и вариационные производные  $\delta R_L / \delta \xi(L')$  и  $\delta \varphi(L, W) / \delta \xi(L')$  запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\delta \varphi(L, W)}{\delta \xi(L')} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial W} \left\{ (R_L e^{-2ik(L-L')} + R_L^* e^{2ik(L-L')}) (1 - W) \varphi(L, W) \right\}, \\ \frac{\delta R_L}{\delta \xi(L')} = & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial W} (e^{2ik(L-L')} - R_L^2 e^{-2ik(L-L')}) (1 - W) \varphi(L, W). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Подставляя равенства (2.49) в уравнение (2.48), проводя дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям и считая, что толщина слоя случайно-неоднородной среды много больше масштаба  $l_0$  и длины волны, мы приходим к уравнению Фоккера–Планка (2.6) с коэффициентом диффузии:

$$D(k, l_0) = \frac{1}{16} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta B_\xi(\eta) \cos(2k\eta) = \frac{1}{16} \Phi_\xi(2k) = \frac{k^2}{4} \Phi_\varepsilon(2k). \quad (2.50)$$

Таким образом, статистика модуля коэффициента отражения для задачи с согласованной границей совпадает со статистикой решения задачи с несогласованной границей. Это естественно, так как для нормального падения волны на несогласованную границу скачок функции  $k(L)$  на этой границе мал. Расхождение результатов следует ожидать только для наклонного пологого падения волны или для случая, когда невозможно проводить усреднение по быстрым осцилляциям.

При отсутствии поглощения из уравнений (2.43) и (2.46) ясно, что для полупространства случайно-неоднородной среды  $x < L$  ( $L_0 \rightarrow -\infty$ )  $W_L = 1$ , т. е. волна полностью отражается случайно-неоднородным полупространством. Аналогичная ситуация имеет место и для наклонного падения волны под углом  $\theta$  к оси  $x$ . В этом случае вместо уравнения (2.43) для коэффициента отражения и волнового поля внутри среды мы имеем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} R_L = 2ik (\cos \theta) R_L + \frac{\xi(L)}{2 \cos^2 \theta} (1 - R_L^2), \quad R_{L_0} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial L} u(x, L) = ik (\cos \theta) u(x, L) + \frac{\xi(L)}{2 \cos^2 \theta} (1 - R_L) u(x, L), \\ u(x, x) = 1 + R_x. \end{aligned} \quad (2.51)$$

В случае пологого падения волны для полупространства  $x < L$  величина  $R_L^2 \rightarrow 1$ , и потому  $R_L \rightarrow \pm 1$ . Следовательно, эти значения вносят наибольший вклад в статистику фазы коэффициента отражения.

Представляя коэффициент отражения в виде  $R_L = e^{i\phi_L}$ , для фазы получаем уравнение

$$\frac{d}{dL} \phi_L = 2k (\cos \theta) - \frac{\xi(L)}{2 \cos^2 \theta} \sin \phi_L, \quad \phi_{L_0} = 0. \quad (2.52)$$

Введем новую функцию  $z_L = \text{tg}(\phi_L/2)$ , имеющую сингулярные точки, аналогично случаю с несогласованной границей. Динамическое уравнение для нее имеет вид

$$\frac{d}{dL} z_L = 2k (\cos \theta) (1 + z_L^2) - \frac{\xi(L)}{2 \cos^2 \theta} z_L, \quad z_{L_0} = 0. \quad (2.53)$$

Для стохастического уравнения (2.47), действуя как и ранее, в диффузионном приближении для плотности вероятностей  $P(L, z) = \langle \delta(z_L - z) \rangle$ , определенной на всей оси  $(-\infty, \infty)$ , получаем уравнение Фоккера–Планка [103]

$$\frac{\partial}{\partial L} P(L, z) = -k \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} (1 + z^2) P(L, z) + \frac{2D}{\cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial}{\partial z} z P(L, z), \quad (2.54)$$

где величина  $D = k^2 \sigma_z^2 l_0 / 2$  определяет, как и ранее, коэффициент диффузии для нормального падения волны на слой среды.

Для полупространства ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ) стационарная, не зависящая от  $L$  плотность вероятностей  $P(z)$  описывается уравнением

$$-\kappa \frac{d}{dz} (1 + z^2) P(z) + \frac{2D}{\cos^2 \theta} \frac{d}{dz} z \frac{d}{dz} z P(z), \quad (2.55)$$

где, как и ранее, параметр

$$\kappa = \frac{\alpha}{2} \cos^3 \theta, \quad \alpha = \frac{k}{D}.$$

Решение этого уравнения с условием постоянства плотности потока вероятностей имеет вид квадратуры:

$$P(z) = -\frac{J(\kappa)}{z} \int_{z_0}^z \frac{dz_1}{z_1} \exp \left\{ \kappa \left( z - \frac{1}{z} - z_1 + \frac{1}{z_1} \right) \right\}.$$

Постоянная  $J(\kappa)$  определяется из условия нормировки  $\int_{-\infty}^{\infty} dz P(z) = 1$ , а произвольная величина  $z_0$  должна быть выбрана из условия конечности квадратуры для всех  $z$  из  $(-\infty, \infty)$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} P(z) &= \theta(z) P_+(z) + \theta(-z) P_-(z), \\ P_+(z) &= \frac{J(\kappa)}{z} \int_0^{\infty} \frac{ds}{1+s} \exp \left\{ -\kappa s \left( z + \frac{1}{z(1+s)} \right) \right\}, \quad z > 0, \\ P_-(z) &= -\frac{J(\kappa)}{z} \int_0^1 \frac{ds}{1-s} \exp \left\{ \kappa s \left( z + \frac{1}{z(1-s)} \right) \right\}, \quad z < 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Плотность вероятностей  $P(z)$  — непрерывная функция, и

$$P_+(z = +0) = P_-(z = -0) = \frac{J(\kappa)}{\kappa},$$

где

$$\frac{1}{J(\kappa)} = \pi^2 \left[ J_0^2(2\kappa) + N_0^2(2\kappa) \right] = \begin{cases} \pi, & \kappa \gg 1, \\ \left[ \pi^2 + 4(\ln \kappa + C)^2 \right], & \kappa \ll 1. \end{cases}$$

Здесь  $J_0(x)$  — функция Бесселя,  $N_0(x)$  — функция Неймана и  $C$  — постоянная Эйлера.

При условии  $\kappa \gg 1$ , получаем асимптотическое решение в виде

$$P(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)},$$

соответствующее однородному распределению фазы коэффициента отражения

$$P(\phi) = \frac{1}{2\pi}$$

на  $(-\pi, \pi)$ . При  $\kappa \ll 1$  невозможно написать однородное по  $\phi$  асимптотическое выражение для  $P(\phi)$ . Численные результаты приведены на рис. 2.2, б, с. 24, для  $\kappa = 0,1; 1,0; 10$ .

Рассмотрим теперь статистические характеристики волнового поля на границе  $x = L$ , связанные с фазовыми флуктуациями коэффициента отражения в асимптотическом случае  $\kappa \ll 1$ . Среднее значение интенсивности волнового поля на границе  $x = L$  описывается выражением

$$\langle I(L, L) \rangle = 2 + \langle R_L + R_L^* \rangle = 2 \langle (1 + \cos \phi_L) \rangle = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} P(z),$$

и, следовательно, при  $\kappa \ll 1$  получаем равенство

$$\langle I(L, L) \rangle = 2,$$

которое означает, что статистические веса значений  $R_L = +1$  и  $R_L = -1$  совпадают, хотя плотность вероятностей существенно отличается от равномерной.

### Глава 3

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Перейдем теперь к статистическому описанию волнового поля внутри среды. Рассмотрим две задачи: о падении волны на слой среды и об источнике волн внутри среды.

### 3.1. Нормальное падение волны на слой среды

В общем случае при наличии поглощения в среде волновое поле описывается краевой задачей (1.1), (1.2) на с. 7. Введем в рассмотрение комплексные встречные волны

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x), \quad \frac{d}{dx}u(x) = -ik[u_1(x) - u_2(x)],$$

связанные с волновым полем с помощью равенств (1.9) на с. 10:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{i}{k} \frac{d}{dx} \right] u(x), \quad u_1(L) = 1, \\ u_2(x) &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{i}{k} \frac{d}{dx} \right] u(x), \quad u_2(L_0) = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Волновое поле, как функция параметра  $L$ , описывается уравнением погружения (1.12) на с. 11. Очевидно, что и встречные волны также будут удовлетворять уравнениям (1.12), но с различными начальными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} u_1(x, L) &= ik \left( 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L) \right) u_1(x, L), \quad u_1(x, x) = 1, \\ \frac{\partial}{\partial L} u_2(x, L) &= ik \left( 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L) \right) u_2(x, L), \quad u_2(x, x) = R_x, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где коэффициент отражения  $R_L$  описывается уравнением (1.11) на с. 11.

Введем теперь интенсивности встречных волн  $W_1(x, L) = |u_1(x, L)|^2$  и  $W_2(x, L) = |u_2(x, L)|^2$ , удовлетворяющие, очевидно, уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} W_1(x, L) &= -k\gamma W_1(x, L) + \frac{ik}{2} \varepsilon(L) (R_L - R_L^*) W_1(x, L), \\ \frac{\partial}{\partial L} W_2(x, L) &= -k\gamma W_2(x, L) + \frac{ik}{2} \varepsilon(L) (R_L - R_L^*) W_2(x, L), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$W_1(x, x) = 1, \quad W_2(x, x) = |R_x|^2.$$

Величина  $W_L = |R_L|^2$ , входящая в начальное условие в (3.3), удовлетворяет уравнению (1.13) на с. 11 или уравнению

$$\frac{d}{dL} W_L = -2k\gamma W_L - \frac{ik}{2} \varepsilon_1(L) (R_L - R_L^*) (1 - W_L), \quad W_{L_0} = 0. \quad (3.4)$$

В уравнениях (3.3) и (3.4) опущены слагаемые в диссипативных членах, не вносящие вклада в накапливающиеся эффекты.

Будем по-прежнему считать  $\varepsilon_1(x)$  гауссовым дельта-коррелированным случайным процессом с корреляционной функцией (1.30) на с. 16. В силу того что уравнения (3.3), (3.4) — уравнения первого порядка с начальными условиями, можно для совместной плотности вероятностей величин  $W_1(x, L)$ ,  $W_2(x, L)$  и  $W_L$ ,

$$P(x, L, W_1, W_2, W) = \langle \delta(W_1(x, L) - W_1) \delta(W_2(x, L) - W_2) \delta(W_L - W) \rangle,$$

обычным образом получить уравнение Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(x, L, W_1, W_2, W) &= k\gamma \left( \frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 + 2 \frac{\partial}{\partial W} W \right) P(x, L, W_1, W_2, W) + \\ &+ D \left[ \frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right] P(x, L, W_1, W_2, W) + \\ &+ D \left[ \frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right]^2 W P(x, L, W_1, W_2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

с начальным условием

$$P(x, x, W_1, W_2, W) = \delta(W_1 - 1) \delta(W_2 - W) P(x, W), \quad (3.6)$$

где функция  $P(L, W)$  — плотность вероятностей квадрата модуля отражения  $W_L$ , описываемая уравнением (2.6) на с. 18. В уравнении (3.5), как и ранее, коэффициент диффузии  $D = k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0 / 2$ , и при выводе уравнения используется дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям, обусловленным решением задачи при  $\varepsilon = 0$ :  $u(x) \sim e^{\pm ikx}$ .

Учитывая, что уравнения (3.3) для функций  $W_n(x, L)$  линейны, можно перейти к производящей функции для моментов интенсивностей встречных волн:

$$Q(x, L, \mu, \lambda, W) = \int_0^1 dW_1 \int_0^1 dW_2 W_1^{\mu-1} W_2^\lambda P(x, L, W_1, W_2, W), \quad (3.7)$$

удовлетворяющей более простому уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} Q(x, L, \mu, \lambda, W) &= -k\gamma \left( \mu - 2 \frac{\partial}{\partial W} W \right) Q(x, L, \mu, \lambda, W) - \\ &- D \left[ \mu + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right] Q(x, L, \mu, \lambda, W) + D \left[ \mu - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right]^2 W Q(x, L, \mu, \lambda, W) \end{aligned} \quad (3.8)$$

с начальным условием

$$Q(x, x, \mu, \lambda, W) = W^\lambda P(x, W).$$

Зная функцию  $Q(x, L, \mu, \lambda, W)$ , можно определить моментные функции интенсивностей встречных волн с помощью равенства

$$\langle W_1^{\mu-1}(x, L) W_2^\lambda(x, L) \rangle = \int_0^1 dW Q(x, L, \mu, \lambda, W). \quad (3.9)$$

Уравнение (3.8) описывает статистическое поведение волнового поля внутри слоя среды  $L_0 \leq x \leq L$  и, в частности, коэффициент прохождения волны, если в нем положить  $x = L_0$ .

В предельном случае полупространства ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ) уравнение (3.8) переходит в уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} Q(\xi, \mu, \lambda, W) = & -\beta \left( \mu - 2 \frac{\partial}{\partial W} W \right) Q(\xi, \mu, \lambda, W) - \\ & - \left[ \mu + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right] Q(\xi, \mu, \lambda, W) + \left[ \mu - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right]^2 W Q(\xi, \mu, \lambda, W) \end{aligned} \quad (3.10)$$

с начальным условием

$$Q(0, \mu, \lambda, W) = W^\lambda P(W),$$

где введено безразмерное расстояние  $\xi = D(L - x) > 0$ , а «стационарная», не зависящая от  $L$  плотность вероятностей для модуля коэффициента отражения  $P(W)$  описывается формулой (2.28) на с. 25. Равенство (3.9) в этом случае переписывается в виде

$$\left\langle W_1^{\mu-\lambda}(\xi) W_2^\lambda(\xi) \right\rangle = \int_0^1 dW Q(\xi, \mu, \lambda, W). \quad (3.11)$$

Далее нам будет более удобно рассмотреть в отдельности случайную среду без поглощения и случайную среду при наличии поглощения.

### 3.1.1. Недиссипативная среда (стохастический волновой параметрический резонанс и динамическая локализация волн)

Если поглощение в среде отсутствует, уравнения метода погружения (1.11) и (1.12) на с. 11 упрощаются. В этом случае уравнение для интенсивности волнового поля (1.13) интегрируется и интенсивность непосредственно связана с коэффициентом отражения с помощью равенства (1.17). Это равенство, с помощью представления (2.7) на с. 18 для коэффициента отражения, можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} I(x, L) = \frac{u_x + \sqrt{u_x^2 - 1} \cos \phi_x}{1 + u_L}, \quad (3.12)$$

где фаза коэффициента отражения  $\phi_x$  имеет структуру  $\phi_x = 2kx + \tilde{\phi}_x$ , а функции  $u_x$  и  $\tilde{\phi}_x$  медленно меняются на расстояниях порядка длины волны. Поэтому при изучении различных комбинаций из функции  $I(x, L)$  целесообразно рассматривать их медленные изменения по  $x$ , т. е. предварительно усреднить по функциям, быстро меняющимся на длине волны. Такое усреднение будем обозначать горизонтальной чертой. Так, усреднение выражения (3.12) дает

$$\frac{1}{2} \overline{I(x, L)} = \frac{u_x}{1 + u_L}. \quad (3.13)$$

Аналогично получаем

$$\frac{1}{4} \overline{I^2(x, L)} = \frac{3u_x^2 - 1}{2(1 + u_L)^2} \quad (3.14)$$

и т. д.

Как указывалось выше, функция  $u_x$  в (3.13), (3.14) и т. п. является марковским случайным процессом, описываемым плотностью вероятностей перехода (2.19) на с. 22

и одноточечной плотностью вероятностей (2.17). Таким образом, нахождение статистических характеристик интенсивности волны просто сводится к вычислению квадратуры. Так, для величины  $\overline{I^n(x, L)}$  получаем выражение

$$\frac{1}{2^n} \overline{I^n(x, L)} = \frac{g_n(u_x)}{(1 + u_L)^n}, \quad (3.15)$$

где  $g_n(u_x)$  — полином по  $u_x$  степени  $n$ , и, следовательно,

$$\frac{1}{2^n} \left\langle \overline{I^n(x, L)} \right\rangle = \int_1^\infty \frac{du_L}{(1 + u_L)^n} \int_1^\infty du_x g_n(u_x) p(u_L, L | u_x, x) P(x, u_x). \quad (3.16)$$

Подставляя в (3.16) выражение (2.19) на с. 22 для  $p(u_L, L | u_x, x)$ , с помощью формулы

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(1 + x)^n} P_{-1/2+i\mu}(x) = \frac{\pi}{\text{ch}(\mu\pi)} K_n(\mu), \quad (3.17)$$

где

$$K_{n+1}(\mu) = \frac{1}{2n} \left[ \mu^2 + \left( n - \frac{1}{2} \right)^2 \right] K_n(\mu), \quad K_1(\mu) = 1,$$

можно выполнить интегрирование по  $u_L$  и перейти к двукратному (по внешнему виду) интегралу

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \left\langle \overline{I^n(x, L)} \right\rangle = & \\ = \pi \int_0^\infty d\mu \mu \frac{\text{sh}(\mu\pi)}{\text{ch}^2(\mu\pi)} K_n(\mu) \exp \left( - \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) (L - x) \right) & \int_1^\infty du g_n(u) P_{-1/2+i\mu}(u) P(x, u). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Здесь введены безразмерные расстояния  $DL \rightarrow L$  и  $Dx \rightarrow x$ . Будем считать также, что  $L_0 = 0$ .

Поскольку

$$I(0, L) = |T_L|^2 = \frac{2}{1 + u_L},$$

интеграл

$$\int_1^\infty \frac{du_L}{(1 + u_L)^n} \int_1^\infty du_x g_k(u_x) p(u_L, L | u_x, x) P(x, u_x)$$

описывает корреляции коэффициента прохождения волны с интенсивностью внутри слоя.

Дальнейшая задача заключается в вычислении внутренних интегралов в (3.18), что сводится к решению простой системы дифференциальных уравнений [36, 110].

В самом деле, рассмотрим выражения

$$f_k(x) = \int_1^\infty du u^k P_{-1/2+i\mu}(u) P(x, u) \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (3.19)$$

являющиеся преобразованием Мелера–Фока для функций  $u^k P(x, u)$ . Дифференцируя равенство (3.19) по  $x$ , используя уравнение Фоккера–Планка (2.9) для функции  $P(x, u)$ , дифференциальное уравнение для функции Лежандра  $P_{-1/2+i\mu}(x)$  на с. 19:

$$\frac{d}{dx} (x^2 - 1) \frac{d}{dx} P_{-1/2+i\mu}(x) = - \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) P_{-1/2+i\mu}(x),$$

и интегрируя по частям, приходим к уравнению

$$\frac{d}{dx} f_k(x) = - \left( \mu^2 + \frac{1}{4} - k^2 - k \right) f_k(x) + 2k\psi_k(x) - k(k-1)f_{k-2}(x), \quad (3.20)$$

где

$$\psi_k(x) = \int_1^\infty du u^{k-1} P(x, u) (u^2 - 1) \frac{d}{du} P_{-1/2+i\mu}(u). \quad (3.21)$$

Дифференцируя теперь функцию  $\psi_k(x)$  по  $x$ , аналогичным образом получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \psi_k(x) = & - \left( \mu^2 + \frac{1}{4} - k^2 + k \right) \psi_k(x) - 2k \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) f_k(x) - \\ & - (k-1)(k-2)\psi_{k-2}(x) + 2(k-1) \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) f_{k-2}(x). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Начальными условиями для (3.20) и (3.22) являются, очевидно, условия

$$f_k(0) = 1, \quad \psi_k(0) = 0.$$

Таким образом, функции  $f_k(x)$  и  $\psi_k(x)$  связаны замкнутой рекуррентной системой неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, которую не представляет труда решить.

Представим решение системы уравнений (3.20), (3.22) в виде

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \tilde{f}_k(x) \exp \left( - \left( \mu^2 + \frac{1}{4} - k^2 \right) x \right), \\ \psi_k(x) &= \tilde{\psi}_k(x) \exp \left( - \left( \mu^2 + \frac{1}{4} - k^2 \right) x \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Тогда для функций  $\tilde{f}_k(x)$  и  $\tilde{\psi}_k(x)$  получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dx} - k \right) \tilde{f}_k(x) &= 2k\tilde{\psi}_k(x) - k(k-1)\tilde{f}_{k-2}(x)e^{-4(k-1)x}, \\ \left( \frac{d}{dx} + k \right) \tilde{\psi}_k(x) &= -2k \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) \tilde{f}_k(x) + \\ &+ (k-1) \left[ 2 \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) \tilde{f}_{k-2}(x) - (k-2)\tilde{\psi}_{k-2}(x) \right] e^{-4(k-1)x} \end{aligned} \quad (3.24)$$

с начальными условиями

$$\tilde{f}_k(0) = 1, \quad \tilde{\psi}_k(0) = 0.$$

Отметим, что соответствующее решение однородной системы имеет вид

$$\tilde{f}_k(x) = A(\mu) \sin(2k\mu x) + B(\mu) \cos(2k\mu x).$$

Рассмотрим простейшие случаи.

1. В случае  $k = 0$  имеем

$$\frac{d}{dx} \tilde{f}_0(x) = 0, \quad \tilde{f}_0(L_0) = 1,$$

и, следовательно,

$$f_0(x) = \exp \left\{ - \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) x \right\}. \quad (3.25)$$

Тогда интеграл

$$\begin{aligned} \langle |T_L|^{2n} \rangle &= \int_1^\infty \frac{du_L}{(1+u_L)^n} \int_1^\infty du p(u_L, L|u, x) P(x, u) = \\ &= 2^n \pi \int_0^\infty d\mu \frac{\mu \operatorname{sh}(\mu\pi)}{\operatorname{ch}^2(\mu\pi)} K_n(\mu) \exp \left( - \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) (L - L_0) \right) \end{aligned}$$

описывает моменты модуля коэффициента прохождения волны через слой флуктуирующей среды.

2. В случае  $k = 1$  имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dx} - 2 \right) \tilde{f}_1(x) &= 2\tilde{\psi}_1(x), \\ \left( \frac{d}{dx} + 1 \right) \tilde{\psi}_1(x) &= -2 \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) \tilde{f}_1(x), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$f_1(x) = \exp \left\{ - \left( \mu^2 - \frac{3}{4} \right) x \right\} \left( \cos(2\mu x) + \frac{1}{2\mu} \sin(2\mu x) \right). \quad (3.26)$$

Интеграл (3.16) при  $n = 1$  описывает распределение средней интенсивности волнового поля внутри слоя неоднородной среды [12]:

$$\langle \overline{I(x, L)} \rangle = 2\pi \int_0^\infty d\mu \frac{\mu \operatorname{sh}(\mu\pi)}{\operatorname{ch}^2(\mu\pi)} \exp \left( x - \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) L \right) \left( \cos(2\mu x) + \frac{1}{2\mu} \sin(2\mu x) \right). \quad (3.27)$$

Это распределение интенсивности приведено на рис. 3.1 для различных толщин слоя.

3. В случае  $k = 2$  имеем систему уравнений:

$$\left( \frac{d}{dx} - 2 \right) \tilde{f}_2(x) = 4\tilde{\psi}_2(x) - 2e^{-4x},$$

$$\left( \frac{d}{dx} + 2 \right) \tilde{\psi}_2(x) = -2 \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) [2\tilde{f}_2(x) - e^{-4x}],$$

и, следовательно,

$$\tilde{f}_2(x) = \frac{\mu^2 + 5/4}{2(1 + \mu^2)} \cos(4\mu\pi) + \frac{\mu^2 + 3/4}{2\mu(1 + \mu^2)} \sin(4\mu\pi) + \frac{\mu^2 + 3/4}{2(1 + \mu^2)} e^{-4x}.$$

В этом случае интеграл (3.18) при  $n = 2$  описывает распределение второго момента интенсивности по толщине слоя:

$$\langle \overline{I^2(x, L)} \rangle = \pi \int_0^\infty d\mu \frac{\mu \operatorname{sh}(\mu\pi)}{\operatorname{ch}^2(\mu\pi)} \exp \left( - \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) L \right) \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) (3e^{4x} \tilde{f}_2(x) - 1),$$

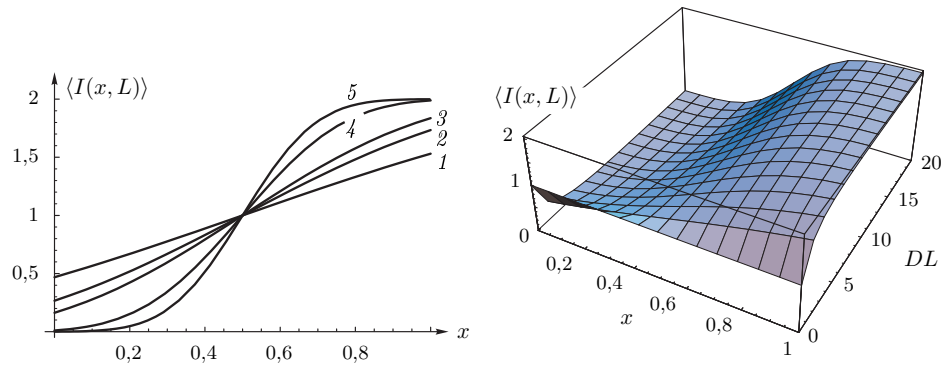


Рис. 3.1. Средняя интенсивность волнового поля в задаче о падении волны на слой среды. Кривая 1 соответствует  $DL = 1$ ; 2 —  $DL = 2$ ; 3 —  $DL = 3$ ; 4 —  $DL = 10$ ; 5 —  $DL = 20$

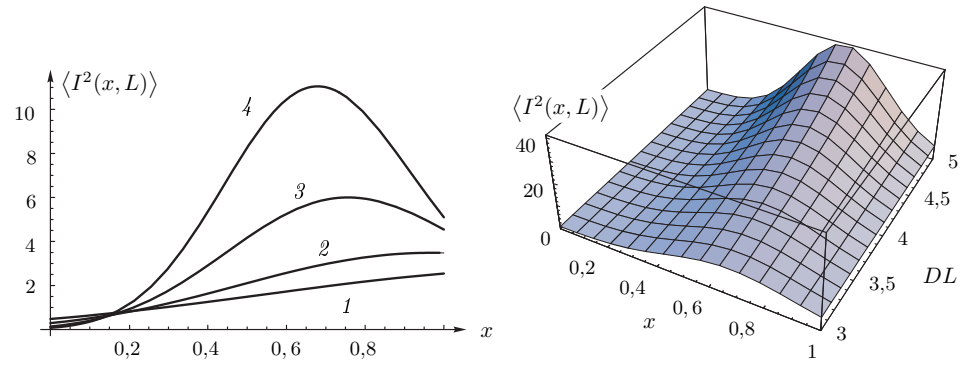


Рис. 3.2. Второй момент интенсивности волнового поля в задаче о падении волны на слой среды. Кривая 1 соответствует  $DL = 0,5$ ; 2 —  $DL = 1$ ; 3 —  $DL = 2$ ; 4 —  $DL = 3$

график поведения которого приведен на рис. 3.2 для различных толщин.

Таким образом, решая последовательно рекуррентную систему уравнений (3.24), можно выразить соответствующий момент интенсивности через единственную квадратуру.

Рассмотрим структуру полученных выражений. Как мы видели выше, моменты интенсивности волнового поля внутри слоя среды описываются интегралами вида

$$\begin{aligned} \langle I^n(x, L) \rangle &\sim \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \frac{\text{sh}(\mu\pi)}{\text{ch}^2(\mu\pi)} \Phi(\mu) \exp\left(n^2x + 2in\mu x - \left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)L\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{4}L + n^2L\xi(1-\xi)\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \frac{\text{sh}(\mu\pi)}{\text{ch}^2(\mu\pi)} \Phi(\mu) \exp\left(-(\mu - in\xi)^2 L\right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

где величина  $\xi = x/L$ , а  $\Phi(\mu)$  — алгебраическая функция параметра  $\mu$ . Если обратиться к асимптотическому случаю  $L \rightarrow \infty$ ,  $\xi$  — фиксированная величина, то из

выражения (3.28) следует, что существуют два масштаба длины:

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) \quad \text{и} \quad \xi_2 = 1 - \frac{1}{2n},$$

такие, что при  $0 \leq \xi \leq \xi_1$  величина  $\langle I^n(x, L) \rangle$  экспоненциально мала. При  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$  величина  $\langle I^n(x, L) \rangle$  экспоненциально велика и достигает максимума вблизи точки  $\xi \approx 1/2$ , где  $\langle I^n(x, L) \rangle_{\max} \sim \exp\{(n^2 - 1)l/4\}$ . При  $1 \geq \xi \geq \xi_2$  величина  $\langle I^n(x, L) \rangle$  экспоненциально быстро стремится к единице. Все вышесказанное относится к случаю  $n \geq 2$ . Исключение составляет случай  $n = 1$ , когда точки  $\xi_1$  и  $\xi_2$  сливаются и распределение средней интенсивности носит монотонный характер.

Первый масштаб определяется равенством  $n^2\xi(1-\xi) \sim 1/4$ , а второй обусловлен тем, что в силу условия  $\langle I^n(x, L) \rangle \rightarrow 2^n$  при  $L \rightarrow \infty$  основной вклад в интеграл (3.28) должен давать полюс  $\mu_n = i(n - 1/2)$ , и контур интегрирования должен располагаться выше значения  $\mu_n$ , т. е.  $\mu_n < in\xi$ . С ростом  $n$  переменная  $\xi_1 \rightarrow 0$ , а  $\xi_2 \rightarrow 1$  (рис. 3.3).

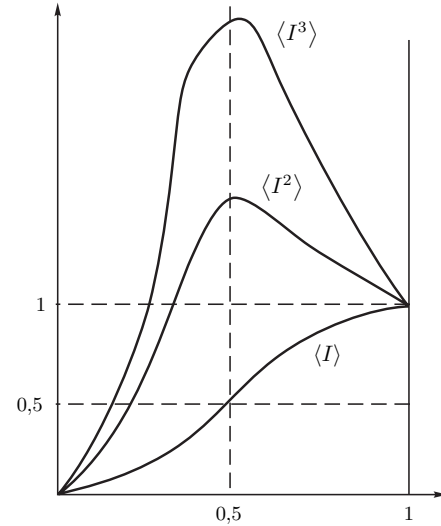


Рис. 3.3. Схематическое поведение моментов интенсивности волнового поля в задаче о падении волны на слой среды (стохастический волновой параметрический резонанс)

Тот факт, что моментные функции интенсивности экспоненциально растут внутри слоя, свидетельствует о наличии явления стохастического волнового параметрического резонанса, аналогичного обычному параметрическому резонансу. Разница заключается лишь в том, что, поскольку в граничных точках моменты интенсивности асимптотически заданы, экспоненциальный рост моментов интенсивности волнового поля происходит внутри слоя и максимальное значение достигается вблизи его середины.

При переходе к полупространству ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ) область экспоненциального роста моментных функций, начиная со второй, занимает все полупространство, а  $\langle I(x, L) \rangle = 2$ .

Вернемся теперь к уравнению для моментов интенсивности встречных волн при отсутствии поглощения волны в среде, т. е. к уравнению (3.10) при  $\beta = 0$  для полупространства ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ) случайно-неоднородной среды. В этом случае с вероятностью единица  $W_L = 1$  и решение уравнения (3.10) имеет структуру

$$Q(x, L, \mu, \lambda, W) = \delta(W - 1)e^{D\lambda(\lambda-1)(L-x)},$$

и, следовательно,

$$\langle W_1^{\lambda-\mu}(x, L)W_2^\mu(x, L) \rangle = e^{D\lambda(\lambda-1)(L-x)}. \quad (3.29)$$

Это означает, в силу произвольности параметров  $\lambda$  и  $\mu$ , что

$$W_1(x, L) = W_2(x, L) = W(x, L)$$

с вероятностью единица, и величина  $W(x, L)$  имеет логнормальную плотность вероятностей. При этом ее среднее значение равно единице, а высшие моменты, начиная со второго, экспоненциально растут вглубь среды:

$$\langle W(x, L) \rangle = 1, \quad \langle W^n(x, L) \rangle = e^{Dn(n-1)(L-x)}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.30)$$

Отметим, что интенсивность волнового поля  $I(x, L)$  в этом случае имеет структуру

$$I(x, L) = 2W(x, L)(1 + \cos \phi_x), \quad (3.31)$$

где  $\phi_L$  — фаза коэффициента отражения.

По свойствам логнормального распределения вероятностей, по формуле (B.62) на с. 185 Приложения В., кривой типичной реализации функции  $W(x, L)$  является экспоненциально спадающая вглубь среды кривая

$$W^*(x, L) = e^{-D(L-x)}, \quad (3.32)$$

и эта функция связана с *ляпуновской экспонентой*.

Кроме того, с вероятностью 1/2 для ее реализаций имеет место неравенство

$$W(x, L) < 4e^{-D(L-x)/2},$$

справедливое для всего полупространства случайно-неоднородной среды.

Экспоненциальное спадание с ростом  $\xi = D(L-x)$  кривой типичной реализации (3.32) и отождествляется обычно в физике неупорядоченных систем со свойством *динамической локализации* (см., например, [49, 67, 82, 97, 139–142]), и величина

$$l_{\text{loc}} = \frac{1}{D}$$

обычно называется *локализационной длиной*. При этом

$$l_{\text{loc}}^{-1} = -\frac{\partial}{\partial L} \langle \varkappa(x, L) \rangle,$$

где

$$\varkappa(x, L) = \ln W(x, L).$$

С физической точки зрения логнормальность интенсивности волнового поля  $W(x, L)$  означает наличие больших выбросов относительно кривой типичной реализации (3.32) как в сторону больших значений интенсивности, так и в сторону малых.

Этот результат согласуется с примером численного моделирования (рис. 1.2 на с. 9). Такие скачки интенсивности, однако, не содержат много энергии, так как, по свойству логнормального распределения вероятностей (см., например, [37, 38, 40]), случайная величина

$$S_n(L) = D \int_{-\infty}^L dx W^n(x, L),$$

описывающая площадь под кривой  $W^n(x, L)$ , имеет «стационарную», не зависящую от  $L$  плотность вероятностей

$$P_n(S) = \frac{1}{n^{2/n}\Gamma(1/n)} \frac{1}{S^{1+1/n}} \exp\left\{-\frac{1}{n^2 S}\right\}, \quad (3.33)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. В частности, площадь под кривой  $W(x, L)$

$$S_1(L) = D \int_{-\infty}^L dx W(x, L)$$

распределена по закону

$$P_1(S) = \frac{1}{S^2} \exp\left\{-\frac{1}{S}\right\},$$

что согласуется с распределением всей энергии волнового поля внутри полупространства (2.34) при  $E = 2S$ . Это означает, что присутствие в выражении (3.31) члена, связанного с быстро осциллирующей фазой коэффициента отражения, не вносит существенного вклада в общую энергию.

Таким образом, знание одноточечной плотности вероятностей позволяет понять эволюцию во всем пространстве интенсивности волнового поля в отдельных реализациях и оценить параметры этой эволюции в терминах статистических характеристик флуктуирующей среды.

### 3.1.2. Диссипативная среда

В присутствии конечного (хоть и сколь угодно малого) поглощения волны в среде, занимающей полупространство, экспоненциальный рост моментных функций должен прекратиться и смениться затуханием. Если параметр  $\beta \gg 1$  (т. е. поглощение велико по сравнению с диффузией), то  $P(W) = 2\beta e^{-2\beta W}$ , и, как легко видеть из уравнения (3.10), интенсивности встречных волн  $W_1(x, L)$  и  $W_2(x, L)$  статистически независимы, т. е. они не коррелируют друг с другом. При этом

$$\langle W_1(\xi) \rangle = \exp\left\{-\beta\xi\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right\}, \quad \langle W_2(\xi) \rangle = \frac{1}{2\beta} \exp\left\{-\beta\xi\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right\}.$$

На рис. 3.4–3.7 представлены в качестве примеров результаты численного решения уравнений (3.10) и квадратуры (3.11) для моментных функций случайных процессов для различных значений параметра  $\beta$  [7, 36, 52, 87, 110]. Кривые с различными номерами соответствуют различным значениям параметра  $\beta$ . Рисунок 3.4 соответствует средним интенсивностям проходящей и отраженной волн. Кривые монотонно убывают с увеличением  $\xi$ . На рис. 3.5 изображены соответствующие зависимости для вторых моментов. При  $\xi = 0$

$$\langle W_1^2(0) \rangle = 1, \quad \langle W_2^2(0) \rangle = \langle |R_L|^4 \rangle.$$

При  $\beta < 1$  зависимость от  $\xi$  становится немонотонной: моменты вначале растут, проходят через максимум и лишь затем начинают монотонно убывать. С уменьшением параметра  $\beta$  положение максимума смещается вправо, а максимальное значение увеличивается. На рис. 3.6 изображена аналогичная зависимость для третьего момента  $\langle W_1^3(\xi) \rangle$ , а на рис. 3.7 построены кривые для величины  $\langle \Delta W_1(\xi) \Delta W_2(\xi) \rangle$ , где  $\Delta W_n(\xi) = W_n(\xi) - \langle W_n(\xi) \rangle$ , описывающей корреляцию между интенсивностями проходящей и отраженной волн. При  $\beta \geq 1$  такая корреляция исчезает. Вследствие сильной корреляции при  $\beta < 1$  ясно, что разделение волн на встречные волны никакого физического смысла не имеет. Это чисто математический прием. При  $\beta \geq 1$  такое разделение оправдано отсутствием корреляции.

Как было показано выше для параметра  $\beta = 0$ , все моменты волнового поля, начиная со второго, для полупространства случайно-неоднородной среды, экспоненциально растут с дистанцией, проходимой волной. Ясно, что для малого параметра  $\beta \ll 1$  решение задачи должно иметь сингулярный характер по  $\beta$ , чтобы обратить решение в нуль при достаточно большом расстоянии, пройденном волной. Рассмотрим этот асимптотический случай более подробно [101].

Введем функцию

$$Q(x, L, \mu, \lambda, u) = \langle W_1^{\mu-\lambda}(x, L) W_2^\lambda(x, L) \delta(u_L - u) \rangle,$$

которая для полупространства описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} Q(\xi, \mu, \lambda, u) = & \left( -\beta\mu + \beta \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) + \mu(\mu + 1) - \frac{2\mu^2}{u+1} \right) Q(\xi, \mu, \lambda, u) + \\ & + \left[ 2\mu(u-1) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} \right] Q(\xi, \mu, \lambda, u) \end{aligned} \quad (3.34)$$

с начальным условием

$$Q(0, \mu, \lambda, u) = \left( \frac{u-1}{u+1} \right)^\lambda P(u),$$

где  $\xi = D(L-x) > 0$ , а  $P(u)$  — стационарная плотность вероятностей (2.28).

Нас интересуют величины

$$\langle W_1^{\mu-\lambda}(\xi) W_2^\lambda(\xi) \rangle = \int_1^\infty du Q(\xi, \mu, \lambda, u).$$

Сделаем в уравнении (3.34) замену переменных  $u \rightarrow \beta(u-1)$  и перейдем к пределу  $\beta \rightarrow 0$ . В результате получаем более простое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \xi} Q(\xi, \mu, \lambda, u) = \left( \mu(\mu + 1) - \frac{2\mu^2\beta}{u} + 2\mu u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} u^2 \frac{\partial}{\partial u} \right) Q(\xi, \mu, \lambda, u), \quad (3.35)$$

$$Q(0, \mu, \lambda, u) = e^{-u}.$$

Решение этого уравнения имеет сингулярную особенность по отношению к переменной  $u$  (и, следовательно, параметру  $\beta$ ) для произвольно малого, но конечного поглощения в среде и может быть получено с помощью интегрального преобразования Конторовича–Лебедева (см., например, [33])

$$F(\tau) = \int_0^\infty dx f(x) K_{i\tau}(x) \quad (\tau > 0), \quad (3.36)$$

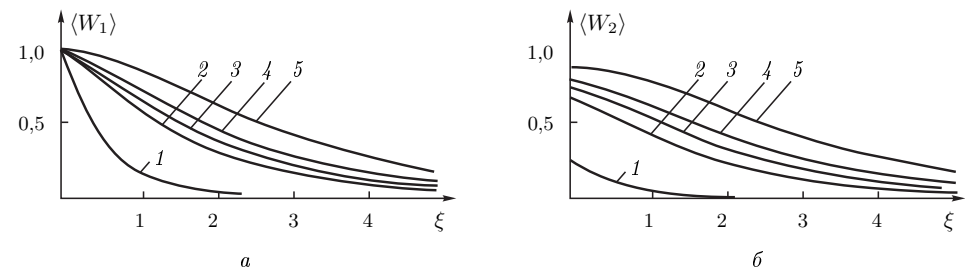


Рис. 3.4. Распределение средней интенсивности волнового поля внутри среды: проходящая волна (а); отраженная волна (б). Кривые соответствуют: 1 —  $\beta = 1$ ; 2 —  $\beta = 0,1$ ; 3 —  $\beta = 0,06$ ; 4 —  $\beta = 0,04$ ; 5 —  $\beta = 0,02$

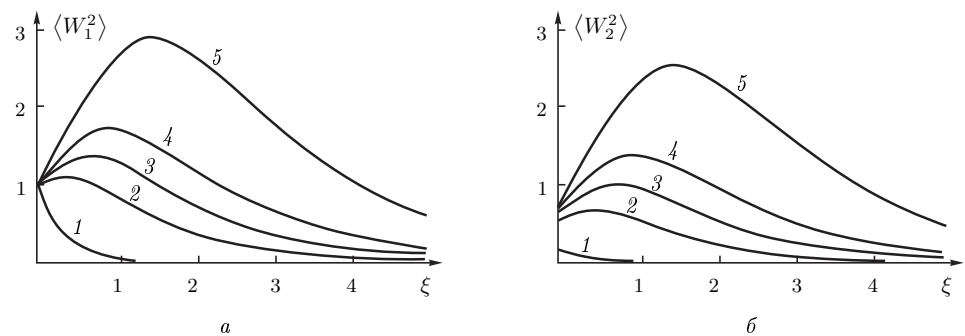


Рис. 3.5. Распределение второго момента интенсивности волнового поля внутри среды: проходящая волна (а); отраженная волна (б). Кривые соответствуют: 1 —  $\beta = 1$ ; 2 —  $\beta = 0,1$ ; 3 —  $\beta = 0,06$ ; 4 —  $\beta = 0,04$ ; 5 —  $\beta = 0,02$

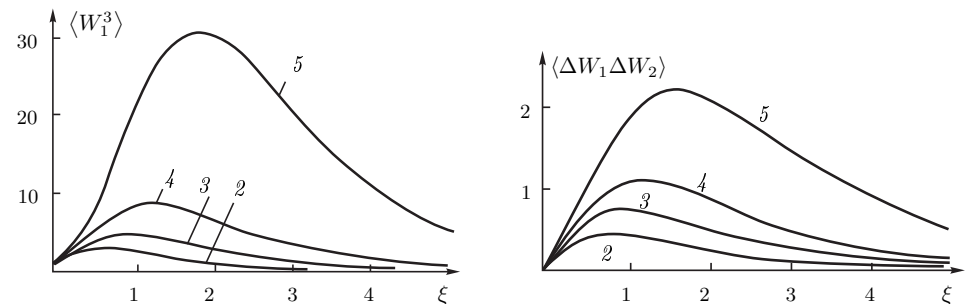


Рис. 3.6. Распределение третьего момента интенсивности проходящей волны. Кривые соответствуют: 1 —  $\beta = 1$ ; 2 —  $\beta = 0,1$ ; 3 —  $\beta = 0,06$ ; 4 —  $\beta = 0,04$ ; 5 —  $\beta = 0,02$

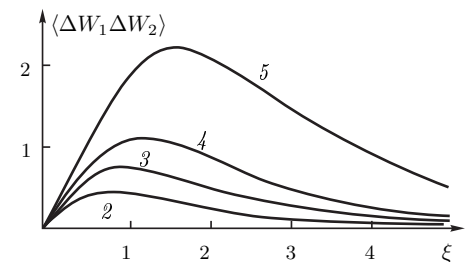


Рис. 3.7. Корреляция интенсивностей проходящей и отраженной волн. Кривые соответствуют: 1 —  $\beta = 1$ ; 2 —  $\beta = 0,1$ ; 3 —  $\beta = 0,06$ ; 4 —  $\beta = 0,04$ ; 5 —  $\beta = 0,02$



где  $K_{i\tau}(x)$  — функция Макдональда первого рода, удовлетворяющая уравнениям

$$\begin{aligned} \left(x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} - x^2 + \tau^2\right) K_{i\tau}(x) &= 0, \\ \left(\frac{d}{dx} x^2 \frac{d}{dx} - x \frac{d}{dx}\right) K_{i\tau}(x) &= (x^2 - \tau^2) K_{i\tau}(x). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Формула обращения при этом имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2 x} \int_0^\infty d\tau \operatorname{sh}(\pi\tau) F(\tau) K_{i\tau}(x). \quad (3.38)$$

В результате для целочисленных значений параметров  $\mu = n$ ,  $\lambda = m$  получаем асимптотическое представление в виде квадратуры:

$$\begin{aligned} \langle W_1^{n-m}(\xi) W_2^m(\xi) \rangle &= \frac{4}{\pi (\varepsilon n)^{2n-1}} \int_0^\infty d\tau \tau \operatorname{sh}\left(\frac{\pi\tau}{2}\right) \exp\left(-\frac{\xi(1+\tau^2)}{4}\right) g_n(\tau) \psi_0(\tau), \\ \psi_0(\tau) &= \int_0^\infty \frac{dy}{y^{2(n+1)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{(1+2\beta y^2)^m} K_{i\tau}(\varepsilon n y), \end{aligned} \quad (3.39)$$

где параметр  $\varepsilon = \sqrt{8\beta}$ ,

$$g_n(\tau) = \left[(2n-3)^2 + \tau^2\right] g_{n-1}(\tau), \quad g_1(\tau) = 1.$$

Из (3.39) видно, что для значений параметра  $\beta \ll 1$  интенсивности встречных волн равны с вероятностью единица и для малых расстояний от границы решение задачи совпадает с решением, соответствующим стохастическому параметрическому резонансу.

Для достаточно больших расстояний  $\xi$ , а именно

$$\xi \gg 4 \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(\frac{n}{\beta}\right),$$

величины  $\langle W^n(\xi) \rangle$  имеют универсальную пространственную локализационную структуру [101]

$$\langle W^n(\xi) \rangle \cong A_n \frac{1}{\beta^{n-1/2}} \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) \frac{1}{\xi \sqrt{\xi}} e^{-\xi/4},$$

которая совпадает с асимптотическим поведением моментов коэффициента прохождения волны через слой толщины  $\xi$  при  $\beta = 0$  (отличие лишь в численном коэффициенте).

Таким образом, поведение моментов интенсивности встречных волн существенно различается в трех областях. В первой области, соответствующей стохастическому параметрическому резонансу, моменты экспоненциально нарастают вглубь среды и роль поглощения волны в среде несущественна. Во второй области роль поглощения волны наиболее важна, потому что оно останавливает экспоненциальный рост моментов. И, наконец, в третьей области убывание моментных функций интенсивности встречных волн не зависит от поглощения. Границы этих областей определяются параметром  $\beta$  и стремятся к бесконечности при  $\beta \rightarrow 0$ .

Отметим, что в общем случае произвольного параметра  $\beta$  для среднего значения логарифма интенсивности прямой волны и ее дисперсии из уравнений (3.3) следуют равенства [36]

$$\langle \varkappa_1(x, L) \rangle = -(1 + \beta) \xi, \quad \sigma_{\varkappa_1}^2(x, L) = 2 \langle |R_L|^2 \rangle \xi, \quad (3.40)$$

где величина  $\langle |R_L|^2 \rangle$  описывается формулой (2.29) на с. 25.

### 3.2. Источник плоских волн внутри случайно-неоднородной среды

Выше мы подробно рассмотрели задачу о падении волны на слой (полупространство) случайно-неоднородной среды. Аналогичным образом можно рассмотреть и задачу об источнике плоских волн в случайной среде. Пусть слой среды занимает, как и ранее, часть пространства. Тогда волновое поле внутри слоя описывается решением краевой задачи (1.20) на с. 13. При рассмотрении зависимости ее решения от параметра  $L$  можно получить уравнения погружения (см. приложение А, с. 107)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} G(x, x_0, L) &= i \frac{k}{2} \varepsilon(L) u(x_0, L) u(x, L), \\ G(x, x_0, L)_{L=\max(x, x_0)} &= \begin{cases} u(x, x_0), & x \geq x_0, \\ u(x_0, x), & x \leq x_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x, L) = ik \{1 + \varepsilon(L) u(L, L)\} u(x, L), \quad u(x, x) = 1 + R_x,$$

$$\frac{d}{dL} u(L, L) = 2ik [u(L, L) - 1] + i \frac{k}{2} \varepsilon(L) u^2(L, L), \quad R_{L_0} = 0.$$

При этом два последних уравнения в (3.41) описывают волновое поле  $u(x, L)$  в задаче о падении волны на слой среды  $(L_0, L)$  и поле на границе слоя  $x = L - u(L, L) = 1 + R_L$ , где  $R_L$  — коэффициент отражения.

Введем интенсивность волнового поля  $I(x, x_0, L) = |G(x, x_0, L)|^2$  и рассмотрим ее среднее значение. Используя уравнение (3.41), а также комплексно сопряженное к нему, усредняя по ансамблю реализаций случайной функции  $\varepsilon_1(x)$  и быстрым осцилляциям, для средней интенсивности получаем уравнение погружения

$$\frac{\partial}{\partial L} \langle I(x, x_0, L) \rangle = D \langle I(x_0, L) I(x, L) \rangle, \quad (3.42)$$

где  $I(x, L) = |u(x, L)|^2$  — интенсивность волнового поля в задаче о падении волны на слой среды. Следовательно (для определенности считаем, что  $x_0 > x$ ),

$$\langle I(x, x_0, L) \rangle = \langle I(x, x_0) \rangle + D \int_{x_0}^L d\xi \langle I(x_0, \xi) I(x, \xi) \rangle, \quad (3.43)$$

и эта величина определяется корреляционной функцией интенсивности волнового поля в задаче о падении волны на слой среды.

Введем функции

$$\begin{aligned} \psi(x, x_0, L, W) &= \langle I(x_0, L) I(x, L) \delta(|R_L|^2 - W) \rangle, \\ \chi(x, L, W) &= \langle I(x, L) \delta(|R_L|^2 - W) \rangle. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Очевидно, что они описываются уравнениями (3.8) со значениями параметра  $\mu = 2$  (для функции  $\psi$ ) при  $x \neq x_0$  и  $\mu = 1$  (для функции  $\chi$ ), т. е. уравнениями с начальными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \psi(x, x_0, L, W) &= -2k\gamma \left(1 - \frac{\partial}{\partial W} W\right) \psi(x, x_0, L, W) - \\ &- D \left[2 + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W)\right] \psi(x, x_0, L, W) + D \left[2 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W)\right]^2 W \psi(x, x_0, L, W), \\ \psi(x, x_0, x_0, W) &= (1 + W) \chi(x, L, W), \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \chi(x, L, W) &= -k\gamma \left(1 - 2 \frac{\partial}{\partial W} W\right) \chi(x, L, W) - \\ &- D \left[1 + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W)\right] \chi(x, L, W) + D \left[1 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W)\right]^2 W \chi(x, L, W), \\ \chi(x, x, W) &= (1 + W) P(x, W). \end{aligned} \quad (3.46)$$

При  $x = x_0$  функция  $\psi(x, x, L, W)$  также описывается уравнением (3.45), но с другим начальным условием, а именно

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \psi(x, x, L, W) &= -2k\gamma \left(1 - \frac{\partial}{\partial W} W\right) \psi(x, x, L, W) - \\ &- D \left[2 + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W)\right] \psi(x, x, L, W) + D \left[2 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W)\right]^2 W \psi(x, x, L, W), \\ \psi(x, x, x, W) &= (1 + 4W + W^2) P(x, W). \end{aligned} \quad (3.47)$$

В уравнениях (3.46), (3.47) функция  $P(L, W) = \langle \delta(|R_L|^2 - W) \rangle$  — плотность вероятностей квадрата модуля коэффициента отражения, которая описывается уравнением (2.6) на с. 18.

### 3.2.1. Неограниченное пространство случайно-неоднородной среды

Для нахождения средней интенсивности волнового поля, создаваемого источником в неограниченном пространстве, перейдем к пределу  $L_0 \rightarrow -\infty$ . Обозначим величину  $D(L - x_0) = \eta$ , а величину  $D(x_0 - x) = \xi$  будем считать фиксированной. В результате выражение (3.43) переходит в равенство

$$\langle I(x, x_0, L) \rangle = \langle I(\xi) \rangle + S(\xi),$$

где

$$\langle I(\xi) \rangle = \int_0^1 dW \chi(\xi, W), \quad S(\xi) = \int_0^1 dW \int_0^\infty d\eta \psi(\xi, \eta, W),$$

а функции  $\psi(\xi, \eta, W)$ ,  $\chi(\xi, W)$  описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \psi(\xi, \eta, W) &= -2\beta \left(1 - \frac{\partial}{\partial W} W\right) \psi(\xi, \eta, W) - \\ &- \left[2 + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W)\right] \psi(\xi, \eta, W) + \left[2 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W)\right]^2 W \psi(\xi, \eta, W), \end{aligned}$$

$$\psi(\xi, 0, W) = \begin{cases} (1 + W) \chi(\xi, W), & (\xi \neq 0), \\ (1 + 4W + W^2) P(W), & (\xi = 0), \end{cases} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \chi(\xi, W) &= -\beta \left(1 - 2 \frac{\partial}{\partial W} W\right) \chi(\xi, W) - \\ &- \left[1 + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W)\right] \chi(\xi, W) + \left[1 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W)\right]^2 W \chi(\xi, W), \\ \chi(0, W) &= (1 + W) P(W). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Уравнение (3.48) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \psi(\xi, \eta, W) = \left\{ 2\beta W + 2W(1 - W) + \frac{\partial}{\partial W} W(1 - W)^2 \right\} \frac{\partial}{\partial W} \psi(\xi, \eta, W). \quad (3.50)$$

Интегрируя уравнение (3.50) по  $\eta$  в пределах  $(0, \infty)$ , получаем для функции

$$\tilde{\psi}(\xi, W) = \int_0^\infty d\eta \psi(\xi, \eta, W)$$

простое уравнение вида

$$-\psi(\xi, 0, W) = \left\{ 2\beta W + 2W(1 - W) + \frac{\partial}{\partial W} W(1 - W)^2 \right\} \frac{\partial}{\partial W} \tilde{\psi}(\xi, W),$$

решение которого имеет вид

$$\tilde{\psi}(\xi, W) = \int_W^1 \frac{dW_1}{W_1} \int_0^{W_1} \frac{dW_2}{(1 - W_2)^2} \psi(\xi, 0, W) \exp \left\{ 2\beta \left[ \frac{1}{1 - W_1} - \frac{1}{1 - W_2} \right] \right\}. \quad (3.51)$$

Интегрируя далее (3.51) по  $W$ , для функции  $S(\xi)$  получаем окончательное выражение

$$S(\xi) = \int_0^1 \frac{dW}{(1 - W)^2} \psi(\xi, 0, W) \left[ 1 - W + 2\beta \exp \left( \frac{2\beta}{1 - W} \right) \text{Ei} \left( -\frac{2\beta}{1 - W} \right) \right], \quad (3.52)$$

где  $\text{Ei}(-x) = -\int_x^\infty \frac{dt}{t} e^{-t}$  — интегральная показательная функция.

Таким образом, средняя интенсивность волнового поля от источника в неограниченном пространстве описывается решением единственного уравнения (3.49) и имеет вид ( $x < x_0$ )

$$\langle I(\xi) \rangle = \int_0^1 dW \left\{ 1 + \frac{1 + W}{(1 - W)^2} \left[ 1 - W + 2\beta \exp \left( \frac{2\beta}{1 - W} \right) \text{Ei} \left( -\frac{2\beta}{1 - W} \right) \right] \right\} \chi(\xi, W). \quad (3.53)$$

На рис. 3.8 приведены результаты численного интегрирования равенства (3.53) для различных значений параметра  $\beta$ .

В случае  $\beta \gg 1$  из (3.53) и (3.49) находим выражение

$$\langle I(\xi) \rangle = \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) \exp \left( -2\gamma(x_0 - x) \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) \right), \quad (3.54)$$

соответствующее линейной феноменологической теории переноса излучения.

Асимптотический случай  $\beta \ll 1$  будет подробно рассмотрен немного позднее.

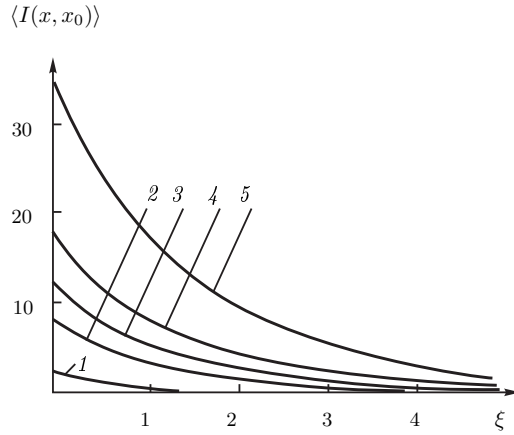


Рис. 3.8. Распределение средней интенсивности поля источника в неограниченном пространстве. Кривые соответствуют: 1 —  $\beta = 1$ ; 2 —  $\beta = 0,1$ ; 3 —  $\beta = 0,06$ ; 4 —  $\beta = 0,04$ ; 5 —  $\beta = 0,02$

### 3.2.2. Полупространство случайно-неоднородной среды

Если же источник плоских волн находится в области  $L_0 < x_0 < \infty$ , то средняя интенсивность  $\langle I(x, x_0) \rangle$  будет по-прежнему описываться формулой (3.43) при  $L \rightarrow \infty$  ( $x_0 \leq x$ ). В случае  $x_0 \geq x$  надо поменять местами точки  $x_0$  и  $x$  в формуле (3.43).

Введем безразмерные переменные  $\tilde{x} = Dx$ ,  $\tilde{x}_0 = Dx_0$ ,  $h = DL$ . Повторяя дословно выкладки предыдущего пункта, получаем, что средняя интенсивность  $\langle I(x, x_0) \rangle$  будет описываться выражением (знак тильды опускаем)

$$\langle I(x, x_0) \rangle = \int_0^1 dW \left\{ 1 + \frac{1+W}{(1-W)^2} \left[ 1 - W + 2\beta \exp\left(\frac{2\beta}{1-W}\right) \text{Ei}\left(-\frac{2\beta}{1-W}\right) \right] \right\} \chi(x, x_0, W), \quad (3.55)$$

где функция  $\chi(x, h, W)$ , как функция переменных  $h$  и  $W$ , удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial h} \chi(x, h, W) = -\beta \left( 1 - 2 \frac{\partial}{\partial W} W \right) \chi(x, h, W) - (1-W) \frac{\partial}{\partial W} \left\{ 1 - (1-W) \frac{\partial}{\partial W} W \right\} \chi(x, h, W) \quad (3.56)$$

с начальным условием

$$\chi(x, x, W) = (1+W)P(x, W).$$

Функция  $P(h, W)$  является плотностью вероятностей для величины  $|R_h|^2$  и описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial h} P(h, W) = -2\beta \frac{\partial}{\partial W} W P(h, W) - \frac{\partial}{\partial W} (1-W) \left\{ 1 - \frac{\partial}{\partial W} (1-W) W \right\} P(h, W),$$

$$P(h_0, W) = \delta(W - |R_0|^2). \quad (3.57)$$

Введем новые переменные:  $\xi = x_0 - x$ ,  $\eta = x - h_0$ . Тогда функция  $\chi(x, h, W) = \chi(\xi, \eta, W)$  и описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \chi(\xi, \eta, W) = -\beta \left( 1 - 2 \frac{\partial}{\partial W} W \right) \chi(\xi, \eta, W) - (1-W) \frac{\partial}{\partial W} \left\{ 1 - (1-W) \frac{\partial}{\partial W} W \right\} \chi(\xi, \eta, W), \quad (3.58)$$

$$\chi(0, \eta, W) = (1+W)P(\eta, W),$$

где функция  $P(\eta, W)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \eta} P(\eta, W) = -2\beta \frac{\partial}{\partial W} W P(\eta, W) - \frac{\partial}{\partial W} (1-W) \left\{ 1 - \frac{\partial}{\partial W} (1-W) W \right\} P(\eta, W) \quad (3.59)$$

с начальным условием

$$P(0, W) = \delta(W - |R_0|^2).$$

Таким образом, в случае  $x_0 > x$  для нахождения средней интенсивности волнового поля в среде требуется последовательно решить уравнения (3.58), (3.59) и вычислить квадратуру (3.55). В случае же  $x_0 > x$  уравнения (3.58), (3.59) остаются в силе, но под  $\xi$  и  $\eta$  теперь следует понимать  $\xi = x - x_0$ ,  $\eta = x_0 - h$ .

Случай источника в неограниченном пространстве соответствует предельному переходу  $\eta \rightarrow \infty$  в (3.59). В этом случае уравнение (3.59) имеет стационарное решение и задача сводится к решению уравнения (3.58) с начальным условием  $\chi(0, \eta, W) = (1+W)P(W)$ . Этот случай анализировался в предыдущем пункте.

Величина  $|R_0|^2$ , фигурирующая в (3.59), определяется параметрами среды в области  $x < L_0$ . В случае  $R_0 = 0$  это соответствует свободному выходу волны за границу раздела. Предельному случаю отражающих границ соответствует значение  $|R_0|^2 = 1$ , и развитая теория не различает случаи  $R_0 = \pm 1$ . Это связано с использованием метода усреднения по быстрым осцилляциям. Аналогичная ситуация имеет место и в линейной феноменологической теории переноса излучения, которая соответствует асимптотическому случаю  $\beta \gg 1$ .

Уравнения (3.58), (3.59) интегрировались численно в работе [52] (см. также [36, 110]). Расчеты выполнялись для двух значений параметров  $\beta$  ( $\beta = 1$  и  $\beta = 0,08$ ). Первый случай ( $\beta = 1$ ) должен дать результат, близкий к результату линейной феноменологической теории переноса излучения, а случай  $\beta = 0,08$  соответствует большей «стохастичности» задачи. На рис. 3.9,а приведены кривые расчета средней интенсивности волны в полупространстве для  $\beta = 1$  при различных положениях границы, отмеченных штриховыми линиями, и разных краевых условий. При наличии «пропускающей» границы ( $R_0 = 0$ ) соответствующие кривые лежат ниже, чем для источника в неограниченном пространстве. В случае же отражающей границы ( $|R_0|^2 = 1$ ) кривые лежат выше. На рис. 3.9,б приведены аналогичные кривые для случая  $\beta = 0,08$ . Тенденция поведения кривых остается прежней, однако этот случай характеризуется более интенсивными изменениями.

### 3.2.3. Асимптотический случай малого поглощения

Рассмотрим теперь асимптотическое решение задачи об источнике плоских волн в неограниченном пространстве ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ,  $L \rightarrow \infty$ ) при условии  $\beta \rightarrow 0$ . Для вычисления средней интенсивности волнового поля в области  $x < x_0$  в этом случае удобно

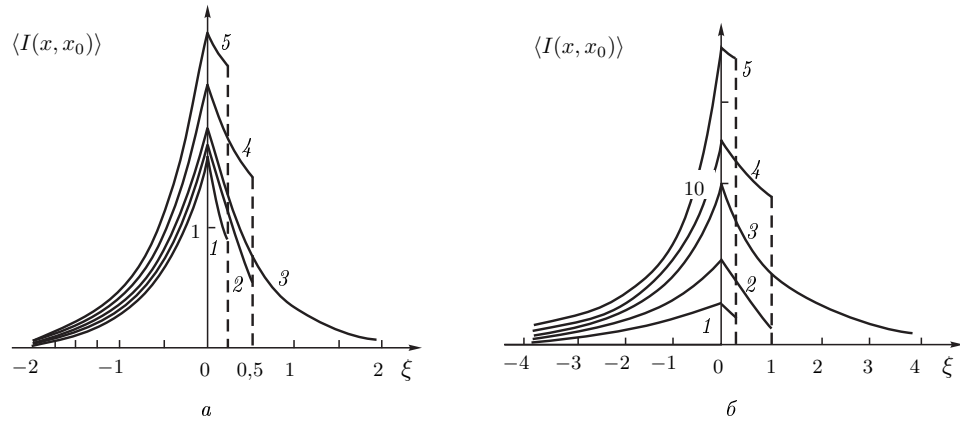


Рис. 3.9. Распределение средней интенсивности поля источника при наличии границы:  $\beta = 1$  (а);  $\beta = 0,08$  (б): 1, 2 — пропускающая граница; 4, 5 — отражающая граница; 3 — случай неограниченного пространства

воспользоваться соотношениями (1.27) и (1.28) на с. 15:

$$\beta \langle I(x, x_0) \rangle = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial x} \langle S(x, x_0) \rangle = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial x} \langle \psi(x, x_0) \rangle, \quad (3.60)$$

где функция  $\psi(x, x_0)$

$$\psi(x, x_0) = \exp \left\{ -\beta D \int_x^{x_0} d\xi \frac{|1 + R_\xi|^2}{1 - |R_\xi|^2} \right\},$$

и, следовательно, как функция параметра  $x_0$ , описывается стохастическим уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \psi(x, x_0) = -\beta D \frac{|1 + R_{x_0}|^2}{1 - |R_{x_0}|^2} \psi(x, x_0), \quad \psi(x, x) = 1. \quad (3.61)$$

Введем функцию

$$\varphi(x, x_0, u) = \psi(x, x_0) \delta(u_{x_0} - u), \quad (3.62)$$

где величина  $u_L = (1 + W_L)/(1 - W_L)$  описывается стохастической системой уравнений (2.7). Дифференцируя (3.62) по  $x_0$ , получаем стохастическое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} \varphi(x, x_0, u) = & -\beta D \left\{ u + \sqrt{u^2 - 1} \cos \phi_{x_0} \right\} \varphi(x, x_0, u) + \\ & + \beta D \frac{\partial}{\partial u} \left\{ (u^2 - 1) \varphi(x, x_0, u) \right\} - k \varepsilon_1(x_0) \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \sqrt{u^2 - 1} \sin \phi_{x_0} \varphi(x, x_0, u) \right\}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Усредним теперь уравнение (3.63) по ансамблю реализаций случайного процесса  $\varepsilon_1(x_0)$ , который, как и ранее, считаем гауссовым дельта-коррелированным процессом по  $x_0$ . Используя далее формулу Фурутцу–Новикова (2.4) на с. 17, выражения для вариационных производных

$$\begin{aligned} \frac{\delta \varphi(x, x_0, u)}{\delta \varepsilon_1(x_0)} = & -k \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \sqrt{u^2 - 1} \sin \phi_{x_0} \varphi(x, x_0, u) \right\}, \\ \frac{\delta \phi_{x_0}}{\delta \varepsilon_1(x_0)} = & k \left[ 1 + \frac{u_{x_0}}{\sqrt{u_{x_0}^2 - 1}} \right] \cos \phi_{x_0} \end{aligned}$$

и дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям (фазе коэффициента отражения), получаем для функции

$$\Phi(\xi, u) = \langle \varphi(x, x_0, u) \rangle = \langle \psi(x, x_0) \delta(u_{x_0} - u) \rangle,$$

где  $\xi = D|x - x_0|$ , уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Phi(\xi, u) = -\beta u \Phi(\xi, u) + \beta \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \Phi(\xi, u) + \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} \Phi(\xi, u), \quad (3.64)$$

$$\Phi(0, u) = P(u) = \beta e^{-\beta(u-1)}.$$

Среднее значение интенсивности теперь может быть представлено в виде

$$\beta \langle I(x, x_0) \rangle = -\frac{\partial}{\partial \xi} \int_1^\infty du \Phi(\xi, u) = \beta \int_1^\infty du u \Phi(\xi, u). \quad (3.65)$$

В уравнении (3.64) возможно совершить предельный переход  $\beta \rightarrow 0$ . В результате получаем более простое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\Phi}(\xi, u) = -u \tilde{\Phi}(\xi, u) + \frac{\partial}{\partial u} u^2 \tilde{\Phi}(\xi, u) + \frac{\partial}{\partial u} u^2 \frac{\partial}{\partial u} \tilde{\Phi}(\xi, u), \quad \tilde{\Phi}(0, u) = e^{-u}. \quad (3.66)$$

Следовательно, локализационное распределение в пространстве средней интенсивности описывается квадратурой

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) = \int_1^\infty du u \tilde{\Phi}(\xi, u), \quad (3.67)$$

где

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \langle I(x, x_0) \rangle = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\langle I(x, x_0) \rangle}{\langle I(x_0, x_0) \rangle}. \quad (3.68)$$

Таким образом, средняя интенсивность волнового поля точечного источника при  $\beta \ll 1$  имеет асимптотическое поведение

$$\langle I(x, x_0) \rangle = \frac{1}{\beta} \Phi_{\text{loc}}(\xi). \quad (3.69)$$

Решение уравнения (3.66) может быть легко получено с помощью интегрального преобразования Конторовича–Лебедева (3.36) на с. 46, и в результате для локализационной кривой получаем выражение [111]

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) = 2\pi \int_0^\infty d\tau \tau \left( \tau^2 + \frac{1}{4} \right) \frac{\text{sh}(\pi\tau)}{\text{ch}^2(\pi\tau)} \exp \left( - \left( \tau^2 + \frac{1}{4} \right) \xi \right). \quad (3.70)$$

Отметим, что выражение (3.70) имеет структуру

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) = -\frac{\partial}{\partial \xi} |T_\xi|^2,$$

где  $|T_\xi|^2$  — квадрат модуля коэффициента прохождения для волны, падающей на слой среды толщины  $\xi$  (см. формулу (2.18 на с. 21)).

Для малых значений расстояний  $\xi$  локализационная кривая убывает довольно быстро по закону

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) \approx e^{-2\xi}. \quad (3.71)$$

Для больших значений  $\xi$  (а именно,  $\xi \gg \pi^2$ ) она убывает существенно медленнее по универсальному закону

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) \approx \frac{\pi^2 \sqrt{\pi}}{8} \frac{e^{\xi/4}}{\xi \sqrt{\xi}}, \quad (3.72)$$

и при этом общее значение интеграла

$$\int_0^{\infty} d\xi \Phi_{\text{loc}}(\xi) = 1.$$

График функции (3.70) представлен на рис. 3.10, где для сравнения также приведены асимптотические кривые (3.71) и (3.72).

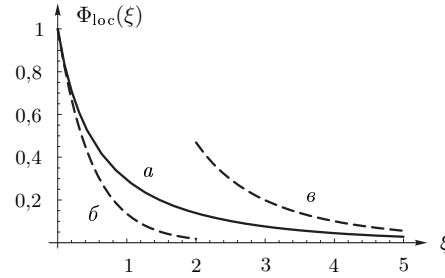


Рис. 3.10. График локализационной кривой для источника в неограниченном пространстве (3.70) (а). Пунктирные кривые соответствуют асимптотикам на малых (б) и больших (в) расстояниях от источника

Локализационная кривая (3.70) соответствует двойному предельному переходу

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{L_0 \rightarrow -\infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle I(x, x_0) \rangle}{\langle I(x_0, x_0) \rangle},$$

и легко видеть, что эти предельные переходы непрерывны.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае источника плоских волн, расположенного на отражающей границе. В этом случае получаем выражение

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\langle I_{\text{ref}}(x, L) \rangle}{\langle I_{\text{ref}}(L, L) \rangle} = \frac{1}{2} \Phi_{\text{loc}}(\xi), \quad \xi = D(L - x). \quad (3.73)$$

Этот результат справедлив в области  $\xi > 1/3$ , так как он соответствует пренебрежению корреляцией  $|\langle R_x R_L^* \rangle| = e^{-3\xi}$ , в отличие от случая источника в неограниченном пространстве (см. замечание 2.1. на с. 27).

### 3.3. Особенности статистического описания акустического поля в случайном слоистом океане

Выше мы подробно рассмотрели вопрос о статистическом описании характеристик плоских волн, распространяющихся в слоистой случайно-неоднородной среде, на основе краевой задачи для одномерного уравнения Гельмгольца. Исходная краевая задача

с помощью метода погружения переформулировалась в задачу с начальными условиями по параметру погружения, что и позволило провести достаточно полный анализ статистических характеристик ее решения. Однако, как показано в приложении А, уравнения, полученные методом погружения, могут быть совершенно различными, в зависимости от того, какая решается краевая задача. Остановимся на этом вопросе более подробно на примере генерации акустических волн в слоистом океане, следуя работам [24, 36].

Задача о распространении акустических волн, возбуждаемых источниками силы и массы, является частным случаем задачи, рассмотренной в приложении А в п. А.1.1 на с. 122. Считаем, что ось  $z$  направлена вертикально вверх. В этом случае спектральные составляющие поля акустического давления  $p(\omega, \mathbf{q}, z)$  и вертикального смещения жидкой частицы  $\xi(\omega, \mathbf{q}, z)$  описываются краевой задачей, вытекающей из системы (А.90) на с. 125 при отсутствии гравитационных сил, среднего потока и атмосферного давления ( $\mathbf{g} = 0$ ,  $p_a(\omega, \mathbf{q}) = 0$ ,  $\mathbf{U} = 0$ ), а именно (зависимости от спектральных параметров  $\omega$ ,  $\mathbf{q}$  не указываем):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \xi(z) + K(z)P(z) &= \frac{1}{\omega \rho_0(z)} \left( Q(z) + \frac{\mathbf{q}}{\omega} \mathbf{F}_{\perp}(z) \right), \\ \frac{d}{dz} P(z) - \rho_0(z) \omega^2 \xi(z) &= F_z(z), \\ \xi(H_0) = 0, \quad P(H) &= 0, \end{aligned} \quad (3.74)$$

где функция  $K(z) = K(\omega, \mathbf{q}, z) = \frac{1}{\omega^2 \rho_0(z)} \left[ \frac{k^2 c_0^2}{c^2(z)} - \mathbf{q}^2 \right]$ , параметр  $k = \omega/c_0$ ,  $c_0$  — характерное значение скорости распространения акустической волны. Из общей постановки задачи видно, что действие источника массы и горизонтальной составляющей силы  $\mathbf{F}_{\perp}(z)$  коренным образом отличается от действия вертикальной составляющей возбуждающей силы  $F_z(z)$ . Ввиду этого целесообразно разделять эти задачи и рассматривать их по отдельности.

Первая задача описывается уравнением для звукового давления:

$$\rho_0(z) \frac{d}{dz} \frac{1}{\rho_0(z)} \frac{d}{dz} P(z) + \left[ \frac{k^2 c_0^2}{c^2(z)} - \mathbf{q}^2 \right] P(z) = \omega \left( Q(z) + \frac{\mathbf{q}}{\omega} \mathbf{F}_{\perp}(z) \right),$$

которое в случае постоянства плотности среды эквивалентно уравнению для функции Грина уравнения Гельмгольца (поле точечного источника):

$$\frac{d^2}{dz^2} P(z, z_0) + \left[ \frac{k^2 c_0^2}{c^2(z)} - \mathbf{q}^2 \right] P(z, z_0) = \delta(z - z_0).$$

Именно эта задача подробно рассматривалась ранее.

Вторая задача описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \frac{1}{\rho_0(z)} \frac{d}{dz} P(z) + \frac{1}{\rho_0(z)} \left[ \frac{k^2 c_0^2}{c^2(z)} - \mathbf{q}^2 \right] P(z) &= \frac{d}{dz} F_z(z), \\ \frac{d}{dz} P(z) \Big|_{z=H_0} &= 0, \quad P(H) = 0. \end{aligned}$$

Ее решение эквивалентно решению задачи

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\rho_0(z)} \frac{d}{dz} P(z, z_0) + \frac{1}{\rho_0(z)} \left[ \frac{k^2 c_0^2}{c^2(z)} - \mathbf{q}^2 \right] P(z, z_0) = -\frac{d}{dz} \delta(z - z_0),$$

$$\left. \frac{d}{dz} P(z, z_0) \right|_{z=H_0} = 0, \quad P(H, z_0) = 0.$$

Введем вспомогательную систему уравнений для функций  $\Phi(z, z_0)$  и  $\Psi(z, z_0) \equiv P(z, z_0)$ , описывающих поле точечного источника:

$$\frac{d}{dz} \Phi(z, z_0) + K(z) \Psi(z, z_0) = 0,$$

$$\frac{d}{dz} \Psi(z, z_0) - \rho_0(z) \omega^2 \Phi(z, z_0) = -\delta(z - z_0), \quad (3.75)$$

$$\Phi(H_0, z_0) = 0, \quad \Psi(H, z_0) = 0.$$

Положим теперь в системе уравнений (3.75)  $z_0 = H$ , т.е. рассмотрим действие источника, находящегося на свободной поверхности. Тогда система уравнений (3.75) примет вид

$$\frac{d}{dz} \Phi(z, H) + K(z) \Psi(z, H) = 0,$$

$$\frac{d}{dz} \Psi(z, H) - \rho_0(z) \omega^2 \Phi(z, H) = 0, \quad (3.76)$$

$$\Phi(H_0, H) = 0, \quad \Psi(z, H)|_{z \rightarrow H} = 1.$$

Последнее краевое условие вытекает из условия скачка функции  $\Psi(z, z_0)$  при переходе через точку  $z_0$ :

$$\Psi(z_0 + 0, z_0) - \Psi(z_0 - 0, z_0) = -1.$$

Отметим, что эта же система уравнений описывает возбуждение акустических волн флуктуациями атмосферного давления (см. приложение А., п. А.2.1 на с. 125).

Краевой задаче (3.76) соответствуют уравнения погружения (А.95), (А.96) на с. 126:

$$\frac{d}{dH} \Phi_H = -K(H) - \omega^2 \rho(H) \Phi_H^2, \quad \Phi_{H \rightarrow H_0} = 0, \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial H} \Psi(z, H) = -\omega^2 \rho(H) \Phi_H \Psi(z, H), \quad \Psi(z, H)|_{H \rightarrow z+0} = 1,$$

где  $\Phi_H = \Phi(H - 0, H)$  — передаточная функция, описывающая поле возмущения смещения поверхности от наведенных на этой поверхности источников с учетом слоистой стратификации среды.

Перейдем теперь к статистическому описанию задачи.

С помощью замены  $F_H = \omega^2 \rho(H) \Phi_H$  приведем уравнение Риккати (3.77) к виду ( $p^2 = k^2 - \mathbf{q}^2$ ):

$$\frac{d}{dH} F_H = -\frac{k^2 [c_0^2 - c^2(H)]}{c(H)} - p^2 + \frac{\rho'(H)}{\rho(H)} F_H - F_H^2, \quad F_{H_0} = 0. \quad (3.78)$$

Обозначим флуктуирующие составляющие скорости звука и производной плотности среды через

$$\varepsilon(z) = \frac{c_0^2 - c^2(z)}{c^2(z)} \quad \text{и} \quad \tilde{\rho}(z) = 2\alpha + \frac{\rho'(z)}{\rho(z)}$$

соответственно. Тогда уравнение (3.78) приобретает вид

$$\frac{d}{dH} F_H = -p^2 - k^2 \varepsilon(H) + [\tilde{\rho}(z) - 2\alpha] F_H - F_H^2, \quad F_{H_0} = 0. \quad (3.79)$$

Флуктуации  $\varepsilon(z)$  и  $\tilde{\rho}(z)$  можно считать, например, обусловленными наличием в океане вертикальной структуры вод. Примем их гауссовыми случайными функциями с параметрами

$$\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\rho^2 \quad \text{и} \quad l_\varepsilon, l_\rho,$$

где  $\sigma^2$  — дисперсия флуктуаций, а  $l$  — их радиусы корреляции.

При отсутствии флуктуаций  $\varepsilon$  и  $\tilde{\rho}$  решение уравнения (3.79) имеет вид

$$F_H = -\alpha + i\sqrt{p^2 - \alpha^2} \frac{1 + U_H}{1 - U_H},$$

где величина

$$U_H = \frac{\alpha - i\sqrt{p^2 - \alpha^2}}{\alpha + i\sqrt{p^2 - \alpha^2}} \exp\left(-2i\sqrt{p^2 - \alpha^2}(H - H_0)\right)$$

является аналогом коэффициента отражения. В общем случае для нее справедливо уравнение

$$\frac{d}{dH} U_H = -2i\kappa U_H - 2\gamma U_H + i\frac{k^2}{2\kappa} \varepsilon(H) (1 - U_H)^2 + \frac{1}{2} \tilde{\rho}(H) \left[ i\frac{\alpha}{\kappa} (1 - U_H)^2 + (1 - U_H^2) \right] \quad (3.80)$$

с начальным условием

$$U_{H_0} = \frac{\alpha - \gamma - i\kappa}{\alpha + \gamma + i\kappa}.$$

Здесь введено обозначение  $\sqrt{p^2 - \alpha^2} = \kappa - ik\gamma$ , где  $\gamma$  — малое затухание в среде. В уравнении (3.80) опущены члены второго порядка малости  $\sim \gamma\varepsilon, \gamma\tilde{\rho}$ . Для функции  $|U_H|^2$ , характеризующей энергетический коэффициент отражения от слоя среды, из уравнения (3.80) вытекает уравнение

$$\frac{d}{dH} |U_H|^2 = -4k\gamma |U_H|^2 - i\frac{k^2}{2\kappa} \varepsilon(H) (U_H - U_H^*) (1 - |U_H|^2) + \frac{1}{2} \tilde{\rho}(H) \left[ (U_H + U_H^*) - \frac{i\alpha}{\kappa} (U_H - U_H^*) \right] (1 - |U_H|^2). \quad (3.81)$$

Статистические характеристики функции  $|U_H|^2$  полностью описываются плотностью вероятностей  $P(H, W) = \langle \delta(|U_H|^2 - W) \rangle$ , которая, как легко видеть, в диффузионном приближении подчиняется уравнению Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial}{\partial H} P(H, W) = 4k\gamma \frac{\partial}{\partial W} W P(H, W) - 2D \frac{\partial}{\partial W} W (1 - W) P(H, W) + D \frac{\partial}{\partial W} W (1 - W)^2 \frac{\partial}{\partial W} P(H, W), \quad (3.82)$$

совпадающему по своей структуре с уравнением (2.6) на с. 18. Здесь коэффициент диффузии  $D = D_\varepsilon + D_\rho$ , а коэффициенты диффузии  $D_\varepsilon$  и  $D_\rho$  определяются соотношениями

$$D_\varepsilon = \frac{k^4}{4\kappa^2} \Phi_\varepsilon(2\kappa), \quad D_\rho = \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha^2}{\kappa^2} + 1 \right) \Phi_\rho(2\kappa),$$

где  $\Phi(\kappa)$  — спектральная функция флуктуаций. Так, например, для гауссовых дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды

$$D_\varepsilon = \frac{k^4}{2\kappa^2} \sigma_\varepsilon^2 l_\varepsilon, \quad D_{\tilde{\rho}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha^2}{\kappa^2} + 1 \right) \sigma_{\tilde{\rho}}^2 l_{\tilde{\rho}}.$$

Что касается фазы функции  $U_H$ , то ее плотность вероятностей является равномерной на интервале  $(0, 2\pi)$  для достаточно толстого слоя среды. При выводе уравнения (3.82), как делалось и ранее, проведено усреднение по быстрым изменениям функций  $U_H$ ,  $U_H^*$ , что обусловлено осциллирующим поведением функции  $U_H$  в отсутствие флуктуаций параметров среды.

Пространственно-временной спектр интенсивности акустического поля  $|\Psi(z, H)|^2$  в среде описывается уравнением, вытекающим из (3.77):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial H} |\Psi(z, H)|^2 = \\ = \left[ 2\alpha + i\kappa \left( \frac{1+U_H^*}{1-U_H^*} - \frac{1+U_H}{1-U_H} \right) - k\gamma \left( \frac{1+U_H^*}{1-U_H^*} + \frac{1+U_H}{1-U_H} \right) \right] |\Psi(z, H)|^2. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Влияние флуктуаций параметров среды входит в уравнение (3.83) лишь через функции  $U_H$  и  $U_H^*$ . Проведем в уравнении (3.83) статистическое усреднение. Быстро осциллирующие функции в правой части (3.83) усредним, пользуясь соотношением

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1+|U_H|e^{i\phi}}{1-|U_H|e^{i\phi}} \equiv 1 \quad (|U_H| < 1).$$

В результате получаем, что функция  $\langle |\Psi(z, H)|^2 \rangle$  не зависит от флуктуаций параметров среды. Это утверждение, в силу линейности уравнения (3.83), справедливо и для высших моментных функций, независимо от того, выходит или не выходит распределение вероятностей  $P(H, W)$  на стационарное решение по параметру  $H$ .

Таким образом, для рассматриваемой задачи наличие флуктуаций параметров среды не оказывает никакого влияния на статистические характеристики акустического поля в среде, в отличие от задач, рассмотренных ранее, где влияние флуктуаций параметров среды носило накапливающийся характер. Такое различие решений статистических задач связано сугубо с их различными краевыми условиями, хотя описываются они одним и тем же волновым уравнением.

### 3.4. Численное моделирование

Развитая выше теория основывалась на двух упрощениях: использовании приближения дельта-коррелированности функции  $\varepsilon_1(x)$  (или диффузионного приближения) и усреднении по быстрым осцилляциям для нахождения медленных (на масштабе длины волны) изменений статистических характеристик. Метод усреднения по быстрым осцилляциям обоснован только для анализа статистических характеристик коэффициента отражения волны от полупространства случайно-неоднородной среды. Для расчета же статистических характеристик интенсивности волнового поля в среде обосновать его если и возможно, то очень сложно (этот метод является в большей степени физическим методом, чем математическим). Численное моделирование точной задачи позволяет как подтвердить эти упрощения, так и получить ответ в более

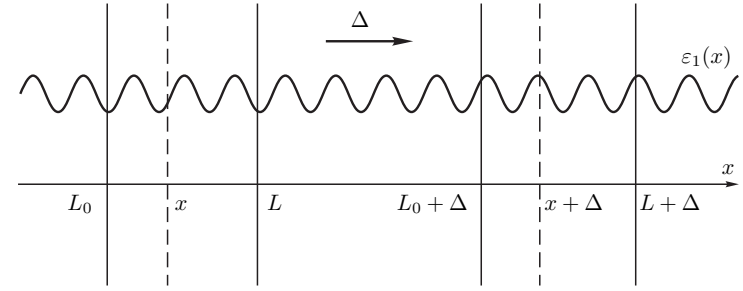


Рис. 3.11. Схема усреднения по параметру сдвига  $\Delta$ , основанная на свойстве эргодичности уравнений метода погружения для полупространства случайно-неоднородной среды

сложных ситуациях, в которых мы не имеем аналитических результатов. Такое численное моделирование, в принципе, можно было бы осуществить путем многократного решения задачи для различных реализаций параметров среды с последующим усреднением полученных решений по ансамблю реализаций (см., например, работу [116], где такая процедура осуществлялась для задачи о поле точечного источника). Однако такой подход малоперспективен, так как для получения значащих результатов требуется огромное число реализаций параметров среды. Этот подход совершенно непригоден для решения реальных физических задач, например задач распространения волн в атмосфере Земли и океане, где, как правило, имеется всего одна реализация. Более перспективен подход, основанный на свойстве эргодичности решения краевых задач по отношению к сдвигу всей задачи вдоль одной реализации функции  $\varepsilon_1(x)$ , определенной на полуоси  $(L_0, \infty)$  (см. рис. 3.11). На основе такого подхода статистические характеристики вычисляются с помощью формулы

$$\langle F(L_0, x, x_0, L) \rangle = \lim_{\delta \rightarrow \infty} F_\delta(L_0, x, x_0, L),$$

где

$$F_\delta(L_0, x, x_0, L) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta d\Delta F(L_0 + \Delta, x + \Delta, x_0 + \Delta, L + \Delta).$$

В задачах, связанных с полупространством ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ), статистические характеристики не зависят от  $L_0$ , и, следовательно, изучаемая задача обладает свойством эргодичности по отношению к параметру  $L$  — положению правой границы слоя (который является переменной в методе погружения), так как он отождествляется в этом случае с параметром сдвига. Это позволяет при решении уравнений метода погружения для одной реализации параметров среды одновременно получать и все статистические характеристики ее решения, представляющие непосредственный интерес, с помощью очевидного равенства

$$\langle F(x, x_0, L) \rangle = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta d\xi F(\xi, \xi + x_0 - x, \xi + (L - x_0) + (x_0 - x))$$

для достаточно большого интервала  $(0, \delta)$ . Данный подход позволяет даже вычислять в отсутствие каких-либо дополнительных упрощающих предположений статистические характеристики волны, которые современная статистическая теория дать не в состоянии.

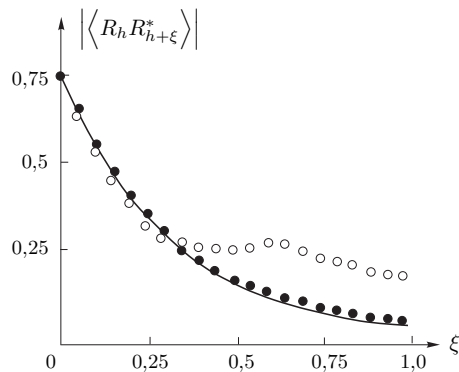


Рис. 3.12. Модуль корреляционной функции коэффициента отражения  $|\langle R_h R_{h+\xi}^* \rangle|$  при  $\beta = 0,08$  как функция параметра  $\xi$

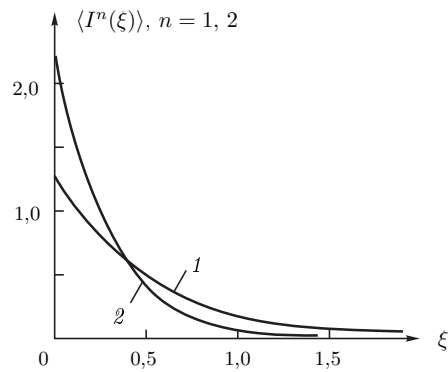


Рис. 3.13. Распределение моментов интенсивности волнового поля в среде для  $\beta = 1$  в задаче о падении волны на слой среды

Для слоя конечной толщины задача не является эргодичной по параметру  $L$ . Однако ее решение может быть выражено через два независимых решения задач о полупространстве [45] и, следовательно, сводится к эргодическому по  $L$  случаю.

Систематическая реализация программы численного моделирования была осуществлена в работе [53] (см. также [36, 79, 110]). При моделировании для параметров  $\alpha = k/D$  (безразмерное волновое число) и  $\beta = k\gamma/D$  (параметр, характеризующий степень стохастичности рассматриваемой задачи) выбирались значения  $\alpha = 25$ ,  $\beta = 1, 0,08$ . Значения параметра  $\beta$  выбирались из тех соображений, что при  $\beta = 1$  приблизительно должна работать линейная феноменологическая теория переноса излучения, а при  $\beta = 0,08$  задача является более «статистической» и линейная теория неприменима. Для этих значений параметра  $\beta$  имеется графический материал, полученный аналитически, путем усреднения по ансамблю реализаций, что позволяет сопоставить его с результатами численного моделирования.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные результаты, полученные путем численного моделирования.

### 3.4.1. Падение волны на слой среды

Первый этап моделирования состоял в изучении коэффициента отражения. На рис. 3.12 представлены результаты моделирования для корреляционной функции коэффициента отражения (сплошная линия — усреднение по ансамблю,  $\circ$  — усреднение по реализации длины  $L = 10$ ,  $\bullet$  — усреднение по реализации длины  $L = 300$ ). Результаты моделирования показывают хорошее согласие с результатами замечания 2.1. на с. 27 и, в частности, с формулой (2.35) на с. 27 в случае достаточно толстого слоя среды.

Второй этап моделирования состоял в изучении первого и второго моментов интенсивности волнового поля  $I(x, L)$  в задаче о падении волны на полупространство со случайными неоднородностями. Одновременно исследовалась зависимость результатов от длины выборки, по которой проводилось усреднение. Результаты моделирования сопоставлялись с теоретическими расчетами, полученными выше.

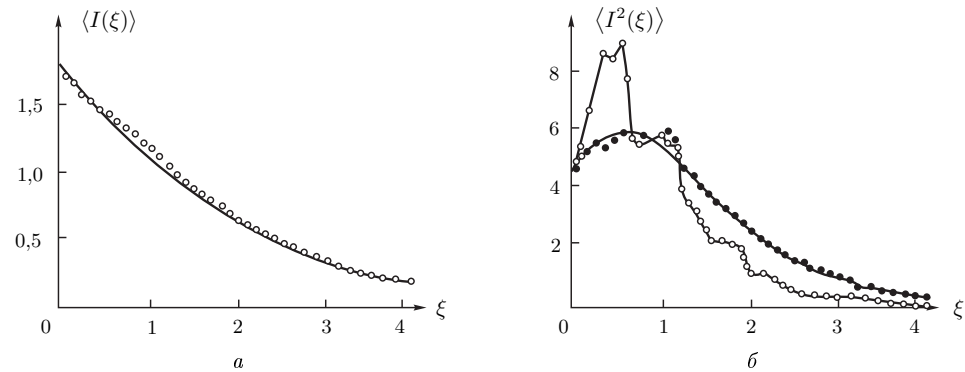


Рис. 3.14. Распределение моментов интенсивности волнового поля в среде при  $\beta = 0,08$  в задаче о падении волны на слой среды:  $\langle I(x, L) \rangle$  — (а);  $\langle I^2(x, L) \rangle$  — (б)

На рис. 3.13 изображены результаты моделирования  $\langle I(x, L) \rangle$ ,  $\langle I^2(x, L) \rangle$  для  $\beta = 1$  (кривые 1 —  $\langle I(x, L) \rangle$  и 2 —  $\langle I^2(x, L) \rangle$  соответствуют усреднению по ансамблю). Численный анализ показал, что в этом случае удовлетворительные результаты дают выборки безразмерной длины  $L \sim 10 - 20$ . Для  $\beta = 0,08$  такая выборка уже недостаточна, и для получения более полного соответствия с теоретическим результатом требуется выборка  $L \sim 300$  (рис. 3.14) (сплошная линия — усреднение по ансамблю;  $\circ$  — усреднение по реализации длины  $L = 10$  и  $\bullet$  — усреднение по реализации длины  $L = 300$ ).

### Замечание 3.1. Учет влияния модели среды

В работе [54] было проведено численное моделирование для различных моделей среды (в том числе и среды с двухмасштабными неоднородностями) с целью изучения влияния модели среды. Результаты моделирования сопоставлялись с результатами, полученными на основе модели гауссовых дельта-коррелированных флуктуаций величины  $\varepsilon_1(x)$ . ♦

### 3.4.2. Источник плоских волн внутри среды

На рис. 3.15 представлены результаты моделирования величины  $\langle I(x, x_0) \rangle$  для источника в неограниченном пространстве при длине выборки  $L = 10$  и  $\beta = 0,08$ . Сплошная линия соответствует теоретическим расчетам (усреднение по ансамблю), а  $\circ$  — усреднение по реализации длины  $L = 10$ . Из этого рисунка видно, что даже такая малая выборка правильно улавливает тенденцию изменения средней интенсивности поля источника в неограниченном пространстве. Все дальнейшие кривые были получены с длиной выборки  $L = 300 - 400$ .

На рис. 3.16 изображены результаты моделирования средней интенсивности поля источника для  $\beta = 1$  при различных краевых условиях на границе. Сплошные кривые также соответствуют теоретическим результатам (усреднение по ансамблю), а результаты моделирования:  $\circ$  — свободное прохождение через границу,  $\bullet$  — отражающая граница с условием  $dG(H, x_0)/dx = 0$ ,  $\times$  — отражающая граница с условием  $G(H, x_0) = 0$ .



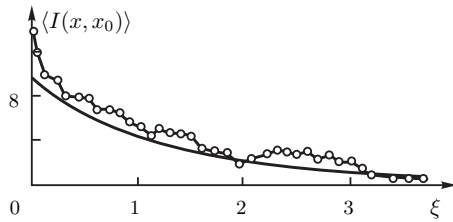


Рис. 3.15. Распределение средней интенсивности поля источника  $\langle I(x, x_0) \rangle$  в неограниченном пространстве при  $\beta = 0,08$

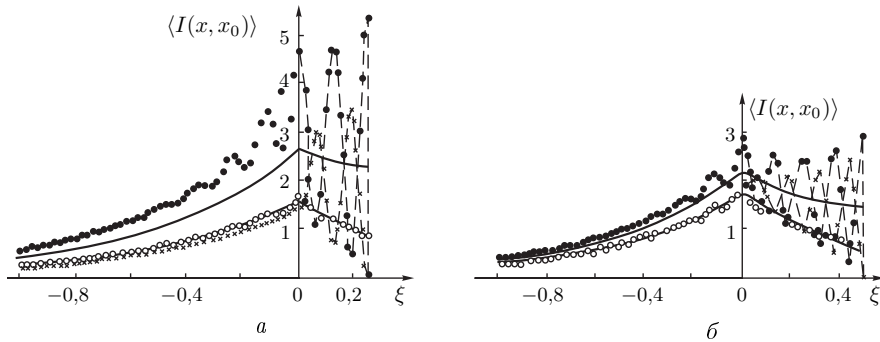


Рис. 3.16. Распределение средней интенсивности поля источника при  $\beta = 1$  и разных положениях границы:  $DH = 0,25$  (а);  $DH = 0,5$  (б)

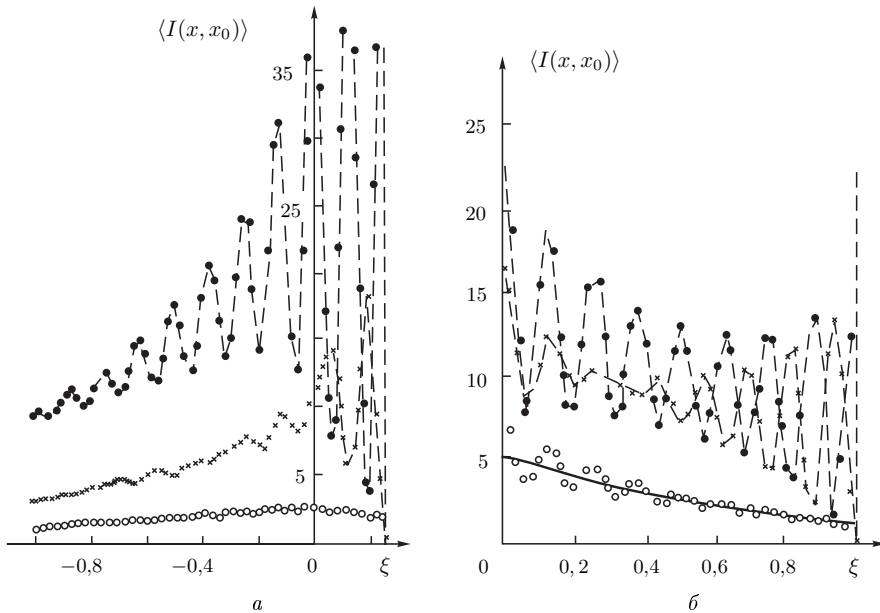


Рис. 3.17. Распределение средней интенсивности поля источника при  $\beta = 0,08$  и разных положениях границы:  $DH = 0,25$  (а);  $DH = 1$  (б)

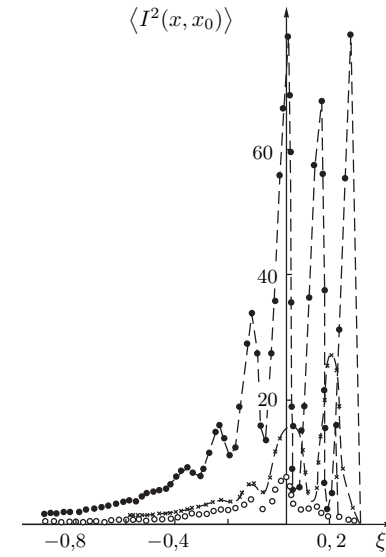


Рис. 3.18. Распределение второго момента интенсивности поля источника при  $\beta = 1$  и положении границы  $DH = 0,25$

Из рис. 3.16 видно хорошее соответствие результатов моделирования теоретическим кривым для краевого условия, соответствующего выходу волны из слоя, и сильные осцилляции средней интенсивности при наличии отражающей границы, что свидетельствует о сложной интерференционной структуре средней интенсивности даже при значении параметра  $\beta = 1$ . При удалении источника от границы амплитуда осцилляций уменьшается. На рис. 3.17 приведены аналогичные кривые для  $\beta = 0,08$ . Этот случай характеризуется более интенсивными изменениями функции  $\langle I(x, x_0) \rangle$ . При удалении границы от источника амплитуда осцилляций уменьшается.

Метод моделирования позволяет находить и такие статистические характеристики волны, для которых не имеется соответствующих теоретических расчетов. Так, на рис. 3.18, 3.19 изображены результаты моделирования вторых моментов интенсивности поля от источника  $\langle I^2(x, x_0) \rangle$  при  $\beta = 1$  и  $\beta = 0,08$  при различных краевых условиях на границе (результаты моделирования:  $\circ$  — свободное прохождение через границу,  $\bullet$  — отражающая граница с условием  $dG(H, x_0)/dx = 0$ ;  $\times$  — отражающая граница с условием  $G(H, x_0) = 0$ ). Вторые моменты интенсивности сохраняют осцилляции с тем же периодом, но со значительным увеличением их амплитуд.

Как видно из приведенных выше рисунков, характерной особенностью поведения моментов интенсивности волнового поля источника при наличии границы раздела являются осцилляции с периодом  $\sim 0,13$ . Это связано с выбранной величиной волнового параметра  $\alpha = 25$ , так как период осцилляций  $T = \pi/\alpha = 0,126$ .

В работе [53] рассматривался случай точечного источника на отражающей границе  $x_0 = L$  с краевым условием  $dG(x, x_0, L)/dx|_{x=L} = 0$ . На рис. 3.20 представлен результат моделирования величины  $2 \langle I_{\text{ref}}(x, L) \rangle / \langle I_{\text{ref}}(L, L) \rangle$  при  $\beta = 0,08$  и  $k/D = 25$ . На этом рисунке видны осцилляции в области  $\xi = D(L - x) < 0,3$  с периодом колебаний  $T = 0,13$ . Для больших значений  $\xi$  результаты моделирования средней интенсивности хорошо согласуются с локализационной кривой (см. выражение (3.73)).

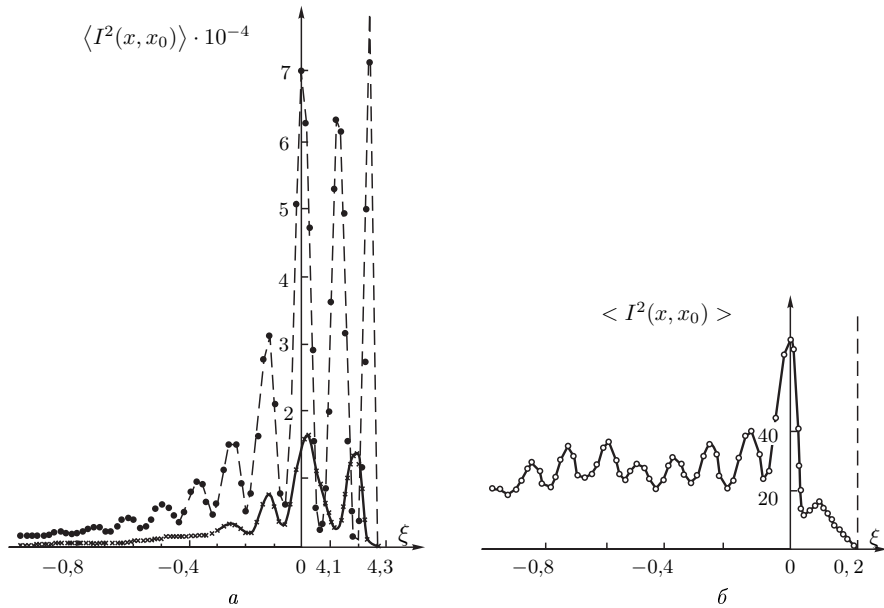


Рис. 3.19. Распределение второго момента интенсивности поля источника при  $\beta = 0,08$  и разных положениях границы: отражающая граница при  $DH = 4,3$  (а); свободное прохождение через границу  $DH = 0,25$  (б)

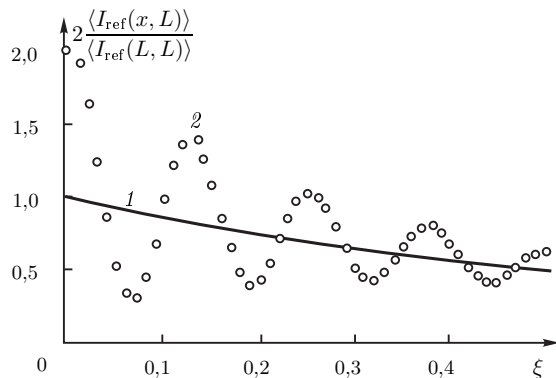


Рис. 3.20. Численное моделирование величины  $2 \frac{\langle I_{\text{ref}}(x, L) \rangle}{\langle I_{\text{ref}}(L, L) \rangle}$ . Кривая 1 — локализационная кривая (3.70), 2 — результат численного моделирования

### 3.4.3. Нелинейная задача о самовоздействии волны в случайной среде

Рассмотрим теперь результаты моделирования нелинейной задачи о самовоздействии волны для модели среды с зависимостью  $\varepsilon_1(x, J(x, w)) = J(x, w) + \varepsilon_1(x)$ , где  $\varepsilon_1(x)$  — гауссов дельта-коррелированный случайный процесс,  $J(x, w) = w|u(x, w)|^2$ ,  $u(x, w)$  — волновое поле внутри нелинейной среды, а  $w$  — интенсивность падающей волны [77, 78] (см. приложение А.2.3, с. 135). Особенностью этой задачи в случае отсутствия флуктуаций параметров среды является единственность и гладкость решения задачи при любом затухании  $\beta$ . Однако, при наличии таких флуктуаций могут возникать неоднозначности в решении задачи, что определяется параметром  $\beta$ . На рис. 3.21 представлены результаты моделирования квадрата модуля коэффициента отражения  $\langle |R(w)|^2 \rangle$  и интенсивности волнового поля на границе, нормированной на значение  $w$ , —  $\langle J(w) \rangle / w$ , для полупространства неоднородной среды ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ) как функции интенсивности падающей волны  $w$ . Параметр  $\beta$  был выбран равным единице, что соответствует умеренному влиянию статистики в линейной задаче, и при этом для рассматриваемых значений параметра  $w$  неоднозначностей в нелинейной задаче еще не возникает.

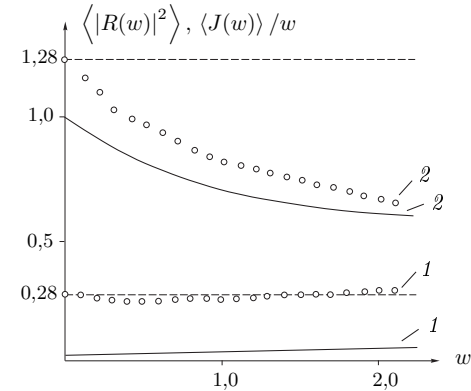


Рис. 3.21. Результаты моделирования  $\langle |R(w)|^2 \rangle$  и  $\langle J(w) \rangle / w$  как функций параметра  $w$ . Кружки: 1 —  $\langle |R(w)|^2 \rangle$ , 2 —  $\langle J(w) \rangle / w$ , соответствуют результатам моделирования. Кривые: 1 —  $\langle |R(w)|^2 \rangle$ , 2 —  $\langle J(w) \rangle / w$ , соответствуют задаче при отсутствии флуктуаций  $\varepsilon(x)$

Как видно из рис. 3.21, в диапазоне  $w < 2$  среда слабо отражает падающую волну (величина  $\langle |R(w)|^2 \rangle$  достаточно мала). Отражающие свойства среды в этом случае определяются в основном флуктуациями неоднородностей, и величина  $\langle |R(w)|^2 \rangle$  близка к значениям линейной задачи. Для интенсивности волнового поля на границе среды, однако, нелинейность становится существенной даже для небольших значений  $w$ , и величина  $\langle J(w) \rangle / w$  с ростом  $w$  стремится к решению детерминированной нелинейной задачи.

Более полную картину влияние статистики и нелинейности можно увидеть на рис. 3.22, где представлены результаты моделирования  $\langle J(\xi, w) \rangle / w$  (кружки,  $\xi = D(L-x)$ ) и соответствующие решения как детерминированной нелинейной задачи, так и линейной стохастической задачи для малой ( $w = 0,2$ ) и большой ( $w = 2$ ) интенсивностей падающей волны. В случае  $w = 0,2$  волновое поле внутри среды сперва определяется флуктуациями неоднородностей среды и функция  $\langle J(\xi, w) \rangle / w$  доста-

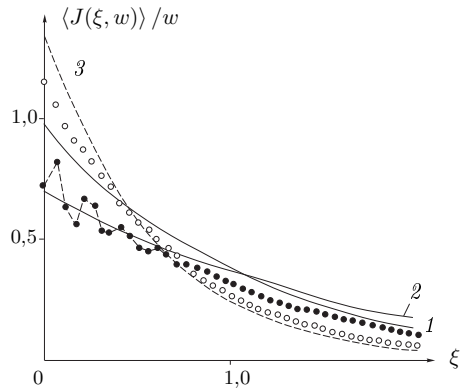


Рис. 3.22. Результат моделирования  $\langle J(\xi, w) \rangle / w$  (кружки). Сплошные линии соответствуют решению детерминированной задачи (кривая 1 — соответствует  $w = 0,2$ ; кривая 2 —  $w = 2$ ), пунктирная линия 3 соответствует линейной стохастической задаче;  $\circ$  — соответствуют  $w = 0,2$ ,  $\bullet$  — соответствуют  $w = 2$

точно близка к решению линейной задачи. Падение волны с интенсивностью  $w = 2$  приводит к осцилляциям функции  $\langle J(\xi, w) \rangle / w$  относительно решения детерминированной нелинейной задачи (вызванных интерференцией прямой и отраженной волн) вблизи границы и дальнейшему спадаению ее между двумя предельными решениями. Это означает, что в некоторой части пространства (пока интенсивность волнового поля достаточно велика  $\langle J(\xi, w) \rangle \gg 1$ ) нелинейные эффекты играют определяющую роль и эффекты статистики приводят лишь к интерференционным явлениям. Когда волна проникает достаточно глубоко внутрь среды и величина  $\langle J(\xi, w) \rangle$  становится достаточно малой, поведение волнового поля внутри среды определяется флуктуациями параметров среды.

## Глава 4

### СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Выше мы подробно рассмотрели задачу о статистических характеристиках волнового поля в случайно-неоднородной среде. Рассматривались задачи о падении волны на слой среды (полупространство) и источник внутри слоя. Наряду с задачами рассмотренного типа, в физике неупорядоченных систем (см., например, [67]) большое внимание уделяется изучению статистики *собственных чисел* для уравнения Гельмгольца (уровней энергии для *уравнения Шредингера*) в ограниченных случайно-неоднородных системах. К задачам такого же типа относится и распространение волн различной природы в волноводах (см., например, [73]). В общем случае многомерных систем анализ статистики собственных чисел и собственных функций наталкивается на большие трудности. В одномерном же случае (плоскостные среды) рассмотрение существенно упрощается.

В приложении А получена система динамических уравнений, позволяющая описывать динамику собственных чисел (в зависимости от толщины слоя), с помощью которой можно изучать и их статистические характеристики.

#### 4.1. Общие соотношения

Анализ собственных значений, предложенный в приложении А, основывается на анализе нулей решения уравнения Риккати, которое запишем в общем виде

$$\frac{d}{dL} f_L(\lambda) = a(L, \lambda) + b(L, \lambda) f_L(\lambda) + c(L, \lambda) f_L^2(\lambda). \quad (4.1)$$

Введем две функции, описывающие индикаторную функцию для решения уравнения (4.1), среднее значение по ансамблю реализаций флуктуирующих параметров которой описывает плотность вероятностей решения уравнения (4.1),

$$\varphi(L, f, \lambda) = \delta(f_L(\lambda) - f), \quad \Phi(L, f, \lambda) = A(L, \lambda) \delta(f_L(\lambda) - f), \quad (4.2)$$

где

$$A(L, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} f_L(\lambda).$$

Очевидно, что эти функции связаны между собой соотношением

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(L, f, \lambda) = -\frac{\partial}{\partial f} \Phi(L, f, \lambda). \quad (4.3)$$

В силу того что функция  $f_L(\lambda)$  удовлетворяет уравнению с начальным условием, ее индикаторная функция  $\varphi(L, f, \lambda) = \delta(f_L(\lambda) - f)$  описывается уравнением Лиувилля (стохастическим при наличии флуктуаций параметров среды):

$$\frac{\partial}{\partial L} \varphi(L, f, \lambda) = -\frac{\partial}{\partial f} J(L, f, \lambda), \quad (4.4)$$

где функция

$$J(L, f, \lambda) = -\frac{df_L(\lambda)}{dL}\varphi(L, f, \lambda),$$

и ее среднее значение описывает плотность потока вероятностей.

Рассмотрим производную  $\partial\Phi(L, f, \lambda)/\partial L$ . Используя соотношение (4.3) и уравнение (4.4), получаем для нее равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L}\Phi(L, f, \lambda) &= \frac{\partial A(L, \lambda)}{\partial L}\Phi(L, f, \lambda) - A(L, \lambda)\frac{\partial}{\partial f}\frac{df_L(\lambda)}{dL}\varphi(L, f, \lambda) = \\ &= \frac{\partial A(L, \lambda)}{\partial L}\varphi(L, f, \lambda) - \frac{df_L(\lambda)}{dL}\frac{\partial}{\partial f}\Phi(L, f, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda}J(L, f, \lambda). \end{aligned}$$

Следовательно, функция  $\Phi(L, f, \lambda)$  простым образом (с помощью квадратуры) связана с функцией  $J(L, f, \lambda)$ , а именно:

$$\Phi(L, f, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^L d\xi J(\xi, f, \lambda). \quad (4.5)$$

Собственные значения определяются как решения уравнения

$$f_L(\lambda_L) = 0. \quad (4.6)$$

Тогда

$$\Phi(L, 0, \lambda) = A(L, \lambda)\delta[f_L(\lambda)] = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(\lambda - \lambda_L^{(n)}), \quad (4.7)$$

и, следовательно, для средней плотности собственных чисел, приходящейся на единицу длины (см., например, [67]),

$$\rho(L, \lambda) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \delta(\lambda - \lambda_L^{(n)}),$$

получаем выражение

$$\rho(L, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{L} \int_0^L d\xi J(\xi, 0, \lambda). \quad (4.8)$$

Средняя плотность собственных чисел связана, естественно, со всеми собственными значениями исходной краевой однородной задачи и не дает информации о конкретном отдельно взятом собственном числе.

Дифференцируя равенство (4.6) по параметру  $L$ , получаем с учетом уравнения (4.1), что собственные числа, как функции параметра  $L$ , удовлетворяют уравнению

$$a(L, \lambda_L) + A(L, \lambda_L)\frac{d}{dL}\lambda_L = 0 \quad (4.9)$$

с заданным поведением при  $L \rightarrow L_0$ , определяемым из динамики системы в отсутствие флуктуаций параметров. И, следовательно, индикаторная функция для величины

$$\psi(L, \lambda) = \delta(\lambda_L^{(n)} - \lambda)$$

описывается уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial}{\partial L}\psi(L, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{a(L, \lambda)}{A(L, \lambda)}\psi(L, \lambda), \quad (4.10)$$

начальное условие для которого при  $L \rightarrow L_0$  определяется динамикой конкретно выбранного собственного числа.

Конкретизацию собственного значения для рассматриваемой одномерной задачи можно провести и на основе так называемого *фазового формализма*. Учитывая, что решение уравнения Риккати (4.1) меняется в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ , можно провести замену переменных

$$f_L(\lambda) = \operatorname{tg} \phi_L(\lambda) \quad \text{или} \quad f_L(\lambda) = 1/\operatorname{tg} \phi_L(\lambda)$$

в зависимости от начального условия к уравнению (4.1). Тогда значению  $\lambda_L^{(n)}$  будет соответствовать значение  $\phi_L^{(n)} = n\pi$  или  $\phi_L^{(n)} = \pi(n + 1/2)$ . Вводя индикаторную функцию для величины  $\phi_L(\lambda)$

$$\psi(L, \phi, \lambda) = \delta(\phi_L(\lambda) - \phi),$$

и учитывая, что  $\psi(L, \phi, \lambda)$  связана с функцией  $\psi(L, \lambda) = \delta(\lambda_L^{(n)} - \lambda)$  с помощью равенства

$$\psi(L, \phi_n, \lambda) \frac{d}{dL}\phi_n(\lambda) = \psi(L, \lambda),$$

уравнение (4.10) можно переписать в виде равенства

$$\frac{\partial}{\partial L}\psi(L, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{a(L, \lambda)}{\partial f / \partial \phi|_{\phi=\phi_n}}\psi(L, \phi_n, \lambda). \quad (4.11)$$

Таким образом, индикаторная функция для собственных значений с помощью квадратуры выражается через индикаторную функцию решения уравнения Риккати (4.1).

## 4.2. Статистическое усреднение

При наличии флуктуаций у параметров среды следует усреднить все полученные выше выражения по ансамблю реализаций флуктуирующих параметров.

В качестве конкретного примера рассмотрим динамическую задачу на собственные значения:

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + \lambda u(x) = \varepsilon(x)u(x), \quad u(0) = 0, \quad \left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x=L} = 0. \quad (4.12)$$

Используя методику метода погружения, описанную в предыдущих главах этой части, рассмотрим вместо (4.12) неоднородную задачу

$$\frac{d}{dx}u(x) = v(x), \quad \frac{d}{dx}v(x) = [\varepsilon(x) - \lambda]u(x), \quad (4.13)$$

$$u(0) = 0, \quad v(L) = 1.$$

Рассматривая теперь решение задачи (4.13) как функцию параметра  $L$ , получаем для величины  $u_L = u(L, L)$  уравнение Риккати:

$$\frac{d}{dL}u_L = 1 + [\lambda - \varepsilon(x)]u_L^2, \quad u_0 = 0, \quad (4.14)$$

полюсы решения которого и определяют собственные значения. Следовательно, собственным значениям отвечают нули функции  $f_L = 1/u_L$ , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{d}{dL}f_L = -f_L^2 - \lambda + \varepsilon(x), \quad f_0 = \infty. \quad (4.15)$$

Индикаторная функция  $\varphi(L, f, \lambda) = \delta(f_L(\lambda) - f)$  теперь удовлетворяет стохастическому уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial L}\varphi(L, f, \lambda) = \frac{\partial}{\partial f}(\lambda + f^2)\varphi(L, f, \lambda) - \varepsilon(L)\frac{\partial}{\partial f}\varphi(L, f, \lambda). \quad (4.16)$$

Пусть теперь  $\varepsilon(x)$  — дельта-коррелированный гауссов случайный процесс с параметрами

$$\langle \varepsilon(x) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon(x)\varepsilon(x') \rangle = 2\sigma_\varepsilon^2 l_0 \delta(x - x').$$

Тогда, усредняя уравнение (4.16) по ансамблю реализаций процесса  $\varepsilon(x)$ , получаем уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятностей  $P(L, f, \lambda) = \langle \delta(f_L(\lambda) - f) \rangle$  вида

$$\frac{\partial}{\partial L}P(L, f, \lambda) = \frac{\partial}{\partial f}(\lambda + f^2)P(L, f, \lambda) + D\frac{\partial^2}{\partial f^2}P(L, f, \lambda), \quad (4.17)$$

где коэффициент диффузии  $D = \sigma_\varepsilon^2 l_0$ .

При  $L \rightarrow \infty$  решение уравнения (4.17) выходит на «стационарное», не зависящее от  $L$  распределение вероятностей, определяемое уравнением

$$J_\infty(\lambda) = (\lambda + f^2)P_\infty(f, \lambda) + D\frac{d}{df}P_\infty(f, \lambda), \quad (4.18)$$

где постоянная интегрирования  $J_\infty(\lambda)$  — стационарная плотность потока вероятностей. Решение уравнения (4.18) с условием  $P_\infty(f, \lambda) \rightarrow 0$  при  $f \rightarrow -\infty$  имеет вид

$$P_\infty(f, \lambda) = \frac{J_\infty(\lambda)}{D} \exp\left\{-\frac{f}{D}\left(\frac{f^3}{3} + \lambda\right)\right\} \int_{-\infty}^f d\xi \exp\left\{\frac{\xi}{D}\left(\frac{\xi^3}{3} + \lambda\right)\right\}, \quad (4.19)$$

откуда, с учетом условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} df P_\infty(f, \lambda) = 1,$$

получаем выражение для стационарной плотности потока вероятностей:

$$\frac{1}{J_\infty(\lambda)} = \frac{\sqrt{\pi}}{D^{1/3}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \exp\left\{-\frac{x^3}{12} - \frac{\lambda x}{D^{2/3}}\right\}. \quad (4.20)$$

В частности, при больших значениях  $\lambda$ , а именно  $\lambda \gg D^{2/3}$ , из (4.20) следует асимптотическая формула

$$J_\infty(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \quad (\lambda \gg D^{2/3}), \quad (4.21)$$

и, следовательно, для средней плотности собственных чисел, приходящих на единицу длины при  $L \rightarrow \infty$  и  $\lambda \gg D^{2/3}$ , согласно выражению (4.8) получаем [67]

$$\rho(L, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L d\xi J(\xi, 0, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} J_\infty(\lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}}. \quad (4.22)$$

Очевидно, что этот закон распределения собственных чисел не зависит от вида краевого условия при  $x = L$  для задачи (4.12). В частности, этот закон будет иметь место и для краевой задачи

$$\frac{d}{dx}u(x) = v(x), \quad \frac{d}{dx}v(x) = [\varepsilon(x) - \lambda]u(x), \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0. \quad (4.23)$$

В этом случае собственные значения определяются нулями функции  $f_L(\lambda)$ , описываемой уравнением Риккати:

$$\frac{d}{dL}f_L = 1 + [\lambda - \varepsilon(x)]f_L^2, \quad f_0 = 0. \quad (4.24)$$

Учитывая, что при  $\varepsilon(x) = 0$  решение уравнения (4.24) имеет структуру

$$f_L(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}L),$$

произведем замену переменных

$$f_L(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{tg} \phi_L(\lambda). \quad (4.25)$$

Тогда для функции  $\phi_L(\lambda)$  получаем уравнение

$$\frac{d}{dL}\phi_L(\lambda) = \sqrt{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varepsilon(L)\sin^2\phi_L(\lambda), \quad \phi_0(\lambda) = 0, \quad (4.26)$$

и собственному значению соответствует значение

$$\phi_L^{(n)} = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.27)$$

Плотность вероятностей для решения уравнения (4.26), т. е. функция  $P(L, \phi, \lambda) = \langle \psi(L, \phi, \lambda) \rangle$ , для гауссова дельта-коррелированного случайного процесса  $\varepsilon(L)$  удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial}{\partial L}P(L, \phi, \lambda) = -\sqrt{\lambda}\frac{\partial}{\partial \phi}P(L, \phi, \lambda) + \frac{D}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \phi}\sin^2\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\sin^2\phi P(L, \phi, \lambda). \quad (4.28)$$

Следовательно, для рассматриваемой задачи плотность вероятностей собственного значения  $\lambda^{(n)} = P_n(L, \lambda)$ , согласно равенству (4.11), определяется решением уравнения (4.28) с помощью равенства

$$\frac{\partial}{\partial L}P_n(L, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\sqrt{\lambda}P(L, \phi_n, \lambda), \quad (4.29)$$

интегрирование которого дает выражение

$$P_n(L, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\sqrt{\lambda} \int_0^L d\xi P(\xi, \phi_n, \lambda). \quad (4.30)$$

Интегрируя уравнение (4.28) по  $\phi$  в пределах  $(-\infty, \phi_n)$ , в силу условия  $\sin \phi_n = 0$  можно получить и другое выражение для  $P_n(L, \lambda)$ , эквивалентное равенству (4.30):

$$P_n(L, \lambda) = -\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{\phi_n} d\theta P(L, \theta, \lambda). \quad (4.31)$$

Таким образом, для нахождения функции  $P_n(L, \lambda)$  необходимо знать решение уравнения (4.28). Решить уравнение (4.28) в общем случае невозможно. Для достаточно больших значений параметра  $\lambda$  ( $\lambda \gg D^{2/3}$ ) можно воспользоваться приближенным методом усреднения по быстрым осцилляциям, связанным с решением задачи в отсутствие флуктуаций ( $\phi_n = \sqrt{\lambda}L$ ).

В результате для медленных изменений функции  $\phi_L(\lambda)$ , обусловленных наличием флуктуаций, получаем более простое уравнение для плотности вероятностей:

$$\frac{\partial}{\partial L}P(L, \phi, \lambda) = -\sqrt{\lambda}\frac{\partial}{\partial \phi}P(L, \phi, \lambda) + \frac{3D}{8\lambda}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}P(L, \phi, \lambda), \quad (4.32)$$

решение которого с начальным условием  $P(0, \phi, \lambda) = \delta(\phi)$  имеет вид гауссова распределения вероятностей:

$$P(L, \phi, \lambda) = \sqrt{\frac{2\lambda}{3\pi DL}} \exp\left\{-\frac{2\lambda}{3DL}(\phi - \sqrt{\lambda}L)^2\right\}, \quad (4.33)$$

т. е. величина  $\phi_L(\lambda)$  — гауссова случайная функция по отношению к параметру  $L$  с характеристиками

$$\langle \phi_L(\lambda) \rangle = 0, \quad \sigma_\phi^2 = \frac{3}{4\lambda}DL.$$

Используя равенство (4.31), получаем выражение для плотности вероятностей  $n$ -го собственного значения в виде

$$P_n(L, \lambda) = \sqrt{\frac{L}{6\pi D}} \left[ 2 - \sqrt{\frac{\lambda_{0n}}{\lambda}} \right] \exp\left\{-\frac{2\lambda L}{3D}(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_{0n}})^2\right\}, \quad (4.34)$$

где  $\lambda_{0n} = n^2\pi^2/L^2$  — собственное значение задачи (4.23) при отсутствии флуктуаций [15, 16].

Отметим, что формально выражение (4.34) не может быть плотностью вероятностей, так как оно становится отрицательным при  $\lambda < \lambda_{0n}/4$ . Это является следствием приближения, связанного с усреднением по быстрым осцилляциям.

Для достаточно малого значения  $\sigma_\varepsilon^2$  функция  $P_n(L, \lambda)$  будет сосредоточена в окрестности  $\lambda \approx \lambda_{0n}$ , где она может быть представлена в виде гауссова распределения [73]:

$$P_n(L, \lambda) = \sqrt{\frac{L}{6\pi D}} \exp\left\{-\frac{L}{3D}(\lambda - \lambda_{0n})^2\right\}, \quad (4.35)$$

откуда следует, что

$$\langle \lambda_n \rangle = 0, \quad \sigma_{\lambda_n}^2 = \frac{3D}{2L},$$

т. е. среднее значение величины  $\lambda_n$  совпадает с решением задачи в отсутствие флуктуаций параметров среды, а дисперсия величины  $\lambda_n$  не зависит от номера собственного значения.

Таким образом, статистические характеристики собственных значений характеризуются безразмерным коэффициентом диффузии для  $n$ -го собственного значения:

$$D_n = \frac{3DL}{8\lambda_{0n}},$$

и условием применимости для всех полученных выше выражений является условие

$$D_n \ll 1.$$

Отметим, что распределение вероятностей (4.35) совпадает с первым приближением стандартной теории возмущений.

Выше мы рассмотрели конкретную краевую задачу (4.23) о статистике собственных значений. Легко, однако, видеть, что все результаты будут также справедливы и для других краевых условий. Изменяется лишь выражение для  $\lambda_{0n}$ . Так, для краевой задачи

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + \lambda u(x) = \varepsilon(x)u(x), \quad u(L) = 0, \quad \left.\frac{du(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad (4.36)$$

все результаты остаются в силе, за исключением выражения для  $\lambda_{0n}$ , которое теперь принимает вид

$$\lambda_{0n} = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{L^2}.$$

Полученные выше аналитические результаты справедливы для достаточно малого безразмерного коэффициента диффузии  $D_n$ . Такая ситуация имеет место для достаточно малого значения параметра  $\sigma_\varepsilon^2$  или для большого числа  $n$ . Численное моделирование позволяет проверить справедливость полученных результатов и при значении параметров  $D_n > 1$ . Такое моделирование было осуществлено в работах [14, 15].

Изучалась краевая задача (4.36). Численное моделирование показало, что статистические характеристики собственных значений хорошо описываются распределением вероятностей (4.35) даже для коэффициента диффузии  $D_0 \approx 5$ . Исключением является среднее значение собственного значения нулевой моды, для которой

$$\langle \lambda_0 \rangle - \lambda_{00} \approx -D_0.$$

Однако этот результат соответствует теории возмущений второго порядка, или дополнительному члену разложения выражения (4.34) по  $(\lambda - \lambda_{0n})$ . Коэффициенты корреляции между различными собственными числами  $\lambda_n$  близки к значению  $2/3$ , которое дает теория возмущений даже для случая  $D_0 \approx 5$ .

Таким образом, результаты численного моделирования показывают, что полученные асимптотические результаты имеют существенно более широкую область применимости, чем условие  $D_n \ll 1$ .

## Глава 5

### МНОГОМЕРНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ЗАДАЧИ В СЛОИСТЫХ СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ

Рассмотрим теперь обобщение стационарной задачи о плоских волнах в слоистых случайных средах на случай простейших многомерных задач. Такими задачами являются нестационарные задачи о распространении временных импульсов в слоисто-неоднородных средах и трехмерная стационарная задача о поле точечного источника в слоистых средах.

#### 5.1. Нестационарные задачи

##### 5.1.1. Формулировка краевых волновых задач

Рассмотрим нестационарную задачу о падении из области  $x > L$  плоской волны  $f[t + (x - L)/c_0]$  на слой среды, занимающий часть пространства  $L_0 < x < L$ , где  $c_0$  — скорость распространения волны в свободном пространстве. Волновое поле внутри слоя среды описывается волновым уравнением

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\gamma} \right) \right] u(x, t) = 0 \quad (5.1)$$

с краевыми условиями

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) u(x, t) \Big|_{x=L} = \frac{2}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} f(t), \quad (5.2)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) u(x, t) \Big|_{x=L_0} = 0.$$

Аналогично для источника плоских волн, расположенного внутри слоя среды в точке  $x_0$ , мы имеем краевую задачу

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\gamma} \right) \right] u(x, x_0, t) = -\frac{2}{c_0} \delta(x - x_0) \frac{\partial}{\partial t} f(t), \quad (5.3)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) u(x, x_0, t) \Big|_{x=L} = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} - 1 \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) u(x, x_0, t) \Big|_{x=L_0} = 0.$$

Отметим, что краевая задача (5.1), (5.2) соответствует краевой задаче (5.3) при расположении источника на границе слоя, т. е. при  $x_0 = L - u(x, L, t) = u(x, t)$ .

Решение задачи (5.3) может быть записано в виде интеграла Фурье (параметр  $\tilde{\gamma}$  предполагается малым):

$$u(x, x_0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_\omega(x, x_0) f(\omega) e^{-i\omega t}, \quad G_\omega(x, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt G(x, x_0, t) e^{i\omega t}, \quad (5.4)$$

где

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}.$$

Функция  $G_\omega(x, x_0)$  — решение стационарной задачи о поле точечного источника внутри слоисто-неоднородной среды (1.20):

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} G_\omega(x, x_0) + k^2 [1 + \varepsilon(x)] G_\omega(x, x_0) &= 2ik\delta(x - x_0), \\ \left( \frac{d}{dx} + ik \right) G_\omega(x, x_0) \Big|_{x=L_0} &= 0, \quad \left( \frac{d}{dx} - ik \right) G_\omega(x, x_0) \Big|_{x=L} = 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где

$$\frac{1}{c^2(x)} = \frac{1}{c_0^2} [1 + \varepsilon(x)], \quad \varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + i \frac{\tilde{\gamma}}{\omega}, \quad k = \frac{\omega}{c_0}.$$

Эта задача рассматривалась выше. Параметр  $\tilde{\gamma}$ , который характеризует поглощение волны в среде, связан с параметром  $\gamma$ , введенным ранее, с помощью соотношения  $\gamma = \tilde{\gamma}/2c_0$ .

Введем нестационарную функцию Грина  $G(x, L, t)$ . Падающая на слой волна  $f[t + (x - L)/c_0]$  создает на границе  $x = L$  распределение источников  $\tilde{f}(t_0)$  такое, что

$$f(t) = \frac{1}{2c_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \theta(t - t_0) \tilde{f}(t_0), \quad \tilde{f}(t_0) = 2c_0 \frac{\partial}{\partial t_0} f(t_0).$$

Тогда волновое поле внутри среды может быть записано в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 G(x, L, t - t_1) \frac{\partial}{\partial t_1} f(t_1),$$

где функция  $G(x, L, t - t_0)$  удовлетворяет волновому уравнению (5.1) с краевым условием на границе  $x = L$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) G(x, L, t - t_0) \Big|_{x=L} = \frac{2}{c_0} \delta(t - t_0).$$

Краевая задача определения  $G(x, L, t)$  (предполагаем для простоты отсутствие поглощения волны в среде) с помощью метода погружения может быть переформулирована в задачу с начальными условиями по параметру  $L$  (считаем, что  $t_0 = 0$ ) [6, 36] (см. приложение А.3.2):

$$\left( \frac{\partial}{\partial L} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) G(x, L, t) = -\frac{1}{2c_0} \varepsilon(L) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \frac{\partial}{\partial t} G(x, L, t - t_1) \frac{\partial}{\partial t_1} H(L, t_1), \quad (5.6)$$

$$G(x, L, t) \Big|_{L=x} = H(x, t).$$

Функция  $H(L, t) = G(L, L, t)$  — волновое поле на границе среды — описывается замкнутым интегро-дифференциальным уравнением с начальным условием:

$$\left( \frac{\partial}{\partial L} + \frac{2}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) H(L, t) = \frac{2}{c_0} \delta(t) - \frac{1}{2c_0} \varepsilon(L) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \frac{\partial}{\partial t} H(L, t - t_1) \frac{\partial}{\partial t_1} H(L, t_1), \quad (5.7)$$

$$H(L, t) \Big|_{L=L_0} = \theta(t).$$

Функция  $G(x, L, t)$  описывает волновое поле в среде при падении на нее волны вида  $\theta(t + (x - L)/c_0)$ . Функция  $H(L, t)$  также имеет структуру

$$H(L, t) = \theta(t)H_L(t). \quad (5.8)$$

Подставляя выражение (5.8) в уравнение (5.7) и разделяя сингулярную  $\sim \delta(t)$  и регулярную  $\sim \theta(t)$  части в уравнении (5.7), получаем уравнение [9]

$$\left( \frac{\partial}{\partial L} + \frac{2}{c(L)} \frac{\partial}{\partial t} \right) H_L(t) = -\frac{1}{2c_0} \varepsilon(L) \int_0^t dt_1 \frac{\partial H_L(t-t_1)}{\partial t} \frac{\partial H_L(t_1)}{\partial t_1}, \quad (5.9)$$

$$H_{L_0}(t) = 1, \quad H_L(+0) = \frac{2c(L)}{c(L) + c_0}.$$

### 5.1.2. Статистическое описание

Рассмотрим теперь статистические характеристики решения нестационарной задачи, описывающей распространение временного импульса, генерируемого внутри случайно-неоднородной среды. Эта задача описывается уравнением (5.1), и ее решение может быть представлено в виде интеграла Фурье (5.4). Нас интересуют предельные значения средней величины интенсивности волнового поля

$$I(x, x_0, t) = u^2(x, x_0, t)$$

при  $t \rightarrow \infty$  и  $\tilde{\gamma} \rightarrow 0$ . Среднюю интенсивность можно записать в виде

$$\langle I(x, x_0, t) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\psi \langle I_{\omega, \psi}(x, x_0) \rangle f\left(\omega + \frac{\psi}{2}\right) f^*\left(\omega - \frac{\psi}{2}\right) e^{-i\psi t}.$$

При  $t \rightarrow \infty$  значение интеграла определяется поведением подынтегрального выражения при малых значениях  $\psi$ , т. е. величиной

$$\langle I(x, x_0, t) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\psi \langle I_{\omega, \psi}(x, x_0) \rangle e^{-i\psi t}. \quad (5.10)$$

В формуле (5.10) введен двухчастотный аналог интенсивности плоской волны:

$$I_{\omega, \psi}(x, x_0) = G_{\omega+\psi/2}(x, x_0) G_{\omega-\psi/2}^*(x, x_0).$$

Отметим, что для малых значений  $\psi$  и  $\tilde{\gamma}$  из уравнения (5.5) следует равенство (при  $x \leq x_0$ )

$$\frac{d}{dx} S_{\omega, \psi}(x, x_0) = \frac{1}{c_0} (\tilde{\gamma} - i\psi) I_{\omega, \psi}(x, x_0), \quad (5.11)$$

где  $S_{\omega, \psi}(x, x_0)$  — двухчастотный аналог плотности потока энергии:

$$S_{\omega, \psi}(x, x_0) = \frac{c_0}{2i\psi} \left[ G_{\omega+\psi/2}(x, x_0) \frac{d}{dx} G_{\omega-\psi/2}^*(x, x_0) - G_{\omega-\psi/2}^*(x, x_0) \frac{d}{dx} G_{\omega+\psi/2}(x, x_0) \right].$$

Интегрируя равенство (5.11) по всему полупространству  $-\infty < x < x_0$ , получаем

$$S_{\omega, \psi}(x_0, x_0) = \frac{1}{c_0} (\tilde{\gamma} - i\psi) \int_{-\infty}^{x_0} dx I_{\omega, \psi}(x, x_0).$$

Следовательно, после интегрирования равенства (5.10) по полупространству, для среднего значения энергии, заключенной в этом полупространстве, получаем выражение

$$E(t) = \int_{-\infty}^{x_0} dx \langle I(x, x_0, t) \rangle = \frac{c_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{\tilde{\gamma} - i\psi} \langle S_{\omega, \psi}(x_0, x_0) \rangle e^{-i\psi t}. \quad (5.12)$$

Рассмотрим теперь статистическое описание величин  $S_{\omega, \psi}(x, x_0)$  и  $I_{\omega, \psi}(x, x_0)$ . Согласно соответствующим выражениям для стационарной задачи, они будут описываться величиной

$$W_{\omega, \psi}(x_0) = R_{\omega+\psi/2}(x_0) R_{\omega-\psi/2}^*(x_0),$$

которая является двухчастотным аналогом квадрата модуля коэффициента отражения  $W = |R|^2$ .

При  $\psi = 0$  выражения для  $S_{\omega, \psi}(x, x_0)$  и  $I_{\omega, \psi}(x, x_0)$  переходят в соответствующие выражения для одночастотных характеристик стационарной задачи. Таким образом, для вычисления средних значений  $S_{\omega, \psi}(x, x_0)$  и  $I_{\omega, \psi}(x, x_0)$  необходимо знание статистики величины  $W_{\omega, \psi}(x_0)$ .

Функция  $R_{\omega}(x)$ , как функция  $x$ , удовлетворяет стохастическому уравнению Риккати, которое запишем в виде

$$\frac{d}{dx} R_{\omega}(x) = \frac{2i}{c_0} \left( \omega + i\frac{\tilde{\gamma}}{2} \right) R_{\omega}(x) + \frac{\omega}{2c_0} \varepsilon_1(x) (1 + R_{\omega}(x))^2, \quad R_{\omega}(x)|_{x \rightarrow -\infty} = 0.$$

Следовательно, функция  $W_{\omega, \psi}(x)$  описывается уравнением

$$\frac{d}{dx} W_{\omega, \psi}(x) = -\frac{2}{c_0} (\tilde{\gamma} - i\psi) W_{\omega, \psi}(x) - i\frac{\omega}{2c_0} \varepsilon_1(x) \left( R_{\omega+\psi/2}(x) - R_{\omega-\psi/2}^*(x) \right) (1 - W_{\omega, \psi}(x)),$$

и для модели гауссова дельта-коррелированного процесса  $\varepsilon_1(x)$  с параметрами

$$\langle \varepsilon_1(x) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_1(x) \varepsilon_1(x') \rangle = 2\sigma_{\varepsilon}^2 l_0 \delta(x - x')$$

стандартным путем получаем для величины  $W_{\omega, \psi}^{(n)}(x) = \langle [W_{\omega, \psi}(x)]^n \rangle$  рекуррентное равенство

$$\frac{d}{dx} W_{\omega, \psi}^{(n)}(x) = -\frac{2n}{c_0} (\tilde{\gamma} - i\psi) W_{\omega, \psi}^{(n)}(x) + D(\omega) n^2 \left\{ W_{\omega, \psi}^{(n+1)}(x) - 2W_{\omega, \psi}^{(n)}(x) + W_{\omega, \psi}^{(n-1)}(x) \right\},$$

где, как и ранее,  $D(\omega) = \frac{\omega^2 \sigma_{\varepsilon}^2 l_0}{2c_0^2}$ .

Следовательно, решение, не зависящее от  $x$  и соответствующее полупространству случайно-неоднородной среды, удовлетворяет рекуррентному равенству

$$\frac{2}{c_0} (\tilde{\gamma} - i\psi) W_{\omega, \psi}^{(n)} = D(\omega) n \left\{ W_{\omega, \psi}^{(n+1)} - 2W_{\omega, \psi}^{(n)} + W_{\omega, \psi}^{(n-1)} \right\}. \quad (5.13)$$

При  $\psi = 0$  равенство (5.13) переходит в равенство (2.30) на с. 26, которому соответствует плотность вероятностей (2.28). Равенство (5.13) можно рассматривать как аналитическое продолжение в комплексную область равенства (2.30) по параметру  $\tilde{\gamma}$ .



Следовательно, и все статистические характеристики, полученные в стационарной задаче, будучи продолжены в комплексную область по параметру затухания  $\tilde{\gamma}$ , будут определять соответствующие двухчастотные статистические характеристики [74].

Таким образом, при отсутствии в исходной задаче поглощения в среде ( $\tilde{\gamma} = 0$ ) необходимо заменить параметр  $\tilde{\gamma}$  на  $0 - i\psi$  в соответствующих статистических характеристиках задачи о плоских волнах, для того чтобы получить выражения для двухчастотных статистических характеристик, т. е. положить

$$\beta(\omega, \psi) = \frac{1}{c_0 D(\omega)} (0 - i\psi).$$

В результате при  $t \rightarrow \infty$  и  $\tilde{\gamma} = 0$  получаем для достаточно малого значения  $\psi$  выражения

$$\langle S_{\omega, \psi}(x_0, x_0) \rangle = 1, \quad \langle I_{\omega, \psi}(x_0, x_0) \rangle = i \frac{D(\omega) c_0}{\psi + i0}.$$

Следовательно, формулы (5.10) и (5.12) переходят в выражения, соответствующие асимптотике  $t \rightarrow \infty$  (после интегрирования по  $\psi$ ):

$$\langle I(x_0, x_0, \infty) \rangle = \frac{c_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega D(\omega) |f(\omega)|^2, \quad E(\infty) = \frac{c_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2. \quad (5.14)$$

Таким образом, средняя интенсивность волнового поля в точке расположения источника и общая энергия во всем полупространстве остаются конечными величинами (если, конечно, соответствующие интегралы существуют). Этот факт подтверждает существование пространственной статистической локализации для средней интенсивности, и локализационная длина, очевидно, будет описываться формулой

$$l_{\text{loc}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega D(\omega) |f(\omega)|^2}.$$

Это свойство статистической локализации обусловлено конечностью общей энергии, сосредоточенной в полупространстве, что, в свою очередь, обусловлено независимостью среднего потока энергии от параметров флуктуирующей среды в стационарной задаче о плоских волнах. Форму локализационной кривой в пространстве получаем исходя из равенства (3.69) на с. 55:

$$\langle I(x, x_0, \infty) \rangle = \frac{c_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega D(\omega) |f(\omega)|^2 \Phi_{\text{loc}}(\xi) \quad (\xi = D(\omega)|x - x_0|), \quad (5.15)$$

где  $\Phi_{\text{loc}}(\xi)$  — локализационная кривая (3.70) для стационарной задачи. Зависимость от параметра  $\omega$  входит только через коэффициент диффузии  $D(\omega)$ .

Если импульс  $f(t)$  характеризуется только одним параметром (шириной импульса), то из равенства (5.15) для больших значений  $|x - x_0|$  получаем асимптотическую зависимость

$$\langle I(x, x_0, \infty) \rangle \sim |x - x_0|^{-3/2}.$$

Если же мы имеем импульс с высокочастотным заполнением (с частотой  $\omega_0$ ), то асимптотическая зависимость принимает вид

$$\langle I(x, x_0, \infty) \rangle \sim \Phi_{\text{loc}}(\xi) \quad (\xi = D(\omega_0)|x - x_0|).$$

Аналогичным образом можно получить соответствующие выражения и для источника, расположенного на отражающей границе  $x_0 = L$ :

$$\begin{aligned} \langle I_{\text{ref}}(x, L, \infty) \rangle &= \frac{2c_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega D(\omega) |f(\omega)|^2 \Phi_{\text{loc}}(\xi) \quad (\xi = D(\omega)(L - x)), \\ \langle I_{\text{ref}}(L, L, \infty) \rangle &= \frac{2c_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega D(\omega) |f(\omega)|^2, \\ E(\infty) &= \frac{2c_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Следовательно, в этом случае статистическая локализация осуществляется на масштабе, вдвое меньшем, чем в предыдущем случае.

В случае падения импульса на полупространство случайно-неоднородной среды  $x < L$ , имеем для величины  $I(L, t) = u^2(L, t)$ :

$$\begin{aligned} \langle I(L, t) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\psi \{1 + W_{\omega, \psi}^{(1)}\} e^{-i\psi t}, \\ E(t) = \int_{-\infty}^L dx \langle I(x, L, t) \rangle &= \frac{c_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{0 - i\psi} \{1 - W_{\omega, \psi}^{(1)}\} e^{-i\psi t}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где

$$W_{\omega, \psi}^{(1)} = \beta(\omega, \psi) \int_0^{\infty} du \frac{u}{u + 2} e^{-\beta(\omega, \psi)u}$$

— аналитическое продолжение соответствующего выражения для  $\langle |R_L|^2 \rangle$  по отношению к параметру  $\beta$ . Выполняя интегрирование по  $\psi$  и  $u$  в выражениях (5.17), получаем следующее асимптотическое выражение для достаточно большого  $t$  [91]:

$$\begin{aligned} \langle I(L, t) \rangle &= \frac{c_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2 \frac{D(\omega)}{[2 + D(\omega)c_0 t]^2}, \\ E(t) &= \frac{c_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2 \frac{1}{2 + D(\omega)c_0 t}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Выражения (5.18) позволяют получить асимптотическую зависимость поведения во времени средней интенсивности импульса, отраженного от полупространства, и средней энергии, содержащейся в случайно-неоднородной среде.

Если характерная частота одномасштабного спектра есть  $\omega_0$ , т. е.  $|f(\omega/\omega_0)|^2$ , то асимптотика при  $t \rightarrow \infty$  ( $c_0 D(\omega) t \gg 1$ ) зависит от поведения спектра  $|f(\omega/\omega_0)|^2$  в

нуле. Если  $|f(0)|^2$  — конечная величина, то, в силу квадратичной зависимости коэффициента диффузии  $D(\omega)$  от частоты  $\omega$ ,

$$\langle I(L, t) \rangle = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(0)|^2 \frac{1}{c_0 D(\omega) + 2} \sim \frac{1}{t\sqrt{t}}.$$

Этот случай соответствует гладким спектрам, в том числе и для падающего дельта-импульса.

Если же величина  $|f(\omega)|^2/\omega^2$  конечна в нуле, то асимптотика имеет вид

$$\langle I(L, t) \rangle = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{|f(\omega/\omega_0)|^2}{c_0 D(\omega)} \sim \frac{1}{t^2},$$

и это соответствует случаю, когда импульс  $f(t)$  есть производная по времени.

Спектр для импульса с высокочастотным заполнением зависит уже от двух параметров, и асимптотика, вообще говоря, зависит от вида спектра (т. е. могут существовать промежуточные асимптотики), но самый хвост асимптотики будет таким же, как и приведенный выше.

Из равенств (5.18) также следует, что при  $t \rightarrow \infty$  падающая волна полностью высвечивается из случайно-неоднородной среды.

Выше мы рассмотрели статистическое описание волнового импульса в случайно-неоднородной среде. Аналогичным образом можно рассмотреть и задачу о распространении пространственного волнового пакета в случайно-неоднородных средах [83–85, 90, 118–121, 135]. Свойство статистической локализации, полученное выше, очевидно, сохраняется и в этом случае. Его можно трактовать в этом случае как существование статистического волновода в направлении, перпендикулярном оси  $x$  [18, 19, 96, 97].

## 5.2. Точечный источник в слоистой случайной среде

### 5.2.1. Факторизация волнового уравнения в слоистых средах

Рассмотрим теперь задачу о волновом поле многомерного точечного источника внутри слоистой неоднородной среды [102], для которой функция Грина описывается уравнением

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k^2 [1 + \varepsilon(z)] \right] G(z, \mathbf{R}, z_0) = \delta(\mathbf{R}) \delta(z - z_0), \quad (5.19)$$

где  $\mathbf{R} = \{x, y\}$ ,  $\Delta_{\mathbf{R}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

Для функции Грина в этом случае имеется интегральное представление, основанное на соответствующем свойстве факторизации волнового поля в слоистых средах, в одномерном, двумерном и трехмерном пространствах соответственно [102] (см. при-

ложение Б, с. 168):

$$\begin{aligned} G^{(1)}(z, z_0) &= \frac{1}{2ik} \int_0^{\infty} dt \exp\left(i\frac{kt}{2}\right) \psi(t, z, z_0), \\ G^{(2)}(x, z, z_0) &= \frac{1}{2ik} \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} \exp\left(i\frac{k}{2t}(x^2 + t^2)\right) \psi(t, z, z_0), \\ G^{(3)}(z, \mathbf{R}, z_0) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \exp\left(\frac{k}{2t}(\mathbf{R}^2 + t^2)\right) \psi(t, z, z_0), \end{aligned} \quad (5.20)$$

где  $\psi(t, z, z_0)$  — решение уравнения (со вспомогательным параметром, который мы обозначили через  $t$ )

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, z, z_0) = \frac{i}{2k} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon(z) \right] \psi(t, z, z_0), \quad \psi(0, z, z_0) = \delta(z - z_0). \quad (5.21)$$

Формулы (5.20), (5.21) выражают свойство факторизации для уравнения Гельмгольца в слоистой среде.

Эволюционная задача (5.21) должна быть дополнена краевым условием по  $z$ . Мы будем рассматривать следующие краевые задачи:

а) источник в неограниченном пространстве с условиями излучения при  $z \rightarrow \pm\infty$ ;

б) источник на отражающей границе, на которой выполняется условие

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=z_0-0} = 0$$

и условие излучения при  $z \rightarrow \infty$ ;

в) источник на границе однородного полупространства с условием излучения  $z \rightarrow \pm\infty$ .

При  $x, |\mathbf{R}| \rightarrow \infty$  из выражений (5.20) следуют асимптотические формулы

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x, z, z_0) &\approx \frac{1}{2ik} e^{ik|x|} \psi(|x|, z, z_0), \\ G^{(3)}(z, \mathbf{R}, z_0) &\approx \frac{1}{4\pi\sqrt{R}} \sqrt{\frac{2\pi i}{kR}} e^{ikR} \psi(R, z, z_0), \end{aligned} \quad (5.22)$$

справедливые при условии, что функция  $\psi(t, z, z_0)$  не имеет экспоненциального поведения по  $t$ . Формулы (5.22) соответствуют малоугловому рассеянию (приближение параболического уравнения). Для того чтобы учесть рассеяние на большие углы, необходимо использовать точные представления (5.20) для функции Грина.

Используя преобразование Фурье, функцию  $\psi(t, z, z_0)$  можно записать в виде

$$\psi_{\omega}(z, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \psi(t, z, z_0) e^{-i\omega t},$$

где функция  $\psi_{\omega}(z, z_0)$  описывается уравнением

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} - 2k\omega + k^2 \varepsilon(z) \right] \psi_{\omega}(z, z_0) = 2ik\delta(z - z_0). \quad (5.23)$$

Решение уравнения (5.23)  $\psi_{\omega < 0}(z, z_0)$  соответствует распространяющимся волнам при  $\omega < 0$  и затухающим — при  $\omega > 0$ .

Нас интересует асимптотическое поведение функций Грина при  $x, |\mathbf{R}| \rightarrow \infty$ . Для них мы имеем

$$\begin{aligned} G^{(1)}(z, z_0) &= \frac{1}{2ik} \psi_{-k/2-i0}(z, z_0), \\ G^{(2)}(x, z, z_0) &= \frac{1}{2i\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{1+2\omega/k}} e^{ikx\sqrt{1+2\omega/k}} \psi_{\omega-i0}(z, z_0), \\ G^{(3)}(z, \mathbf{R}, z_0) &= -\frac{1}{8\pi^2} \sqrt{\frac{2\pi i}{kR}} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(1+2\omega/k)^{1/4}} e^{ikR\sqrt{1+2\omega/k}} \psi_{\omega-i0}(z, z_0), \end{aligned} \quad (5.24)$$

откуда видно, что формулы (5.22) следуют из равенств (5.24) при выполнении условия  $2\omega/k \ll 1$ .

### 5.2.2. Параболическое уравнение

Рассмотрим сперва статистическое описание функций Грина в приближении параболического уравнения. Функция  $\psi(t, z, z_0)$  может быть записана в виде

$$\psi(t, z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \sqrt{\frac{k}{2\omega}} \tilde{\psi}_{\omega}(z, z_0) e^{-i\omega t} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \psi_{\omega}(z, z_0) e^{i\omega t}, \quad (5.25)$$

где функция  $\tilde{\psi}_{\omega}(z, z_0)$  описывается уравнением

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + 2k\omega + k^2\varepsilon(z) \right] \tilde{\psi}_{\omega}(z, z_0) = 2ik\sqrt{2k\omega}\delta(z - z_0). \quad (5.26)$$

Для затухающих волн влияние флуктуаций  $\varepsilon(z)$  несущественно, и функция

$$\psi_{\omega > 0}(z, z_0) = -i\sqrt{\frac{k}{2\omega}} e^{-\sqrt{2k\omega}|z-z_0|}$$

соответствует полю в свободном пространстве. Неизвестная функция  $\tilde{\psi}_{\omega}(z, z_0)$  — решение уравнения (5.26), статистический анализ которого проводился ранее в соответствующих главах для стационарных одномерных задач.

Основной важной особенностью одномерной задачи о поле точечного источника в случайно-неоднородной среде, как мы видели раньше, является необходимость принимать во внимание конечность поглощения волны в среде:  $\gamma \ll 1$  (хоть и сколь угодно малое). Введем его как мнимую часть функции  $\varepsilon(z) = \varepsilon_1(z) + i\gamma$ , где  $\varepsilon_1(z)$  — случайная функция. Нас интересует средняя интенсивность

$$\langle I(t, z, z_0) \rangle = \langle \psi(t, z, z_0) \psi^*(t, z, z_0) \rangle$$

при достаточно больших значениях параметра  $t$ .

Среднюю интенсивность можно записать в виде

$$\langle I(t, z, z_0) \rangle = I_{\text{fluc}}(t, z, z_0) + I_1(t, z, z_0) + I_2(t, z, z_0), \quad (5.27)$$

где функции  $I_{\text{fluc}}(t, z, z_0)$ ,  $I_2(t, z, z_0)$  описывают вклад в среднюю интенсивность, благодаря первым двум членам в правой части равенства (5.25), а функция  $I_1(t, z, z_0)$  учитывает перекрестный член  $\langle \tilde{\psi}_{\omega_1}(z, z_0) \psi_{\omega_2}^*(z, z_0) \rangle$ .

Рассмотрим сначала величину

$$I_{\text{fluc}}(t, z, z_0) = \frac{k}{2(2\pi)^2} \int_0^{\infty} d\Omega \int_{-2\Omega}^{2\Omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\Omega^2 - \frac{\omega^2}{4}}} e^{-i\omega t} \langle I_{\Omega, \omega}(z, z_0) \rangle,$$

где

$$\langle I_{\Omega, \omega}(z, z_0) \rangle = \langle \tilde{\psi}_{\Omega+\omega/2}(z, z_0) \psi_{\Omega-\omega/2}^*(z, z_0) \rangle$$

— двухчастотный коррелятор решения соответствующей краевой задачи. При  $t \rightarrow \infty$  основной вклад в этот интеграл дает окрестность точки  $\omega \rightarrow 0$ .

Статистические характеристики решения уравнения (5.26) определяются статистикой коэффициента отражения плоской волны  $R_{z_0}(\omega)$ , падающей на полупространство  $z_0 > z$  из однородного полупространства. Функция  $R_{z_0}(\omega)$  теперь, как легко видеть, описывается уравнением Риккати:

$$\frac{d}{dz_0} R_{z_0}(\omega) = \left[ 2i\sqrt{2k\omega} - k\sqrt{\frac{k}{2\omega}}\gamma \right] R_{z_0}(\omega) + i\frac{k}{2}\sqrt{\frac{k}{2\omega}}\varepsilon_1(z_0) [1 + R_{z_0}(\omega)]^2.$$

Одночастотные статистические характеристики коэффициента отражения выражаются через единственный безразмерный параметр

$$\beta = \frac{k\gamma}{D} \sqrt{\frac{k}{2\Omega}},$$

где

$$D = D_0 \frac{k}{2\Omega}, \quad D_0 = \frac{k^2 \sigma_{\varepsilon}^2 l_0}{2},$$

а функциональная зависимость волнового поля от параметра  $\beta$  определяется видом краевой задачи. В этом случае для гауссова дельта-коррелированного случайного процесса  $\varepsilon_1(z)$  существует плотность вероятностей  $P(u)$  для величины  $u = \frac{1+W}{1-W}$ , не зависящая от  $z_0$  (полупространство) (2.28) на с. 25:

$$P(u) = \beta e^{-\beta(u-1)}. \quad (5.28)$$

Для двухчастотной функции  $W_{z_0}(\Omega, \omega) = R_{z_0}(\Omega + \omega/2) R_{z_0}^*(\Omega - \omega/2)$  при  $\omega \rightarrow 0$  получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz_0} W_{z_0}(\Omega, \omega) &= -2\sqrt{\frac{k}{2\Omega}} (k\gamma - i\omega) W_{z_0}(\Omega, \omega) - \\ &- i\frac{k}{2}\sqrt{\frac{k}{2\Omega}} \varepsilon_1(z_0) [R_{z_0}(\Omega) - R_{z_0}^*(\Omega)] [1 - W_{z_0}(\Omega, \omega)]. \end{aligned}$$

Здесь мы пренебрегли членами, пропорциональными  $\omega\gamma$ ,  $\omega\varepsilon_1(z_0)$ . И процесс определения двухчастотной функции  $W_{z_0}(\Omega, \omega)$  при малых значениях  $\omega$  сводится к аналитическому продолжению в комплексную плоскость соответствующих одночастотных

характеристик по параметру  $\beta$ :

$$\beta \rightarrow \beta(\Omega, \omega) = \sqrt{\frac{k}{2\Omega}} \frac{k\gamma - i\omega}{D} = -i\sqrt{\frac{2\Omega}{k}} \frac{\omega + ik\gamma}{D_0}. \quad (5.29)$$

Дальнейший анализ зависит от вида исходной краевой задачи.

а) Источник в неограниченном пространстве. Рассмотрим среднюю интенсивность в точке расположения источника  $z_0 = z$ . Одночастотная величина

$$\langle I_{\Omega,0}(z_0, z_0) \rangle = \langle \tilde{\psi}_{\Omega}(z_0, z_0) \psi_{\Omega}^*(z_0, z_0) \rangle = 1 + \frac{1}{\beta}.$$

Выполняя аналитическое продолжение по параметру  $\beta$ , получаем

$$I_{\text{fluc}}(t, z, z_0) = \frac{kD_0}{2i(2\pi)^2} \int_0^{\infty} d\Omega \int_{-2\Omega}^{2\Omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\Omega^2 - \frac{\omega^2}{4}}} e^{-i\omega t} \sqrt{\frac{k}{2\Omega}} \frac{1}{\omega + i\gamma}. \quad (5.30)$$

Выражение (5.30) для  $I_{\text{fluc}}(t, z, z_0)$  существует для точечного источника только в случае конечного поглощения волны в среде  $\gamma$ , и при  $\gamma \rightarrow 0$

$$I_{\text{fluc}}(t, z, z_0) \sim \frac{kD_0}{\sqrt{\gamma}}.$$

Следовательно, существование малого, но конечного поглощения в среде существенно для статистического описания статистических характеристик волнового поля (этот результат аналогичен одномерной задаче).

б) Источник на отражающей границе. В этом случае все заключения об источнике в неограниченном пространстве, очевидно, также справедливы.

в) Источник на границе однородного полупространства. Если источник расположен на границе  $z = z_0$  среды, одноточечное среднее имеет вид

$$\langle I_{\Omega,0}(z_0, z_0) \rangle = \langle \tilde{\psi}_{\Omega}(z_0, z_0) \psi_{\Omega}^*(z_0, z_0) \rangle = 1 + \langle |R_{z_0}(\Omega)|^2 \rangle,$$

где среднее значение вычисляется с помощью плотности вероятностей (5.28). Следовательно, для средней интенсивности на границе среды имеем

$$\langle I(t, z, z_0) \rangle = I_{\text{free}}(t, z, z_0) + I_{\text{fluc}}(t, z, z_0),$$

$$I_{\text{fluc}}(t, z, z_0) = \frac{k}{2(2\pi)^2} \int_0^{\infty} d\Omega \int_{-2\Omega}^{2\Omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\Omega^2 - \frac{\omega^2}{4}}} e^{-i\omega t} \beta(\Omega, \omega) \int_0^{\infty} \frac{u du}{u+2} e^{-\beta(\Omega, \omega)u},$$

где параметр  $\beta(\Omega, \omega)$  описывается формулой (5.29). Интегрирование по  $\omega$  и  $u$  дает выражение ( $\gamma \rightarrow 0$ )

$$I_{\text{fluc}}(t, z, z_0) = \frac{k^{3/2} D_0}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{d\Omega}{\Omega^{3/2} \left[ 2 + D_0 \sqrt{\frac{k}{2\Omega}} t \right]^2},$$

и, следовательно, при  $t \rightarrow \infty$ , получаем

$$I_{\text{fluc}}(t, z, z_0) = I_{\text{free}}(t, z, z_0) = \frac{k}{2\pi t},$$

т. е. средняя интенсивность волнового поля удваивается. Этот результат аналогичен одномерной задаче.

### 5.2.3. Общий случай

Для описания задачи о точечном источнике в неограниченном пространстве рассмотрим двумерный случай, а именно функцию  $G^{(2)}(x, z, z_0)$  (5.24).

Разобьем область интегрирования на три части:

$$(-\infty, -k/2), \quad (-k/2, 0) \quad \text{и} \quad (0, +\infty).$$

Вклад первой области в функцию Грина  $\sim \psi_{-k/2}(z_0, z_0)/kx$  из-за затухающей экспоненты при  $x \rightarrow \infty$ . Это дает член

$$\langle I_1^{(2)}(x) \rangle \sim \frac{D_0}{(kx)^2 k\gamma}$$

в выражении для средней интенсивности.

Чтобы оценить вклад второй области, обратимся к методу, использованному для анализа параболического уравнения. Это дает соответствующий вклад в среднюю интенсивность вида

$$\langle I_2^{(2)}(x) \rangle \sim \frac{D_0}{k\sqrt{\gamma}} \quad (5.31)$$

для достаточно больших значений  $x$ , но  $k\gamma x \ll 1$ .

В третьей области волновое поле  $\psi_{\omega}(z_0, z_0)$  соответствует волне, распространяющейся в свободном пространстве, и дает вклад в среднюю интенсивность

$$\langle I_3^{(2)}(x) \rangle \sim \frac{1}{kx}.$$

Отметим, что перекрестные члены между различными областями не дают степенной зависимости по  $\gamma$  в знаменателях соответствующих асимптотических выражений.

Комбинируя все полученные члены, видим, что при условии

$$\gamma^{3/4} \ll k\xi \ll 1$$

член  $\langle I_2^{(2)}(x) \rangle$  является определяющим в выражении для средней интенсивности.

В трехмерном случае получаем аналогичный результат:

$$\langle I_1^{(3)}(x) \rangle \sim \frac{D_0 k}{(kR)^4 \gamma}, \quad \langle I_2^{(3)}(x) \rangle \sim \frac{D_0}{R\sqrt{\gamma}}, \quad \langle I_3^{(3)}(x) \rangle \sim \frac{1}{(kR)^2}$$

при  $R \rightarrow \infty$ ,  $\gamma kR \ll 1$ . При выполнении условия  $\gamma^{5/6} \ll k\gamma R$  функция  $\langle I_2^{(3)}(x) \rangle$  вносит определяющий вклад в среднюю интенсивность в точке расположения точечного источника  $z = z_0$ , который соответствует цилиндрической волне.

Аналогичный результат справедлив и для точечного источника, расположенного на отражающей границе.

Если источник расположен на границе случайно-неоднородного полупространства, средняя интенсивность описывается интегралом

$$\langle I(x, z, z_0) \rangle = I_{\text{free}}(x, z, z_0) \left( 1 + 2D_0 x \int_0^1 \frac{ds}{\left[ D_0 x + 2s\sqrt{1-s^2} \right]} \right).$$

Нас интересуют два асимптотических режима:  $D_0 x \ll 1$ , но  $kx \gg 1$  и  $D_0 x \gg 1$ . В первом случае

$$\langle I(x, z, z_0) \rangle = 2I_{\text{free}}(x, z, z_0).$$

Этот результат аналогичен результату, полученному для параболического уравнения, и показывает, что в этом режиме рассеяние на большие углы не оказывает влияния на статистику.

В случае же  $D_0x \gg 1$  средняя интенсивность описывается выражением

$$\langle I(x, z, z_0) \rangle = I_{\text{free}}(x, z, z_0) \left( 1 + \frac{2}{D_0x} \right)$$

и рассеяние на большие углы существенно в формировании статистики. Оно проявляется в появлении дополнительного ослабляющего множителя при интенсивности в свободном пространстве. Аналогичный результат имеет место и в трехмерном случае.

Мы видели ранее, что принципиальной особенностью одномерной задачи о плоских волнах в слоистых случайных средах является необходимость учета малого, но конечного поглощения волны в среде (параметр  $\gamma$ ). Статистика волнового поля формируется интерференцией многократно переотраженных волн в случайной среде и приводит к сингулярной зависимости средней интенсивности  $\langle I \rangle$  от параметра  $\gamma$ , например,  $\langle I \rangle \sim 1/\gamma$  для точечного источника в неограниченном пространстве.

В многомерных слоистых задачах пространственная дифракция действует подобно эффекту затухания, что позволяет вычислять статистические характеристики волнового поля с помощью аналитического продолжения в комплексную плоскость по параметру  $\gamma$ . Можно было надеяться, что эти дифракционные эффекты снимут сингулярную зависимость статистических характеристик от параметра  $\gamma$  и что в многомерных задачах возможен предельный переход  $\gamma \rightarrow 0$ . Однако эти надежды не оправдались. Дифракционные эффекты уменьшают степень сингулярности, но не ликвидируют ее. Таким образом, поглощение волн в среде является регуляризирующим фактором в многомерных задачах о волнах в слоистых случайных средах.

В заключение отметим существование ряда работ по численному моделированию статистических характеристик поля точечного источника в трехмерных слоистых средах [23, 70, 71, 104].

## Глава 6

### ДВУХСЛОЙНАЯ МОДЕЛЬ СРЕДЫ

#### 6.1. Постановка краевых задач

Часто исследователи сталкиваются с многомерной ситуацией, когда одни типы волн могут порождать другие благодаря зависимости параметров задачи от пространственных координат. В ряде случаев возможно параметризовать такую задачу, разбивая среду в каком-то направлении на слои, характеризующиеся дискретным набором некоторых параметров, в то время как другие параметры в этих слоях меняются непрерывным образом. В качестве примера можно привести описание крупномасштабных и низкочастотных движений в атмосфере и океане Земли (например, волн Россби). Эти движения можно описывать в рамках квазигеострофической модели, в которой атмосфера и океан рассматриваются как тонкие многослойные пленки, характеризующиеся по вертикали толщинами слоев и значениями плотности в них [69]. В то же время другие параметры внутри слоев меняются непрерывным образом. И возможным источником локализации волн Россби, например, являются пространственные изменения неоднородностей топографии дна в горизонтальной плоскости. Простейшая однослойная модель, эквивалентная одномерному уравнению Гельмгольца, описывает баротропные движения среды, а двухслойная модель (рис. 6.1) учитывает уже бароклинные эффекты [21, 113].

Простейшая модель распространения взаимодействующих волн в двухслойной среде описывается системой уравнений [20]

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \psi_1(x) + k^2 \psi_1(x) - \alpha_1 F(\psi_1(x) - \psi_2(x)) &= 0, \\ \frac{d^2}{dx^2} \psi_2(x) + k^2 [1 + \varepsilon(x)] \psi_2(x) + \alpha_2 F(\psi_1(x) - \psi_2(x)) &= 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где параметры  $\alpha_1 = 1/H_1$ ,  $\alpha_2 = 1/H_2$  ( $H_1$ ,  $H_2$  — толщины верхнего и нижнего слоев),  $F$  характеризует взаимодействие волн, а функция  $\varepsilon(x)$  описывает неоднородности среды в нижнем слое. Считаем, как и ранее, что функция  $\varepsilon(x)$  отлична от нуля только в области  $(L_0, L)$  и является случайной функцией. Краевыми условиями для системы уравнений (6.1) являются условия излучения на бесконечности и условие непрерывности волновых полей и их производных на границах области  $L_0$  и  $L$ .

Отметим, что параметр  $F$ , характеризующий параметризацию среды по вертикали, в системе уравнений (6.1) проявляется как горизонтальный масштаб, ответственный за генерацию дополнительной волны. Характер взаимодействия волн (и, в частности, зависимости параметров  $\alpha_i$  от толщины слоев) в системе (6.1) соответствует задачам геофизической гидродинамики. Для задач другого типа эти соотношения могут измениться, что несущественно. Принципиально важно лишь то, что взаимодействие между волнами линейно.

Переход к однослойной модели осуществляется при  $F = 0$ ,  $\psi_1 = 0$ , и соответствующее волновое уравнение принимает вид уравнения Гельмгольца (1.1) на стр. 7. Переход к однослойной задаче можно также осуществить и предельным переходом

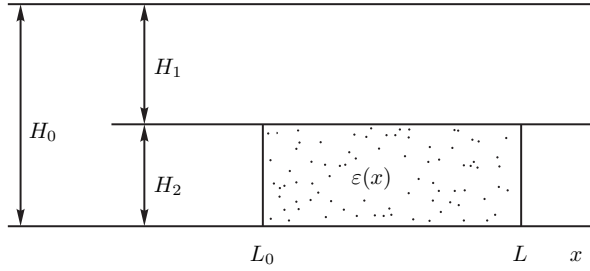


Рис. 6.1. Двухслойная модель среды

$H_1 \rightarrow 0$ , при этом  $\psi_1 = \psi_2$ . Следует, однако, иметь в виду, что предельные переходы  $L_0 \rightarrow -\infty$  (переход к полупространству) и  $H_i \rightarrow 0$  в статистической задаче непрерывны. В этом случае толщины слоев  $H_i$  должны быть конечными, хоть и сколь угодно малыми.

Рассмотрим статистическое описание этой задачи, следуя работе [20].

Рассмотрим систему уравнений для функции Грина:

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_1(x, x_0) + k^2 \psi_1(x, x_0) - \alpha_1 F(\psi_1(x, x_0) - \psi_2(x, x_0)) = -v_1 \delta(x - x_0),$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_2(x, x_0) + k^2 [1 + \varepsilon(x)] \psi_2(x, x_0) + \alpha_2 F(\psi_1(x, x_0) - \psi_2(x, x_0)) = -v_2 \delta(x - x_0), \quad (6.2)$$

соответствующую задаче о возбуждении волн в верхнем и нижнем слоях соответственно. Вводя векторное обозначение

$$\boldsymbol{\psi}(x, x_0) = \{\psi_1(x, x_0), \psi_2(x, x_0)\}, \quad \mathbf{v} = \{v_1, v_2\},$$

можно переписать систему (6.2) в векторной форме:

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + A^2 + k^2 \varepsilon(x) \Gamma \right] \boldsymbol{\psi}(x, x_0) = -\mathbf{v} \delta(x - x_0), \quad (6.3)$$

где матрицы

$$A^2 = \begin{pmatrix} k^2 - \alpha_1 F & \alpha_1 F \\ \alpha_2 F & k^2 - \alpha_2 F \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

и введены параметр  $\lambda^2 = \left[ 1 - (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{F}{k^2} \right]$ , описывающий моду, которую будем называть  $\lambda$ -волной (считаем, что  $\lambda^2 > 0$ ), и параметры, описывающие относительные толщины слоев:

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{H_2}{H_0}, \quad \tilde{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{H_1}{H_0}, \quad \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 = 1.$$

В такой форме записи уравнение (6.3) подобно уравнению Гельмгольца (1.1) на с. 7, где матрица  $A$  описывает постоянное значение показателя преломления, а величина  $\varepsilon(x) \Gamma$  описывает неоднородности среды.

Рассмотрим матрицу  $\Psi$ , описываемую уравнением

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + A^2 + k^2 \varepsilon(x) \Gamma \right] \Psi(x, x_0) = -E \delta(x - x_0), \quad (6.5)$$

через которую вектор-функция  $\boldsymbol{\psi}(x, x_0)$  определяется, согласно равенству

$$\boldsymbol{\psi}(x, x_0) = \Psi(x, x_0) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \psi_{11} + v_2 \psi_{12} \\ v_1 \psi_{21} + v_2 \psi_{22} \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Как следствие, компоненты матрицы  $\{\psi_{11}, \psi_{21}\}$  и  $\{\psi_{12}, \psi_{22}\}$  описывают волны, генерируемые источниками  $\{v_1, 0\}$ ,  $\{0, v_2\}$  в верхнем и нижнем слоях соответственно. Краевыми условиями для уравнения (6.5) являются условия

$$\left( \frac{d}{dx} - iA \right) \Psi(x, x_0) \Big|_{x=L} = 0, \quad \left( \frac{d}{dx} + iA \right) \Psi(x, x_0) \Big|_{x=L_0} = 0, \quad (6.7)$$

где матрица

$$A = k \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_2 + \lambda \tilde{\alpha}_1 & (1 - \lambda) \tilde{\alpha}_1 \\ (1 - \lambda) \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_1 + \lambda \tilde{\alpha}_2 \end{pmatrix}.$$

Далее еще больше упростим задачу, а именно: будем считать, что источник плоских волн расположен на границе области существования неоднородностей  $x_0 = L$ . В этом случае, используя условие на скачок волнового поля в точке расположения источника  $x_0$ , получаем краевую задачу

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + A^2 + k^2 \varepsilon(x) \Gamma \right] \Psi(x, L) = 0, \quad (6.8)$$

$$\left( \frac{d}{dx} - iA \right) \Psi(x, L) \Big|_{x=L} = E, \quad \left( \frac{d}{dx} + iA \right) \Psi(x, L) \Big|_{x=L_0} = 0.$$

Последнее уравнение может быть упрощено диагонализацией матрицы  $A$  (6.4) с помощью матрицы

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_1 \end{bmatrix}, \quad K^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 & 1 \\ -\tilde{\alpha}_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразованные матрицы  $A$  и  $\Gamma$  превращаются в

$$B = \tilde{A} k \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\Gamma} = K \Gamma K^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_2 & -1 \\ -\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_1 \end{bmatrix},$$

и мы получаем новую систему для преобразованной матрицы  $\Psi$ :

$$\Psi \rightarrow U(x, L) = -2iK \Psi(x, L) K^{-1} B, \quad (6.9)$$

в виде

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + B^2 + k^2 \varepsilon(x) \tilde{\Gamma} \right] U(x, L) = 0, \quad (6.10)$$

$$\left( \frac{d}{dx} - iB \right) U(x, L) \Big|_{x=L} = -2iB, \quad \left( \frac{d}{dx} + iB \right) U(x, L) \Big|_{x=L_0} = 0.$$

Краевая задача (6.10) описывает падение на среду  $k$ - и  $\lambda$ -волн с единичными амплитудами. Причем падающая  $\lambda$ -волна  $U_{11}$  генерирует  $k$ -волну  $U_{21}$ , а падающая  $k$ -волна  $U_{22}$  генерирует  $\lambda$ -волну  $U_{12}$ .

Из системы (6.10) следует, что амплитуда генерируемой  $k$ -волны  $U_{21}$  пропорциональна параметру

$$\delta = \lambda \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 = \frac{\lambda H_1 H_2}{H_0^2}.$$

В общем случае параметр  $\delta < \lambda/4$ . Однако поскольку обычно в моделях, описывающих реальные среды,  $\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \ll 1$  (так, например, для атмосферы предполагается, что  $H_2 \ll H_1$ , или  $\tilde{\alpha}_1 \ll 1$ ,  $\tilde{\alpha}_2 \cong 1$ , а для океана предполагается, что  $H_1 \ll H_2$ , или  $\tilde{\alpha}_1 \cong 1$ ,  $\tilde{\alpha}_2 \ll 1$ ), в рассматриваемой задаче появляется малый параметр  $\delta$ . Для моделей среды, где  $H_2/H_1 \cong 1$ , параметр  $\delta \ll 1$  при  $\lambda \ll 2$ .

Введем теперь матрицы  $R(L) = U(L, L) - E$  и  $T(L) = U(L_0, L)$ . Тогда  $R_{ij}, T_{ij}$  будут комплексными коэффициентами отражения и прохождения падающих ( $i = j$ ) и возбужденных ( $i \neq j$ )  $\lambda$ - и  $k$ -волн соответственно.

Из системы (6.10) следует существование двух интегралов, соответствующих сохранению плотности потока энергии  $\lambda$ - и  $k$ -волн:

$$\begin{aligned} & \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \left[ U_{11}^*(x) \frac{d}{dx} U_{11}(x) - U_{11}(x) \frac{d}{dx} U_{11}^*(x) \right] + \\ & + U_{21}^*(x) \frac{d}{dx} U_{21}(x) - U_{21}(x) \frac{d}{dx} U_{21}^*(x) = \text{const}, \\ & \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \left[ U_{12}^*(x) \frac{d}{dx} U_{12}(x) - U_{12}(x) \frac{d}{dx} U_{12}^*(x) \right] + \\ & + U_{22}^*(x) \frac{d}{dx} U_{22}(x) - U_{22}(x) \frac{d}{dx} U_{22}^*(x) = \text{const}. \end{aligned}$$

В терминах коэффициентов отражения и прохождения они записываются в виде равенств

$$\begin{aligned} \delta \left[ 1 - |R_{11}|^2 - |T_{11}|^2 \right] &= |R_{21}|^2 + |T_{21}|^2, \\ 1 - |R_{22}|^2 - |T_{22}|^2 &= \delta \left[ |R_{12}|^2 + |T_{12}|^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Если осуществляется полная локализация волн в области неоднородностей среды  $(L_0, L)$ , то все коэффициенты прохождения  $T_{ij}$  должны стремиться к нулю при увеличении ее размера.

Равенства (6.11) определяют связь коэффициентов прохождения с коэффициентами отражения, которые, на основе метода погружения, можно описать замкнутой системой уравнений. Метод погружения позволяет перейти от задачи с краевыми условиями для матричной функции  $U(x, L)$  к системе уравнений для матричных функций  $U(x, L)$  и  $U(L, L)$  с начальными условиями по параметру  $L$  (в этом случае переменная  $x$  рассматривается как параметр) (см. замечание А.5. на с. 112 приложения А):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} U(x, L) &= iU(x, L)B + \frac{i}{2}k^2\varepsilon(L)U(x, L)B^{-1}\tilde{\Gamma}U(L, L), \\ U(x, L)|_{L=x} &= U(x, x), \\ \frac{d}{dL} U(L, L) &= -2iB + i[U(L, L)B + BU(L, L)] + \frac{i}{2}k^2\varepsilon(L)U(L, L)B^{-1}\tilde{\Gamma}U(L, L), \\ U(L, L)|_{L=L_0} &= E. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Последнее уравнение для матрицы  $R(L) = U(L, L) - E$  можно переписать в виде матричного уравнения Риккати:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} R(L) &= i[R(L)B + BR(L)] + \frac{i}{2}k^2\varepsilon(L)[E + R(L)]B^{-1}\tilde{\Gamma}[E + R(L)], \\ R(L)|_{L=L_0} &= 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Расписывая это уравнение в виде системы уравнений для компонент  $R_{ij}$ , легко видеть, что имеется дополнительный интеграл

$$R_{21} = \delta R_{12}.$$

Это позволяет рассматривать систему из трех уравнений для  $R_{11}$ ,  $R_{12}$  и  $R_{22}$ .

## 6.2. Статистический анализ

Перейдем теперь к статистическому анализу рассматриваемой задачи.

Введем интенсивности всех отраженных волн,  $W_{ij}(L) = |R_{ij}(L)|^2$ , и индикаторную функцию

$$\varphi_L(W_{11}, W_{22}, W_{12}) = \delta(W_{11}(L) - W_{11})\delta(W_{22}(L) - W_{22})\delta(W_{12}(L) - W_{12}),$$

удовлетворяющую соответствующему уравнению Лиувилля. Будем считать, что случайная функция  $\varepsilon(x)$  — однородный гауссов случайный процесс с нулевым средним значением и корреляционной, а также спектральной функциями

$$B_{\tilde{\varepsilon}}(\xi) = \langle \tilde{\varepsilon}(x)\tilde{\varepsilon}(x') \rangle, \quad \Phi_{\tilde{\varepsilon}}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi B_{\tilde{\varepsilon}}(\xi)e^{iq\xi}, \quad \xi = x - x', \quad (6.14)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}(L) = \frac{k}{2\lambda}\varepsilon(L).$$

Усредняя уравнение Лиувилля для функции  $\varphi_L(W_{11}, W_{22}, W_{12})$  по ансамблю реализаций случайного процесса  $\varepsilon(L)$ , в диффузионном приближении можно получить уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятностей

$$P(L, W_{11}, W_{22}, W_{12}) = \langle \varphi_L(W_{11}, W_{22}, W_{12}) \rangle$$

вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(L, W_{11}, W_{22}, W_{12}) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial W_{11}} [-D_1(1 - W_{11})^2 - 4\delta^2 D_4 W_{12} + \right. \\ &+ 2\delta(D_3 + D_4)W_{11} - \delta^2 D_2 W_{12}^2 - 4\delta^2 D_3 W_{11} W_{12}] + \frac{\partial}{\partial W_{22}} [-D_2(1 - W_{22})^2 - \\ &- 4\delta^2 D_4 W_{12} + 2\delta(D_3 + D_4)W_{22} - \delta^2 D_1 W_{12}^2 - 4\delta^2 D_3 W_{22} W_{12}] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial W_{12}} [(D_1(1 - W_{11}) + D_2(1 - W_{22}) + 2\delta(D_3 + 2D_4) - \delta^2 D_3 W_{12}) W_{12} - \\ &\left. - D_3(1 + W_{11} W_{22}) - D_4(W_{11} + W_{22})] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2}{\partial W_{11}^2} W_{11} \left[ D_1(1 - W_{11})^2 + 4\delta^2 D_4 W_{12} + 4\delta^2 D_3 W_{11} W_{12} + \delta^2 D_2 W_{12}^2 \right] + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial W_{22}^2} W_{22} \left[ D_2(1 - W_{22})^2 + 4\delta^2 D_4 W_{12} + 4\delta^2 D_3 W_{22} W_{12} + \delta^2 D_1 W_{12}^2 \right] + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial W_{12}^2} W_{12} [W_{12}(D_1 W_{11} + D_2 W_{22} + \delta^2 D_3 W_{12} - 2\delta D_3) + D_3(1 + W_{11} W_{22}) + \\
& \quad + D_4(W_{11} + W_{22})] + 8\delta^2 D_3 \frac{\partial^2}{\partial W_{11} \partial W_{22}} W_{22} W_{11} W_{12} - \\
& - 2 \frac{\partial^2}{\partial W_{11} \partial W_{12}} W_{11} W_{12} \left[ D_1(1 - W_{11}) + 2\delta(D_3 + D_4) - 2\delta^2 D_2 W_{12} \right] - \\
& - 2 \frac{\partial^2}{\partial W_{22} \partial W_{12}} W_{22} W_{12} [D_2(1 - W_{22}) + 2\delta(D_3 + D_4) - 2\delta^2 D_2 W_{12}] \left\} \times \right. \\
& \quad \left. \times P(L, W_{11}, W_{22}, W_{12}), \quad (6.15)
\end{aligned}$$

где введены коэффициенты диффузии

$$\begin{aligned}
D_1 &= 2\tilde{\alpha}_2^2 \int_0^\infty d\xi B_{\tilde{\varepsilon}}(\xi) \cos(2\lambda k \xi), & D_2 &= 2(\lambda \tilde{\alpha}_1)^2 \int_0^\infty d\xi B_{\tilde{\varepsilon}}(\xi) \cos(2k \xi), \\
D_3 &= 2 \int_0^\infty d\xi B_{\tilde{\varepsilon}}(\xi) \cos[k(1 + \lambda)\xi], & D_4 &= 2 \int_0^\infty d\xi B_{\tilde{\varepsilon}}(\xi) \cos[k(1 - \lambda)\xi],
\end{aligned}$$

которые можно выразить через спектральную функцию случайного процесса  $\tilde{\varepsilon}(x)$ , согласно (6.14), в виде

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left( \frac{k}{2\lambda} \frac{H_1}{H_0} \right)^2 \Phi_{\tilde{\varepsilon}}(2\lambda k), & D_2 &= \left( \frac{k}{2} \frac{H_2}{H_0} \right)^2 \Phi_{\tilde{\varepsilon}}(2k), \\
D_3 &= \left( \frac{k}{2\lambda} \right)^2 \Phi_{\tilde{\varepsilon}}(k(1 + \lambda)), & D_4 &= \left( \frac{k}{2\lambda} \right)^2 \Phi_{\tilde{\varepsilon}}(k(1 - \lambda)).
\end{aligned} \quad (6.16)$$

При выводе уравнения (6.15) использовалось также дополнительное усреднение по быстроменяющимся функциям (что можно делать при выполнении условий  $k\lambda \gg D_i$ ). Диффузионное приближение применимо при условии  $Dl_0 \ll 1$ .

Для мелкомасштабных неоднородностей среды ( $kl_0 \ll 1$ ) все коэффициенты диффузии выражаются через один —  $D$ , а именно:

$$D_1 = \left( \frac{1}{\lambda} \frac{H_1}{H_0} \right)^2 D, \quad D_2 = \left( \frac{H_2}{H_0} \right)^2 D, \quad D_3 = D_4 = \frac{1}{\lambda^2} D, \quad (6.17)$$

где

$$D = \frac{k^2}{4} \Phi_{\tilde{\varepsilon}}(0). \quad (6.18)$$

Отметим, что в случае однослойной модели среды коэффициент отражения  $R_L$  описывается уравнением Риккати (1.11) на с. 11, которому соответствует уравнение Фоккера–Планка (2.6) на с. 18 (при отсутствии затухания)

$$\frac{\partial}{\partial L} P(L, W) = D \left\{ -\frac{\partial}{\partial W} (1 - W)^2 + \frac{\partial^2}{\partial W^2} W(1 - W)^2 \right\} P(L, W) \quad (6.19)$$

с коэффициентом диффузии для мелкомасштабных флуктуаций неоднородностей среды (6.18).

Как упоминалось выше, в рассматриваемой двухслойной задаче существует параметр  $\delta$ , малость которого можно использовать для упрощения анализа. Пренебрегаем в уравнении для плотностей вероятностей (6.15) слагаемыми второго порядка по  $\delta$ , т. е. эффектами вторичного переизлучения волн. В этом приближении величины  $W_{11}$  и  $W_{22}$  статистически независимы и их плотности вероятностей  $P(L, W_{11})$  и  $P(L, W_{22})$  описываются уравнениями

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial L} P(L, W_{11}) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial W_{11}} \left[ -D_1(1 - W_{11})^2 + 2\delta(D_3 + D_4)W_{11} \right] + \right. \\
& \quad \left. + D_1 \frac{\partial^2}{\partial W_{11}^2} (1 - W_{11})^2 W_{11} \right\} P(L, W_{11}), \\
\frac{\partial}{\partial L} P(L, W_{22}) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial W_{22}} \left[ -D_2(1 - W_{22})^2 + 2\delta(D_3 + D_4)W_{22} \right] + \right. \\
& \quad \left. + D_2 \frac{\partial^2}{\partial W_{22}^2} (1 - W_{22})^2 W_{22} \right\} P(L, W_{22}), \quad (6.20)
\end{aligned}$$

которые отличаются от уравнения (6.19) для однослойной модели наличием члена

$$2\delta(D_3 + D_4) \frac{\partial}{\partial W} [WP(L, W)].$$

Это означает, что процесс генерации  $\lambda$ - или  $k$ -волны падающей  $k$ - или  $\lambda$ -волной статистически эквивалентен включению «затухания» в исходную стохастическую задачу для падающих волн  $U_{11}, U_{22}$  (т. е. замене в уравнениях для этих волн  $\varepsilon(x) \rightarrow \varepsilon(x) + i\delta(D_3 + D_4)$ ). При этом для полупространства ( $L_0 \rightarrow -\infty$ ) существуют «стационарные» (не зависящие от  $L$ ) решения уравнений (6.20) вида (2.28) на с. 25:

$$P(W_{11}) = \frac{2\gamma_1}{(1 - W_{11})^2} \exp \left\{ -\frac{2\gamma_1 W_{11}}{1 - W_{11}} \right\}, \quad P(W_{22}) = \frac{2\gamma_2}{(1 - W_{22})^2} \exp \left\{ -\frac{2\gamma_2 W_{22}}{1 - W_{22}} \right\}, \quad (6.21)$$

где параметры

$$\gamma_1 = \delta \frac{D_3 + D_4}{D_1}, \quad \gamma_2 = \delta \frac{D_3 + D_4}{D_2} \quad (6.22)$$

определяют относительную роль такого «затухания» (т. е. генерации вторичных волн) по сравнению с непосредственной диффузией этих волн (т. е. многократным переотражением этих волн на неоднородностях среды). Для мелкомасштабных неоднородностей среды параметры «затухания»

$$\gamma_1 = 2\lambda \frac{H_2}{H_1}, \quad \gamma_2 = \frac{2}{\lambda} \frac{H_1}{H_2} \quad (6.23)$$

определяются только относительными толщинами слоев (для фиксированной длины  $\lambda$ -волны) и не зависят от статистических характеристик неоднородностей. При этом имеет место равенство  $\gamma_1 \gamma_2 = 4$ , т. е. малость одного из параметров  $\gamma$  по сравнению с единицей означает большое значение для другого параметра.

Распределения вероятностей (6.21) позволяют вычислить статистические характеристики коэффициентов отражения для падающих волн. В частности, при  $\gamma_i \ll 1$  имеем

$$\langle W_{11} \rangle \approx 1 - 2\gamma_1 \ln(1/\gamma_1), \quad \langle W_{22} \rangle \approx 1 - 2\gamma_2 \ln(1/\gamma_2). \quad (6.24)$$



В обратных предельных случаях  $\gamma_i \gg 1$  получаем соответственно

$$\langle W_{11} \rangle \approx \frac{1}{2\gamma_1}, \quad \langle W_{22} \rangle \approx \frac{1}{2\gamma_2}. \quad (6.25)$$

Из сказанного выше ясно, что для достаточно большой области  $(L_0, L)$  (или предельного случая полупространства  $L_0 \rightarrow -\infty$ ) величины  $|T_{11}|^2$  и  $|T_{22}|^2$  равны нулю с вероятностью единица, т. е. падающие  $\lambda$ - и  $k$ -волны локализованы, и их локализационные длины определяются либо коэффициентами диффузии, если диффузия действует существенно сильнее, чем «затухание», либо «затуханием» — в противоположном случае. Так, если  $\gamma_1 \ll 1$  ( $\gamma_2 \gg 1$ ), то

$$l_{\text{loc}}^{(1)} = \frac{1}{D_1} = \left( \frac{\lambda H_0}{H_1} \right)^2 l_{\text{loc}}, \quad l_{\text{loc}}^{(2)} = \frac{1}{2\delta(D_3 + D_4)} = \frac{\lambda H_0}{4H_1 H_2} l_{\text{loc}},$$

где  $l_{\text{loc}} = 1/D$  — локализационная длина в однослойной задаче. В случае выполнения обратного неравенства  $\gamma_2 \ll 1$  ( $\gamma_1 \gg 1$ ) имеем

$$l_{\text{loc}}^{(1)} = \frac{1}{2\delta(D_3 + D_4)} = \frac{\lambda H_0}{4H_1 H_2} l_{\text{loc}}, \quad l_{\text{loc}}^{(2)} = \frac{1}{D_2} = \left( \frac{H_0}{H_2} \right)^2 l_{\text{loc}}.$$

Нахождение статистики  $W_{12}$  — существенно более сложная задача, так как она обусловлена корреляцией  $W_{12}$  с  $W_{11}$ ,  $W_{22}$ .

Чтобы оценить средние значения коэффициентов прохождения возбуждаемых волн, воспользуемся равенствами (6.11), которые запишем в виде

$$\begin{aligned} 1 - \langle W_{11} \rangle - \delta \langle W_{12} \rangle &= \delta \langle |\tilde{T}_{21}|^2 \rangle, \\ 1 - \langle W_{22} \rangle - \delta \langle W_{12} \rangle &= \delta \langle |T_{21}|^2 \rangle. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Из уравнения Фоккера–Планка (6.15) видно, что для комбинаций

$$T_1 = 1 - W_{11} - \delta W_{12} \quad \text{и} \quad T_2 = 1 - W_{22} - \delta W_{12},$$

определяющих коэффициенты прохождения возбуждаемых волн, для полупространства, в отличие от однослойной среды, стационарные решения вида  $P(T_i) = \delta(T_i)$  отсутствуют. Это означает отсутствие локализации для генерируемых волн [20].

Поскольку уравнение (6.15) симметрично по индексам 1 и 2, среднее значение  $\langle W_{12} \rangle$  также должно быть симметрично по этим индексам и, следовательно, с точностью до симметричных частей порядок величин  $\langle |T_{ij}|^2 \rangle$ , по крайней мере, должен определяться порядком несимметричных частей равенств (6.24).

Так, для асимптотического случая  $\gamma_1 \ll 1$  ( $\gamma_2 \gg 1$ ) равенства (6.26), в силу (6.24) и (6.25), принимают вид

$$\begin{aligned} 2\gamma_1 \ln(1/\gamma_1) &= \delta \langle W_{12} \rangle + \delta \langle |\tilde{T}_{21}|^2 \rangle, \\ 1 - \frac{1}{2\gamma_2} &= \delta \langle W_{12} \rangle + \delta \langle |T_{12}|^2 \rangle, \end{aligned}$$

т. е.

$$\langle |\tilde{T}_{21}|^2 \rangle \sim \frac{2}{\delta} \gamma_1 \ln(1/\gamma_1), \quad \langle |T_{12}|^2 \rangle \sim \frac{1}{\delta}. \quad (6.27)$$

Аналогичным образом для противоположного асимптотического случая  $\gamma_2 \ll 1$  ( $\gamma_1 \gg 1$ ) получаем оценку

$$\langle |\tilde{T}_{21}|^2 \rangle \sim \frac{1}{\delta}, \quad \langle |T_{12}|^2 \rangle \sim \frac{2}{\delta} \gamma_2 \ln(1/\gamma_2). \quad (6.28)$$

Возвращаясь к первоначальной постановке задачи об источниках, расположенных в верхнем и нижнем слоях среды (на границе области существования неоднородностей  $x_0 = L$ ), находим, что коэффициенты прохождения для волн, генерируемых источниками как в верхнем, так и нижнем слоях среды, отличны от нуля во всей среде, т. е. локализация волн не осуществляется. Конкретные же их значения определяются как отношением толщин слоев, так и параметром  $\lambda$ .

**Замечание 6.1.** Локализация волн Россби под влиянием случайной цилиндрической топографии подстилающей поверхности

Неоднородности формы дна, так же как и  $\beta$ -эффект, играют важную роль в распространении крупномасштабных низкочастотных колебаний в атмосфере Земли и океане (волны Россби). Влияние топографии на распространение таких волн зависит, в основном, от соотношения между длиной волны  $l$  и горизонтальным масштабом топографических неоднородностей  $l_h$  [136]. В практически важном случае  $l \gg l_h$  такие неоднородности топографии могут поддерживать распространение крупномасштабных волн даже в отсутствие  $\beta$ -эффекта, что можно использовать для лабораторного моделирования процессов генерации и распространения волн Россби [34, 106].

Имеется много исследований, в которых неоднородности топографии рассматривались на классах периодических или квазипериодических функций, а также суперпозиции фурье-мод (для двухслойной модели среды, см., например, [72]). В действительности, неоднородности топографии в высшей степени нерегулярны и, по сути дела, могут рассматриваться как конкретные реализации большого ансамбля случайных полей с заданными статистическими характеристиками. Это позволяет использовать для анализа таких движений, и, в частности, распространения волн Россби в отсутствие зонального потока, аппарат теории случайных процессов и полей [109, 138, 144], что существенно упрощает математический анализ. Однако учитывая, что в реальности отсутствует ансамбль и исследователи имеют дело все-таки с отдельными реализациями, окончательные выводы необходимо формулировать в виде, пригодном для анализа реальных ситуаций.

Крупномасштабные низкочастотные движения в двухслойной среде (атмосфере, океане) переменной глубины в рамках квазигеострофической модели описываются линеаризованными уравнениями (6.1) на с. 89, которые для функций  $\psi_1(x, y)$ ,  $\psi_2(x, y)$  вида

$$\psi_1(x, y) = \psi_1(y) e^{-i(\omega t + \kappa x)}, \quad \psi_2(x, y) = \psi_2(y) e^{-i(\omega t + \kappa x)},$$

соответствующего распространяющейся на запад волне, при  $\kappa > 0$ ,  $\omega > 0$  принимают вид системы уравнений (6.1) с параметрами

$$k^2 = \kappa \left( \frac{\beta}{\omega} - \kappa \right), \quad \varepsilon(y) = \frac{\kappa f_0}{H_2 \omega k^2} \frac{d}{dy} h(y).$$

Величина  $k^2$  (при условии  $k^2 > 0$ ) соответствует квадрату  $y$ -компоненты волнового вектора распространяющейся баротропной моды волны Россби с фиксированными  $\kappa$  и  $\omega$ . Особенностью такой задачи является то, что в систему входит не сама топография, а ее пространственная производная.

Следовательно, результаты приведенного выше анализа волн в двухслойной среде позволяют изучить и задачу о локализации волн Россби под влиянием случайной цилиндрической топографии подстилающей поверхности [21, 113]. ♦

## ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение А

### МЕТОД ПОГРУЖЕНИЯ В КРАЕВЫХ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ (ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ АСПЕКТЫ)

#### А.1. Общие замечания

Общую идею метода погружения можно, следуя работе [99], проиллюстрировать на примере динамической системы, описываемой системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)), \quad (\text{A.1})$$

определенных на отрезке  $t \in [0, T]$  с краевыми условиями

$$g\mathbf{x}(0) + h\mathbf{x}(T) = \mathbf{v}, \quad (\text{A.2})$$

где  $g$  и  $h$  постоянные матрицы.

Для динамической задачи (A.1), (A.2) не выполняется условие динамической причинности, т. е. решение этой задачи  $\mathbf{x}(t)$  в момент времени  $t$  функционально зависит от внешних сил  $\mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}(\tau))$  для всех  $0 \leq \tau \leq T$ . Более того, даже краевые значения  $\mathbf{x}(0)$ ,  $\mathbf{x}(T)$  являются функционалами поля  $\mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}(\tau))$ . Отсутствие динамической причинности в (A.1), (A.2) не позволяет применить известные статистические методы для анализа статистических характеристик решения уравнения (A.1), если  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$  — случайное пространственно-временное поле. Если ввести одновременную плотность вероятностей для решения уравнения (A.1)  $P(t, \mathbf{x})$ , то в силу условия (A.2) она не будет определена ни в одной точке. Краевое условие налагает на нее только определенное функциональное ограничение.

Заметим, что решение задачи (A.1), (A.2) параметрически зависит от  $T$  и  $\mathbf{v}$ , т. е.  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, T, \mathbf{v})$ . Введем функции

$$\mathbf{R}(T, \mathbf{v}) = \mathbf{x}(T, T, \mathbf{v}), \quad \mathbf{S}(T, \mathbf{v}) = \mathbf{x}(0, T, \mathbf{v}),$$

описывающие краевые значения решения уравнения (A.1).

Продифференцируем теперь уравнение (A.1) по  $T$  и  $\mathbf{v}$ . Получаем два линейных уравнения для соответствующих производных:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i(t, T, \mathbf{v})}{\partial T} &= \frac{\partial F_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial x_l(t, T, \mathbf{v})}{\partial T}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i(t, T, \mathbf{v})}{\partial v_k} &= \frac{\partial F_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial x_l(t, T, \mathbf{v})}{\partial v_k}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Эти уравнения имеют одинаковую структуру, и, следовательно, можно ожидать, что их решения связаны линейным равенством

$$\frac{\partial x_i(t, T, \mathbf{v})}{\partial T} = \lambda_k(t, T, \mathbf{v}) \frac{\partial x_i(t, T, \mathbf{v})}{\partial v_k}, \quad (\text{A.4})$$

если векторная величина  $\lambda(T, \mathbf{v})$  такова, что выполняются краевые условия (A.2) и решение задачи единственное. Для нахождения  $\lambda(T, \mathbf{v})$  положим сперва в (A.4)  $t = 0$  и умножим на матрицу  $g$ ; положим затем  $t = T$  и умножим на матрицу  $h$ ; сложим получившиеся равенства. С учетом (A.2) получаем

$$g \frac{\partial \mathbf{x}(0, T, \mathbf{v})}{\partial T} + h \frac{\partial \mathbf{x}(T, T, \mathbf{v})}{\partial T} \Big|_{t=T} = \lambda(T, \mathbf{v}).$$

Ввиду того что (с учетом уравнения (A.1))

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t, T, \mathbf{v})}{\partial T} \Big|_{t=T} = \frac{\partial \mathbf{x}(T, T, \mathbf{v})}{\partial T} - \frac{\partial \mathbf{x}(t, T, \mathbf{v})}{\partial t} \Big|_{t=T} = \frac{\partial \mathbf{R}(T, \mathbf{v})}{\partial T} - \mathbf{F}(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})),$$

для величины  $\lambda(T, \mathbf{v})$  получаем окончательное выражение

$$\lambda(T, \mathbf{v}) = -h\mathbf{F}(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})). \quad (\text{A.5})$$

Равенство (A.4) с параметром  $\lambda(T, \mathbf{v})$ , определенным согласно (A.5), т. е.

$$\frac{\partial x_i(t, T, \mathbf{v})}{\partial T} = -h_{kl} F_l(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})) \frac{\partial x_i(t, T, \mathbf{v})}{\partial v_k}, \quad (\text{A.6})$$

можно рассматривать как линейное дифференциальное уравнение, если дополнить его соответствующим начальным условием

$$\mathbf{x}(t, T, \mathbf{v}) \Big|_{T=t} = \mathbf{R}(t, \mathbf{v})$$

и считать функцию  $\mathbf{R}(T, \mathbf{v})$  известной.

Уравнение для нее можно получить, используя равенство

$$\frac{\partial \mathbf{R}(T, \mathbf{v})}{\partial T} = \frac{\partial \mathbf{x}(t, T, \mathbf{v})}{\partial t} \Big|_{t=T} + \frac{\partial \mathbf{x}(t, T, \mathbf{v})}{\partial T} \Big|_{t=T}. \quad (\text{A.7})$$

Правая часть (A.7) определяется правыми частями (A.1) и (A.4) при  $t = T$ . В результате получаем замкнутое нелинейное (квазилинейное) уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{R}(T, \mathbf{v})}{\partial T} = -h_{kl} F_l(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})) \frac{\partial \mathbf{R}(T, \mathbf{v})}{\partial v_k} + \mathbf{F}(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})). \quad (\text{A.8})$$

Начальное условие для (A.8) вытекает из (A.2) при  $T \rightarrow 0$ :

$$\mathbf{R}(T, \mathbf{v}) \Big|_{T=0} = (g + h)^{-1} \mathbf{v}. \quad (\text{A.9})$$

Полагая теперь в (A.3)  $t = 0$ , получаем уравнение для второй краевой величины  $\mathbf{S}(T, \mathbf{v}) = \mathbf{x}(0, T, \mathbf{v})$  вида

$$\frac{\partial \mathbf{S}(T, \mathbf{v})}{\partial T} = -h_{kl} F_l(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})) \frac{\partial \mathbf{S}(T, \mathbf{v})}{\partial v_k} \quad (\text{A.10})$$

с начальным условием, вытекающим из (A.9):

$$\mathbf{S}(T, \mathbf{v}) \Big|_{T=0} = (g + h)^{-1} \mathbf{v}.$$

Таким образом, наша задача свелась к квазилинейному уравнению (А.8) с начальным условием (А.9) и к линейному уравнению (А.4), начальное условие и коэффициенты которого определяются решением уравнения (А.8).

Для рассматриваемой задачи «вход» 0 и «выход»  $T$  симметричны. Поэтому к решению краевой задачи можно подходить не только со стороны  $T \rightarrow 0$ , но и наоборот, со стороны  $0 \rightarrow T$ . При этом функции  $\mathbf{R}(T, \mathbf{v})$  и  $\mathbf{S}(T, \mathbf{v})$  как бы меняются местами.

Отметим еще одно важное обстоятельство: уравнение (А.4) является линейным в силу того, что это, по сути дела, уравнение для вариаций, несмотря на то что исходная задача (А.1) нелинейная. За нелинейность задачи отвечает уравнение (А.8).

Отметим, что рассматриваемый метод вывода уравнений метода погружения для уравнения (А.1) легко обобщается на краевое условие [99]

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(0)) + \mathbf{h}(\mathbf{x}(T)) + \int_0^T d\tau \mathbf{K}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) = \mathbf{v},$$

где  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{K}(T, \mathbf{x})$  — произвольные заданные векторные функции.

Если функция  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$  линейна по  $\mathbf{x}$ , т. е.  $F_i(t, \mathbf{x}) = A_{ij}(t)x_j(t)$ , то краевая задача (А.1), (А.2)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{g}\mathbf{x}(0) + \mathbf{h}\mathbf{x}(T) = \mathbf{v}$$

упрощается и решения уравнений (А.4), (А.8) и (А.10) также будут линейными функциями по  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{x}(t, T, \mathbf{v}) = X(t, T)\mathbf{v}. \quad (\text{А.11})$$

В результате приходим к замкнутому матричному уравнению Риккати для матрицы  $R(T) = X(T, T)$ :

$$\frac{d}{dT}R(T) = A(T)R(T) - R(T)hA(T)R(T), \quad R(0) = (g + h)^{-1}. \quad (\text{А.12})$$

Для матрицы же  $X(t, T)$  получаем линейное матричное уравнение с начальным условием

$$\frac{\partial}{\partial T}X(t, T) = -X(t, T)hA(T)R(T), \quad X(t, T)|_{T=t} = R(t). \quad (\text{А.13})$$

Отметим, что выбор параметров погружения, как и вывод основных уравнений метода погружения, в общем случае, неединствен. Тем не менее все такие уравнения, несмотря на различный вид и структуру, эквивалентны исходной краевой задаче. И конкретный выбор параметра погружения и соответствующих уравнений метода определяется удобством для конкретных исследований.

Рассмотрим теперь различные краевые волновые задачи, получим для них и проанализируем уравнения погружения с начальными условиями.

## А.2. Стационарные краевые волновые задачи

Непосредственный интерес для физических приложений представляют линейные волновые задачи, описывающие распространение акустических и электромагнитных волн в слоисто-неоднородных средах, и их обобщения как на многомерный, так и на нелинейный случаи. В простейшей постановке задачи исходными уравнениями являются одномерное уравнение Гельмгольца, описывающее падение плоской волны на слой среды, и уравнение для функции Грина уравнения Гельмгольца, описывающее процесс генерации плоских волн точечным источником.

### А.2.1. Одномерные стационарные краевые волновые задачи

#### Уравнение Гельмгольца с несогласованной границей

Рассмотрим одномерную краевую стационарную волновую задачу

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2(x)\right)u(x) &= 0, \\ \left(\frac{d}{dx} + ik_1\right)u(x)\Big|_{x=L_0} &= 0, \quad \left(\frac{d}{dx} - ik_0\right)u(x)\Big|_{x=L} = -2ik_0, \end{aligned} \quad (\text{А.14})$$

описывающую падение плоской волны  $u(x) = e^{-ik_0(x-L)}$  из однородного полупространства  $x > L$  с волновым параметром  $k_0 \neq k(L)$  на слой неоднородной среды  $L_0 < x < L$ . Полупространство  $x < L_0$  также предполагается однородным, описываемым волновым параметром  $k_1$ . Отметим, что краевая задача (А.14) описывает пространственную структуру монохроматической волны, пропорциональной  $e^{-i\omega t}$ , в неоднородной среде и при этом  $k(x) = \omega/c(x)$ , где  $c(x)$  — скорость распространения волны в среде.

Представим функцию  $k^2(x)$  в виде

$$k^2(x) = k_0^2[1 + \varepsilon(x)],$$

где функция  $\varepsilon(x)$  описывает неоднородности среды (т. е. неоднородность скорости распространения волны в среде, неоднородность показателя преломления или неоднородность диэлектрической проницаемости). В общем случае функция  $\varepsilon(x)$  — комплексная функция  $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + i\gamma$ , где параметр  $\gamma$  описывает поглощение волны в среде. Тогда краевая задача (А.14) запишется в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + k_0^2[1 + \varepsilon(x)]\right)u(x) &= 0, \\ \left(\frac{d}{dx} + ik_1\right)u(x)\Big|_{x=L_0} &= 0, \quad \left(\frac{d}{dx} - ik_0\right)u(x)\Big|_{x=L} = -2ik_0. \end{aligned} \quad (\text{А.15})$$

Для рассматриваемого случая границы  $x = L$  отражение волны осуществляется не только из-за неоднородностей среды внутри слоя, но также и из-за разрыва функции  $k(x)$  на этой границе. Поэтому краевую задачу (А.14) будем называть задачей с *несогласованной границей*  $x = L$ .

Значения поля на границах слоя определяют коэффициент отражения волны от слоя среды  $R_L = u(L) - 1$  и коэффициент прохождения волны  $T_L = u(L_0)$ .

**Замечание А.1.** Структура решения задачи для однородной среды

Рассмотрим структуру решения краевой задачи (А.14) для однородной среды, когда  $k(x) \equiv k = \text{const}$ . Рассмотрим двухслойный ( $k_1 = k$ ) и трехслойный ( $k_1 \neq k$ ) случаи. Для двухслойной задачи решение краевой задачи (А.14), очевидно, имеет вид  $u(x) = (1 + R_0)e^{-ik(x-L)}$ , где коэффициент отражения определяется равенством

$$R_0 = \frac{k_0 - k}{k_0 + k}. \quad (\text{А.16})$$

Для трехслойной задачи решение краевой задачи (А.14) имеет вид

$$u(x) = (1 + R_0) \frac{\exp(ik(L-x)) + R_1 \exp(-ik(L-x) + 2ik(L-L_0))}{1 + R_0 R_1 \exp(2ik(L-L_0))}, \quad (\text{А.17})$$

где

$$R_1 = \frac{k - k_1}{k + k_1}. \quad (\text{A.18})$$

Следовательно, в этом случае поле на границе слоя и коэффициент прохождения описываются выражениями

$$\begin{aligned} u(L) &= 1 + R_L = (1 + R_0) \frac{1 + R_1 \exp(2ik(L - L_0))}{1 + R_0 R_1 \exp(2ik(L - L_0))}, \\ T_L &= (1 + R_0)(1 + R_1) \frac{\exp(ik(L - L_0))}{1 + R_0 R_1 \exp(2ik(L - L_0))}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

◆

Перепишем теперь краевую задачу (A.15) для функций  $u(x) = u(x, L)$  и  $v(x, L) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, L)$  в виде краевой системы уравнений:

$$\frac{d}{dx} u(x, L) = v(x, L), \quad \frac{d}{dx} v(x, L) = -k_0^2 [1 + \varepsilon(x)] u(x, L), \quad (\text{A.20})$$

$$v(L_0, L) + ik_1 u(L_0, L) = 0, \quad v(L, L) - ik_0 u(L, L) = -2ik_0,$$

где мы включили параметр  $L$  в качестве новой переменной, следуя идеологии метода погружения.

Для большей наглядности кратко повторим вывод уравнений метода погружения для задачи (A.20). Рассматривая решение этой задачи как функцию параметра  $L$ , для производных по этому параметру получаем краевую задачу

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial u(x, L)}{\partial L} = \frac{\partial v(x, L)}{\partial L}, \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial v(x, L)}{\partial L} = -k_0^2 [1 + \varepsilon(x)] \frac{\partial u(x, L)}{\partial L},$$

$$\frac{\partial v(L_0, L)}{\partial L} + ik_1 \frac{\partial u(L_0, L)}{\partial L} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, L)}{\partial L} \Big|_{x=L} - ik_0 \frac{\partial u(x, L)}{\partial L} \Big|_{x=L} &= - \frac{\partial v(x, L)}{\partial x} \Big|_{x=L} + ik_0 \frac{\partial u(x, L)}{\partial x} \Big|_{x=L} = \\ &= 2k_0^2 + k_0^2 \varepsilon(L) u(L, L). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Сопоставляя теперь краевую задачу (A.21) с краевой задачей (A.20), получаем уравнения погружения в виде

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x, L) = ik_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) u(L, L) \right\} u(x, L), \quad u(x, L)|_{L=x} = u(x, x),$$

$$\frac{\partial}{\partial L} v(x, L) = ik_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) u(L, L) \right\} v(x, L), \quad (\text{A.22})$$

$$v(x, L)|_{L=x} = -ik_0 [2 - u(x, x)],$$

и, следовательно,

$$v(x, L) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, L) = -ik_0 \frac{2 - u(x, x)}{u(x, x)} u(x, L). \quad (\text{A.23})$$

Для функция  $u(L, L)$  имеем равенство

$$\frac{d}{dL} u(L, L) = \frac{\partial u(x, L)}{\partial x} \Big|_{x=L} + \frac{\partial u(x, L)}{\partial L} \Big|_{x=L},$$

и с учетом уравнений (A.20) и (A.22) получаем уравнение Риккати

$$\frac{d}{dL} u(L, L) = 2ik_0 [u(L, L) - 1] + i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) u^2(L, L), \quad (\text{A.24})$$

с начальным условием

$$u(L, L) \Big|_{L=L_0} = \frac{2k_0}{k_0 + k_1}.$$

Вводя теперь коэффициент отражения  $R_L = u(L, L) - 1$ , уравнения (A.22), (A.24) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x, L) = ik_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L) \right\} u(x, L), \quad u(x, L) \Big|_{L=x} = 1 + R_x, \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{d}{dL} R_L = 2ik_0 R_L + i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L)^2, \quad R_{L_0} = \frac{k_0 - k_1}{k_0 + k_1},$$

а равенство (A.23) переходит в формулу

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + ik_0 \frac{1 - R_x}{1 + R_x} \right) u(x, L) = 0,$$

обобщающую краевые условия в (A.15) на произвольную точку  $x$  внутри слоя.

Отметим, что начальное условие в (A.25) для коэффициента отражения соответствует решению двухслойной задачи (см. замечание A.1. на с. 103).

Волновой параметр  $k_1$  в краевой задаче (A.15) и, следовательно, в уравнениях (A.25) описывает отражающие свойства полупространства  $x < L_0$ . Если  $k_1 = k_0$ , то начальное условие к уравнению Риккати (A.24) будет  $R_{L_0} = 0$  и границу  $x = L_0$  будем называть свободно пропускающей границей. Предельные переходы по  $k_1$  позволяют описывать случай отражающих границ. Так, случаю  $k_1 \rightarrow 0$  соответствует отражающая граница  $x = L_0$ , на которой  $\frac{d}{dx} u(x) \Big|_{x=L_0} = 0$ , и в этом случае  $R_{L_0} = 1$ . Другому предельному случаю  $k_1 \rightarrow \infty$  соответствует отражающая граница  $x = L_0$ , на которой  $u(x) \Big|_{x=L_0} = 0$ , и в этом случае  $R_{L_0} = -1$ .

Отметим, что, зная функциональную зависимость коэффициента отражения  $R_L$  от функции  $\varepsilon(x)$ , можно определить и саму структуру волнового поля. Действительно, вариационная производная  $\frac{\delta R_L}{\delta \varepsilon(x)}$  удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{d}{dL} \frac{\delta R_L}{\delta \varepsilon(x)} = 2ik_0 \frac{\delta R_L}{\delta \varepsilon(x)} + ik_0 \varepsilon(L) (1 + R_L) \frac{\delta R_L}{\delta \varepsilon(x)},$$

$$\frac{\delta R_L}{\delta \varepsilon(x)} \Big|_{L=x} = i \frac{k_0}{2} (1 + R_x)^2,$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta R_L}{\delta \varepsilon(x)} = i \frac{k_0}{2} u^2(x, L).$$

Рассмотрим теперь задачу о поле точечного источника, находящегося внутри слоя среды в точке  $x_0$ . Эта задача также является краевой и описывается уравнением

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + k_0^2 [1 + \varepsilon(x)] \right) G(x, x_0) = 2ik_0 \delta(x - x_0), \quad (\text{A.26})$$

$$\left( \frac{d}{dx} + ik_1 \right) G(x, x_0) \Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left( \frac{d}{dx} - ik_0 \right) G(x, x_0) \Big|_{x=L} = 0.$$

Коэффициент  $2ik_0$  при дельта-функции в правой части (A.26) написан для того, чтобы при положении источника на границе  $x_0 = L$  решение задачи (A.26) переходило бы в решение задачи (A.15), т. е.

$$G(x, L) = u(x, L).$$

В самом деле, функция  $G(x, x_0)$  непрерывна в каждой точке  $x$ , а ее производная по  $x$  имеет скачок в точке расположения источника:

$$\frac{d}{dx} G(x, x_0) \Big|_{x=x_0+0} - \frac{d}{dx} G(x, x_0) \Big|_{x=x_0-0} = 2ik_0.$$

Полагая теперь в (A.26)  $x_0 = L$  и используя условие скачка производной, мы приходим к краевой задаче (A.15).

Перепишем краевую задачу (A.26) в виде системы уравнений, аналогичной системе (A.20):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} G(x, x_0, L) &= V(x, x_0, L), \\ \frac{d}{dx} V(x, x_0, L) &= -k_0^2 [1 + \varepsilon(x)] G(x, x_0, L) + 2ik_0 \delta(x - x_0), \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$V(L_0, x_0, L) + ik_1 G(L_0, x_0, L) = 0, \quad V(L, x_0, L) - ik_0 G(L, x_0, L) = 0.$$

В (A.27) мы включили зависимость решения краевой задачи (A.26) от параметра  $L$ .

Продифференцируем систему (A.27) по  $L$ . В результате для производных получаем краевую задачу

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial G(x, x_0, L)}{\partial L} = \frac{\partial V(x, x_0, L)}{\partial L},$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial V(x, x_0, L)}{\partial L} = -k_0^2 [1 + \varepsilon(x)] \frac{\partial G(x, x_0, L)}{\partial L},$$

$$\frac{\partial V(L_0, x_0, L)}{\partial L} + ik_1 \frac{\partial G(L_0, x_0, L)}{\partial L} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x, x_0, L)}{\partial L} \Big|_{x=L} - ik_0 \frac{\partial G(x, x_0, L)}{\partial L} \Big|_{x=L} &= \\ = - \frac{\partial V(x, x_0, L)}{\partial x} \Big|_{x=L} + ik_0 \frac{\partial G(x, x_0, L)}{\partial x} \Big|_{x=L} &= k_0^2 \varepsilon(L) G(L, x_0, L), \end{aligned}$$

сопоставление которой с краевой с задачей (A.20) дает равенство

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x, x_0, L) = i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) G(L, x_0, L) u(x, L), \quad (\text{A.28})$$

которое можно рассматривать как уравнение погружения по переменной  $L$ , если дополнить его начальным условием непрерывности

$$G(x, x_0, L) \Big|_{L=\max\{x, x_0\}} = \begin{cases} G(x, x_0, x), & x \geq x_0, \\ G(x, x_0, x_0), & x \leq x_0. \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

В уравнение (A.28) и в начальное условие (A.29) входит новая неизвестная функция  $G(L, x_0, L)$ . Для нее имеем равенство

$$\frac{\partial}{\partial L} G(L, x_0, L) = \frac{\partial}{\partial x} G(x, x_0, L) \Big|_{x=L} + \frac{\partial}{\partial L} G(x, x_0, L) \Big|_{x=L},$$

которое с учетом (A.27) и (A.28) приводит к уравнению погружения

$$\frac{\partial}{\partial L} G(L, x_0, L) = ik_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) u(L, L) \right\} G(L, x_0, L), \quad (\text{A.30})$$

начальным условием для которого, очевидно, будет условие

$$G(L, x_0, L) \Big|_{L=x_0} = G(x_0, x_0, x_0) = u(x_0, x_0).$$

Сопоставляя теперь уравнение (A.30) с первым уравнением из (A.24), видим, что

$$G(L, x_0, L) = G(x_0, L, L) = u(x_0, L). \quad (\text{A.31})$$

Равенство (A.31) выражает *теорему взаимности* для нашей задачи.

Таким образом, для поля точечного источника  $G_\alpha(x, x_0)$ , расположенного в слое неоднородной среды и описываемого краевой задачей (A.26)

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + k_0^2 [1 + \varepsilon(x)] \right) G_\alpha(x, x_0) = 2ik_0 \delta(x - x_0), \quad (\text{A.32})$$

$$\left( \frac{d}{dx} + i\alpha k_0 \right) G_\alpha(x, x_0) \Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left( \frac{d}{dx} - ik_0 \right) G_\alpha(x, x_0) \Big|_{x=L} = 0,$$

где  $\alpha = k_1/k_0$ , получаем систему уравнений погружения:

$$\frac{\partial}{\partial L} G_\alpha(x, x_0, L) = i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) u_\alpha(x_0, L) u_\alpha(x, L),$$

$$G_\alpha(x, x_0, L) \Big|_{L=\max\{x, x_0\}} = \begin{cases} u_\alpha(x_0, x), & x \geq x_0, \\ G(x, x_0), & x \leq x_0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial L} u_\alpha(x, L) = ik_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) u_\alpha(L, L) \right\} u_\alpha(x, L), \quad u_\alpha(x, L) \Big|_{L=x} = u_\alpha(x, x),$$

$$\frac{d}{dL} u_\alpha(L, L) = 2ik_0 [u_\alpha(L, L) - 1] + i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) u_\alpha^2(L, L), \quad u_\alpha(L, L) \Big|_{L=L_0} = \frac{2}{1 + \alpha}.$$

Здесь мы индексом  $\alpha$  обозначили зависимость волнового поля от краевого условия на границе  $x = L_0$ .

**Замечание A.2.** Учет различных краевых условий на границе  $x = L$

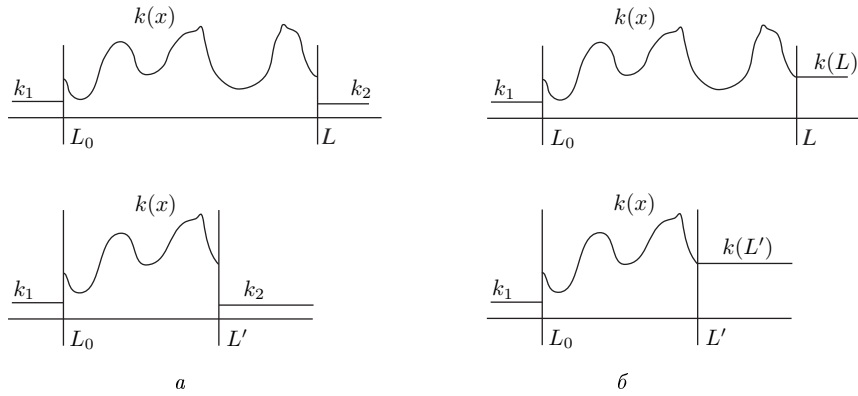


Рис. А.1. Краевые стационарные волновые задачи о падении волны на слой среды. (а) — несогласованная граница  $x = L$ ; (б) — согласованная граница  $x = L$

Зная решение краевой задачи (А.32) или уравнений погружения (А.33), легко написать решение и для других краевых волновых задач, отличающихся от задачи (А.32) значением волнового параметра в свободном полупространстве  $x > L$ . Рассмотрим краевую задачу

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + k_0^2 [1 + \varepsilon(x)] \right) G(x, x_0) = 2ik_0 \delta(x - x_0), \quad (\text{А.33})$$

$$\left( \frac{d}{dx} + i\alpha k_0 \right) G(x, x_0) \Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left( \frac{d}{dx} - ik_2 \right) G(x, x_0) \Big|_{x=L} = 0.$$

Представим решение задачи (А.33) в виде

$$G(x, x_0) = G_\alpha(x, x_0) + A(x_0, L)u_\alpha(x, L), \quad (\text{А.34})$$

где  $G_\alpha(x, x_0)$  и  $u_\alpha(x, L)$  — решения краевых задач (А.32), (А.14) соответственно, которые описываются уравнениями погружения (А.33), а величина  $A(x_0, L)$  не зависит от переменной  $x$ . Очевидно, что функция (А.34) удовлетворяет дифференциальному уравнению и краевому условию на границе  $x = L_0$  (А.33). Функция (А.34), очевидно, будет также удовлетворять краевому условию на границе  $x = L$ , если величину  $A(x_0, L)$  записать в виде

$$A(x_0, L) = \frac{1}{G - u_\alpha(L, L)} u_\alpha(x_0, L),$$

где постоянная

$$G = \frac{2}{1 - k_2/k_0}, \quad \text{или} \quad k_2 = \frac{G - 2}{G} k_0. \quad (\text{А.35})$$

Таким образом, решение краевой задачи (А.33) описывается выражением

$$G(x, x_0) = G_\alpha(x, x_0) + \tilde{G}(x, x_0), \quad (\text{А.36})$$

где функция

$$\tilde{G}(x, x_0) = \frac{1}{G - u_\alpha(L, L)} u_\alpha(x_0, L) u_\alpha(x, L). \quad (\text{А.37})$$

Отметим, что решение задачи с несогласованной границей  $x = L$  (А.33) методом погружения соответствует значению волнового числа  $k_2$  в области  $x > L$  для любого положения границы  $L$  (см. рис. А.1, а).

Если источник волн находится на границе  $x = L$ , т. е.  $x_0 = L$ , то из (А.36), (А.37) получаем, что

$$G(x, L) = \frac{G}{G - u_\alpha(L, L)} u_\alpha(x, L) \quad \text{и} \quad G(L, L) = \frac{G u_\alpha(L, L)}{G - u_\alpha(L, L)}.$$

Для задачи (А.33) влияние границ  $x = L_0$  и  $x = L$  проявляется различным образом. Влияние границы  $x = L_0$  существенно для начального условия к уравнению для функции  $u_\alpha(L, L)$ . Влияние же границы  $x = L$  непосредственно сказывается на структуре функции  $\tilde{G}(x, x_0)$ .

Предельные переходы по  $k_2$  позволяют рассматривать краевые волновые задачи с конкретными отражательными свойствами границы  $x = L$ . Так, для свободно пропускающей границы  $x = L$  величина  $k_2 = k_0$  и постоянная  $G = \infty$ , а функция  $\tilde{G}(x, x_0) = 0$ . Случай  $k_2 \rightarrow 0$  соответствует отражательной границе  $x = L$  с краевым условием равенства нулю производной поля на этой границе:  $\frac{\partial}{\partial x} G(x, x_0) \Big|_{x=L} = 0$ . В этом случае постоянная  $G = 2$  и формула (А.36) принимает вид

$$G(x, x_0) = G_\alpha(x, x_0) + \frac{1}{2 - u_\alpha(L, L)} u_\alpha(x_0, L) u_\alpha(x, L).$$

Если источник волн находится на этой границе, т. е.  $x_0 = L$ , то

$$G(x, L) = \frac{2}{2 - u_\alpha(L, L)} u_\alpha(x, L) = \frac{2}{1 - R_L} u_\alpha(x, L). \quad (\text{А.38})$$

Случай  $k_2 \rightarrow \infty$  также соответствует отражательной границе  $x = L$ , но с краевым условием равенства нулю самого поля на этой границе:  $G(L, x_0) = 0$ . В этом случае постоянная  $G = 0$  и формула (А.36) принимает вид

$$G(x, x_0) = G_\alpha(x, x_0) - \frac{1}{u_\alpha(L, L)} u_\alpha(x_0, L) u_\alpha(x, L). \quad \blacklozenge$$

### Замечание А.3. Наклонное падение волны

Выше мы рассмотрели случай нормального падения волны на слой слоисто-неоднородной среды. Аналогичным образом можно рассмотреть и случай наклонного падения волн на границу  $x = L$ . В этом случае задача описывается трехмерным уравнением Гельмгольца, которое запишем в виде

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k_0^2 [1 + \varepsilon(x)] \right\} U(x, \mathbf{R}) = 0, \quad (\text{А.39})$$

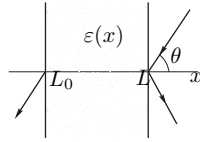
где через  $\mathbf{R} = \{y, z\}$  обозначены координаты в плоскости, перпендикулярной оси  $x$ . Считаем, что неоднородности среды, как и ранее, занимают часть пространства  $L_0 < x < L$ . Для простоты также будем считать, что вне слоя среды функция  $\varepsilon(x) = 0$ , т. е. волновые числа в свободных полупространствах  $x > L$  и  $x < L_0$  равны  $k_0$ . Пусть теперь на слой неоднородной среды из однородного полупространства  $x > L$  падает плоская волна с единичной амплитудой под углом  $\theta$  (рис. А.2):

$$U_0(x, \mathbf{R}) = \exp \left( i \sqrt{k_0^2 - q^2} (L - x) + iq\mathbf{R} \right) = e^{ip(L-x) + iq\mathbf{R}},$$

где  $q = k_0 \sin \theta$ , а  $p = \sqrt{k_0^2 - q^2} = k_0 \cos \theta$ . Случай нормального падения волны на границу соответствует значению  $\theta = 0$ .

Из-за наличия неоднородностей среды в полупространстве возникает отраженная волна, т. е. при  $x > L$  волновое поле имеет структуру

$$U(x, \mathbf{R}) = e^{ip(L-x) + iq\mathbf{R}} + R_L e^{ip(x-L) + iq\mathbf{R}}.$$

Рис. А.2. Наклонное падение плоской волны под углом  $\theta$ 

В полупространстве же  $x < L_0$  возникает проходящая волна вида

$$U(x, \mathbf{R}) = T_L e^{-ip(x-L_0)+iq\mathbf{R}}.$$

Краевыми условиями для уравнения (А.39) являются условия непрерывности поля и нормальной производной поля (в данном случае по  $x$ ) на границах слоя. Внутри слоя волновое поле имеет структуру  $U(x, \mathbf{R}) = u(x)e^{iq\mathbf{R}}$ , где функция  $u(x)$  описывается краевой задачей для одномерного уравнения Гельмгольца:

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + P^2(x) \right) u(x) = 0, \quad (A.40)$$

$$\left( \frac{d}{dx} + ip \right) u(x) \Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left( \frac{d}{dx} - ip \right) u(x) \Big|_{x=L} = -2ip.$$

Здесь функция

$$P^2(x) = p^2 \left[ 1 + \frac{k^2}{p^2} \varepsilon(x) \right] = p^2 \left[ 1 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \varepsilon(x) \right].$$

Краевая задача (А.40) с точностью до обозначений совпадает с краевой задачей (А.14). Следовательно, рассматривая теперь ее решение как функцию параметра  $L$ , получаем уравнения погружения вида (А.33), которые в нашем случае запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x, L) = ik \left\{ \cos \theta + \frac{1}{2 \cos \theta} \varepsilon(L) (1+R_L) \right\} u(x, L),$$

$$u(x, L)|_{L=x} = 1 + R_x, \quad (A.41)$$

$$\frac{d}{dL} R_L = 2ik(\cos \theta) R_L + \frac{ik}{2 \cos \theta} \varepsilon(L) (1+R_L)^2, \quad R_{L_0} = 0. \quad \blacklozenge$$

#### Замечание А.4. Метод интегрального уравнения

При выводе уравнений погружения мы использовали запись краевых задач в виде краевых дифференциальных уравнений. Однако в ряде случаев существенно проще получить эти уравнения из записи исходной задачи в виде соответствующего интегрального уравнения. В этом случае не приходится дифференцировать краевые условия по параметру погружения. Так, например, краевой задаче (А.30) при  $\alpha = 1$  соответствует интегральное уравнение

$$G(x, x_0) = e^{ik_0|x-x_0|} + i \frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0|x-\xi|} \varepsilon(\xi) G(\xi, x_0), \quad (A.42)$$

а краевой задаче (А.14) при  $k_1 = k_0$  соответствует интегральное уравнение

$$u(x, L) = e^{ik_0(L-x)} + i \frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0|x-\xi|} \varepsilon(\xi) u(\xi, L), \quad (A.43)$$

совпадающее с уравнением (А.42) при  $x_0 = L$  (т.е.  $u(x, L) = G(x, L)$ ).

Уравнение (А.42) можно переписать также в виде

$$G(x, x_0) = e^{ik_0|x-x_0|} + i \frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi G(x, \xi) \varepsilon(\xi) e^{ik_0|\xi-x_0|}. \quad (A.44)$$

Поменяем местами точки  $x$  и  $x_0$  в (А.44). Получаем уравнение

$$G(x_0, x) = e^{ik_0|x-x_0|} + i \frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0|x-\xi|} \varepsilon(\xi) G(x_0, \xi),$$

сопоставление которого с уравнением (А.42) приводит к теореме взаимности

$$G(x, x_0) = G(x_0, x). \quad (A.45)$$

Продифференцируем уравнение (А.42) по параметру  $L$ ; с учетом зависимости функции  $G(x, x_0) \equiv G(x, x_0, L)$  от параметра  $L$  получаем интегральное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x, x_0, L) = i \frac{k}{2} e^{ik_0(L-x)} \varepsilon(L) G(L, x_0, L) + i \frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0|x-\xi|} \varepsilon(\xi) \frac{\partial}{\partial L} G(\xi, x_0, L),$$

решение которого, очевидно, связано с функцией  $u(x, L)$  равенством

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x, x_0, L) = i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) G(L, x_0, L) u(x, L),$$

которое с учетом теоремы взаимности можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x, x_0, L) = i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) u(x_0, L) u(x, L),$$

совпадающем с первым уравнением метода погружения (А.31).

Продифференцируем теперь уравнение (А.43) по параметру  $L$ . Для производной  $\frac{\partial}{\partial L} u(x, L)$  получаем интегральное уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x, L) = a(L) e^{ik_0(L-x)} + i \frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0|x-\xi|} \varepsilon(\xi) \frac{\partial}{\partial L} u(\xi, L),$$

где  $a(L) = ik_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) u(L, L) \right\}$ , которое эквивалентно равенству

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x, L) = ik_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) u(L, L) \right\} u(x, L),$$

совпадающему со вторым уравнением метода погружения (А.31).

Для функции  $u(L, L)$  имеем

$$u(L, L) = 1 + i \frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0(L-\xi)} \varepsilon(\xi) u(\xi, L),$$

и, следовательно, для производной  $\frac{d}{dL} u(L, L)$  получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} u(L, L) - i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) u(L, L) &= ik_0 \left\{ 2 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) u(L, L) \right\} [u(L, L) - 1] = \\ &= -i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) u(L, L) + 2ik_0 [u(L, L) - 1] + i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) u^2(L, L), \end{aligned}$$

приводящую к третьему уравнению — уравнению Риккати в (А.31).  $\blacklozenge$



**Замечание А.5.** Матричное уравнение Гельмгольца

При анализе различных физических волновых задач возникают в ряде случаев краевые задачи, описываемые как линейными уравнениями второго порядка, так и, вообще говоря, системой уравнений второго порядка с краевыми условиями вида

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \gamma(x) \frac{d}{dx} + K(x) \right) U(x) &= 0, \\ \left( \frac{d}{dx} + B \right) U(x) \Big|_{x=L} &= D, \quad \left( \frac{d}{dx} + C \right) U(x) \Big|_{x=0} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

где  $\gamma(x)$ ,  $K(x)$  и  $U(x)$  — переменные, а  $B$ ,  $C$  и  $D$  — постоянные матрицы. Используя вывод уравнений погружения, аналогичный приведенному выше, краевую задачу (А.46) можно переформулировать в виде задачи с начальными условиями и непосредственно, не приводя при этом задачу (А.46) к системе уравнений первого порядка [20, 21, 113]. В самом деле, решение краевой задачи (А.46) зависит от параметра  $L$ , т. е.  $U(x) = U(x, L)$ , и, следовательно, вместо (А.46) можно написать краевую задачу

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \gamma(x) \frac{d}{dx} + K(x) \right) U(x, L) &= 0, \\ \left( \frac{d}{dx} + B \right) U(x, L) \Big|_{x=L} &= D, \quad \left( \frac{d}{dx} + C \right) U(x, L) \Big|_{x=0} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Дифференцируя уравнение (А.47) для матрицы  $U(x, L)$  по параметру  $L$ , получаем уравнение

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \gamma(x) \frac{d}{dx} + K(x) \right) \frac{\partial}{\partial L} U(x, L) = 0. \quad (\text{A.48})$$

Уравнение (А.48) совпадает с исходным уравнением (А.47), и, следовательно, можно написать равенство

$$\frac{\partial}{\partial L} U(x, L) = U(x, L) \Lambda(L). \quad (\text{A.49})$$

Это равенство можно рассматривать как дифференциальное уравнение по параметру  $L$ , если дополнить его начальным условием

$$U(x, L) \Big|_{L=x} = U(x, x).$$

Матрица  $\Lambda(L)$  определяется из условия выполнения краевых условий при  $x = L$ . Действуя на (А.49) оператором  $\left( \frac{d}{dx} + B \right)$ , получаем равенство

$$\left( \frac{d}{dx} + B \right) \frac{\partial}{\partial L} U(x, L) = \frac{\partial}{\partial L} \left( \frac{d}{dx} + B \right) U(x, L) = \left( \frac{d}{dx} + B \right) U(x, L) \Lambda(L). \quad (\text{A.50})$$

Положим теперь  $x = L$ . В результате правая часть (А.50), в силу краевого условия (А.47), превращается в  $D\Lambda(L)$ , а для левой части (А.50) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \left( \frac{d}{dx} + B \right) U(x, L) \Big|_{x=L} &= \frac{\partial}{\partial L} \left[ \left( \frac{d}{dx} + B \right) U(x, L) \Big|_{x=L} \right] - \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} + B \right) U(x, L) \Big|_{x=L} = \\ &= [\gamma(L) - B] D + [K(L) + B^2 - \gamma(L)B] U(L, L). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Lambda(L) = D^{-1} [\gamma(L) - B] D + D^{-1} [K(L) + B^2 - \gamma(L)B] U(L, L). \quad (\text{A.51})$$

Для матрицы  $U(L, L)$  имеем равенство

$$\frac{dU(L, L)}{dL} = \frac{\partial U(x, L)}{\partial x} \Big|_{x=L} + \frac{\partial U(x, L)}{\partial L} \Big|_{x=L} = D - BU(L, L) + U(L, L)\Lambda(L),$$

которое может рассматриваться как матричное дифференциальное уравнение Риккати

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} U(L, L) &= D - \{BU(L, L) + U(L, L)D^{-1}BD\} + \\ &+ U(L, L)D^{-1}\gamma(L)D + U(L, L)D^{-1} \{K(L) - \gamma(L)B + B^2\} U(L, L) \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

с начальным условием, вытекающим из краевого условия (А.47) при  $L = 0$ :

$$U(0, 0) = (B - C)^{-1}D.$$

Рассмотренная ранее краевая задача (А.14) соответствует задаче (А.46) с параметрами  $\gamma = 0$ ,  $B = -ik_0$ ,  $C = ik_1$ ,  $D = -2ik_0$ . ♦

**Уравнение Гельмгольца с согласованной границей.**

Аналогичные уравнения можно получить и в случае, когда краевые условия сами зависят от параметра  $L$ . Рассмотрим в качестве примера краевую задачу

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + k^2(x) \right) u(x, L) = 0, \quad (\text{A.53})$$

$$\left( \frac{d}{dx} + ik_1 \right) u(x, L) \Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left( \frac{d}{dx} - ik(L) \right) u(x, L) \Big|_{x=L} = -2ik(L),$$

описывающую падение плоской волны  $u(x) = e^{-ik(L)(x-L)}$  из однородного полупространства  $x > L$  с волновым параметром  $k = k(L)$  на слой неоднородной среды  $L_0 < x < L$ . В этом случае нет скачка функции  $k(x)$  на границе слоя  $x = L$  для любого положения границы (рис. А.1, б), и такую задачу будем называть задачей с *согласованной границей*.

Перепишем краевую задачу (А.53) в виде краевой системы уравнений:

$$\frac{d}{dx} u(x, L) = v(x, L), \quad \frac{d}{dx} v(x, L) = -k^2(x)u(x, L), \quad (\text{A.54})$$

$$v(L_0, L) + ik_1 u(L_0, L) = 0, \quad v(L, L) - ik(L)u(L, L) = -2ik(L).$$

Рассматривая решение этой задачи как функцию параметра  $L$ , для производных по параметру  $L$  получаем краевую задачу

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial u(x, L)}{\partial L} = \frac{\partial v(x, L)}{\partial L}, \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial v(x, L)}{\partial L} = -k^2(x) \frac{\partial u(x, L)}{\partial L},$$

$$\frac{\partial v(L_0, L)}{\partial L} + ik_1 \frac{\partial u(L_0, L)}{\partial L} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, L)}{\partial L} \Big|_{x=L} - ik(L) \frac{\partial u(x, L)}{\partial L} \Big|_{x=L} &= \\ = - \frac{\partial v(x, L)}{\partial x} \Big|_{x=L} + ik(L) \frac{\partial u(x, L)}{\partial x} \Big|_{x=L} + ik'(L)u(L, L) - 2ik'(L) &= \\ = 2k^2(L) + ik'(L) [u(L, L) - 2], \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

где  $k'(L) = dk(L)/dL$ . Сопоставляя теперь краевую задачу (A.55) с краевой задачей (A.54), получаем уравнения погружения в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} u(x, L) &= \left\{ ik(L) + \frac{1}{2} \frac{k'(L)}{k(L)} [2 - u(L, L)] \right\} u(x, L), \\ u(x, L) \Big|_{L=x} &= u(x, x), \\ \frac{\partial}{\partial L} v(x, L) &= \left\{ ik(L) + \frac{1}{2} \frac{k'(L)}{k(L)} [2 - u(L, L)] \right\} v(x, L), \\ v(x, L) \Big|_{L=x} &= v(x, x) = -ik(L) [2 - u(x, x)], \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

содержащем, в отличие от (A.17), производную функции  $k(L)$ . Следовательно, в этом случае

$$v(x, L) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, L) = -ik(L) \frac{2 - u(x, x)}{u(x, x)} u(x, L). \quad (\text{A.57})$$

Для функция  $u(L, L)$  имеем равенство

$$\frac{d}{dL} u(L, L) = \frac{\partial u(x, L)}{\partial x} \Big|_{x=L} + \frac{\partial u(x, L)}{\partial L} \Big|_{x=L},$$

и, следовательно, с учетом уравнений (A.55) и (A.56) получаем уравнение Риккати

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} u(L, L) &= 2ik(L) [u(L, L) - 1] + \frac{1}{2} \frac{k'(L)}{k(L)} [2 - u(L, L)] u(L, L), \\ u(L, L) \Big|_{L=L_0} &= \frac{2k(L_0)}{k(L_0) + k_1}. \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Уравнения (A.56), (A.58) в терминах коэффициента отражения для данной задачи  $R_L = u(L, L) - 1$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} u(x, L) &= \left\{ ik(L) + \frac{1}{2} \frac{k'(L)}{k(L)} (1 - R_L) \right\} u(x, L), \quad u(x, L) \Big|_{L=x} = 1 + R_x, \\ \frac{d}{dL} R_L &= 2ik(L) R_L + \frac{1}{2} \frac{k'(L)}{k(L)} (1 - R_L^2), \quad R_{L_0} = \frac{k(L_0) - k_1}{k(L_0) + k_1}. \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

Если теперь ввести функцию  $\varepsilon(x)$  с помощью равенства  $k^2(x) = k^2 [1 + \varepsilon(x)]$ , то при условии  $|\varepsilon(x)| \ll 1$  уравнения (A.59) упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} u(x, L) &= \left\{ ik(L) + \frac{1}{4} \varepsilon'(L) (1 - R_L) \right\} u(x, L), \quad u(x, L) \Big|_{L=x} = 1 + R_x, \\ \frac{d}{dL} R_L &= 2ik(L) R_L + \frac{1}{4} \varepsilon'(L) (1 - R_L^2), \quad R_{L_0} = \frac{k(L_0) - k_1}{k(L_0) + k_1}, \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

где  $k(L) = k \left[ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) \right]$ .

Для наклонного падения волны, как и в замечании А.3. на с. 109, волновое поле представимо в виде  $U(x, \mathbf{R}) = u(x) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}$ , где функция  $u(x)$  описывается краевой задачей для одномерного уравнения Гельмгольца (для простоты считаем, что и граница

$x = L_0$  также согласована, т. е.  $k_1 = k(L_0)$ ):

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dx^2} + k^2(x) - q^2 \right) u(x, L) &= 0, \\ \left( \frac{d}{dx} + i\sqrt{k^2(L_0) - q^2} \right) u(x) \Big|_{x=L_0} &= 0, \\ \left( \frac{d}{dx} - i\sqrt{k^2(L) - q^2} \right) u(x) \Big|_{x=L} &= -2i\sqrt{k^2(L) - q^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Следовательно, уравнения погружения по параметру  $L$  будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} u(x, L) &= \left\{ i\sqrt{k^2(L) - q^2} + \frac{1}{2} \frac{k(L)k'(L)}{k^2(L) - q^2} [2 - u(L, L)] \right\} u(x, L), \\ u(x, L) \Big|_{L=x} &= u(x, x), \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dL} u(L, L) = 2ik\sqrt{k^2(L) - q^2} [u(L, L) - 1] + \frac{1}{2} \frac{k(L)k'(L)}{k^2(L) - q^2} [2 - u(L, L)] u(L, L),$$

$$u(L, L) \Big|_{L=L_0} = 1, \quad (\text{A.62})$$

содержащий, в отличие от (A.41), производную функции  $k(L)$ .

Если теперь ввести функцию  $\varepsilon(x)$  с помощью равенства

$$k^2(L) - q^2 = k_0^2 \cos^2 \theta + k_0^2 \varepsilon(L),$$

где  $\theta$  — угол падения волны (рис. А.2), то при условии  $|\varepsilon(L)| \ll 1$  и отсутствии затухания получаем уравнения погружения в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} u(x, L) &= \left\{ ik_0 \cos \theta + \frac{1}{4 \cos^2 \theta} \varepsilon'(L) (1 - R_L) \right\} u(x, L), \\ u(x, L) \Big|_{L=x} &= 1 + R_x, \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

$$\frac{d}{dL} R_L = 2ik_0 (\cos \theta) R_L + \frac{1}{4 \cos^2 \theta} \varepsilon'(L) (1 - R_L^2), \quad R_{L_0} = 0.$$

Эти уравнения неприменимы в окрестности углов падения  $\pi/2 - \theta \sim |\varepsilon(L)|$ .

### Акустические и электромагнитные волны в слоисто-неоднородной среде.

Рассмотренные выше краевые волновые задачи описывают разнообразные физические процессы, такие, например, как акустические волны в среде с постоянной плотностью и некоторые типы электромагнитных волн. Здесь же мы получим обобщение на случай переменной в среде плотности.

Ограничимся, для простоты, анализом задачи о плоских акустических волнах в слоистой среде (например, океане или атмосфере), стратифицированной по оси  $z$  (вертикальная координата), которая характеризуется безразмерной плотностью  $\rho(z)$  и волновым числом  $k^2(z) = k_0^2 [1 + \varepsilon(z)]$ , где функция  $\varepsilon(z)$  описывает неоднородности скорости распространения звука в среде. Внутри слоя среды поле акустического давления описывается уравнением ( $\rho'(z) = d\rho(z)/dz$ ):

$$\left\{ \Delta_{\mathbf{r}} - \frac{\rho'(z)}{\rho(z)} \frac{\partial}{\partial z} + k^2(z) \right\} P(z, \mathbf{R}) = 0, \quad (\text{A.64})$$

где через  $\mathbf{R} = \{x, y\}$  обозначены координаты в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ .

Считаем, что неоднородности среды, как и ранее, занимают часть пространства  $H_0 < z < H$ . Для простоты также будем считать, что вне слоя среды функция  $\varepsilon(z) = 0$ , т.е. волновые числа в свободных полупространствах  $z > H$  и  $z < H_0$  равны  $k_0$ , а плотность среды постоянна и равна единице (плотность нормирована на характерное значение плотности внутри слоя среды и, следовательно, является безразмерной величиной).

Пусть на слой неоднородной среды из однородного полупространства  $z > H$  падает наклонная плоская волна

$$P_0(z, \mathbf{R}) = e^{-ip(z-H)+iq\mathbf{R}} \quad \left( p = \sqrt{k_0^2 - q^2} \right).$$

Случай нормального падения волны на границу  $z = H$  соответствует значению  $\mathbf{q} = 0$ . Тогда решение уравнения (A.64) можно представить в виде

$$P(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{q}}(z)e^{iq\mathbf{R}},$$

где функция  $u_{\mathbf{q}}(z)$  удовлетворяет волновому уравнению (зависимость от  $\mathbf{q}$  указывать не будем):

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} - \frac{\rho'(z)}{\rho(z)} \frac{d}{dz} + p^2 \left[ 1 + \frac{k_0^2}{p^2} \varepsilon(z) \right] \right\} u(z) = 0.$$

Из-за наличия неоднородностей среды в полупространстве возникает отраженная волна, т.е. при  $z > H$  волновое поле имеет структуру

$$u(z) = e^{-ip(z-H)} + R_H e^{ip(z-H)}$$

с коэффициентом отражения  $R_H$ .

В полупространстве  $z < H_0$  возникает проходящая волна вида

$$u(z) = T_H e^{-ip(z-H_0)}$$

с коэффициентом прохождения  $T_H$ . Краевыми условиями для уравнения (A.64) являются условия непрерывности поля и величины  $\frac{1}{\rho(z)} \frac{d}{dz} u(z)$  на границах слоя, которые можно записать в виде

$$\left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{d}{dz} + ip \right) u(z) \Big|_{z=H_0} = 0, \quad \left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{d}{dz} - ip \right) u(z) \Big|_{z=H} = -2ip.$$

Таким образом, рассматриваемая волновая задача для функции  $u(z)$  является краевой задачей для одномерного волнового уравнения:

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} - \frac{\rho'(z)}{\rho(z)} \frac{d}{dz} + p^2 \left[ 1 + \frac{k_0^2}{p^2} \varepsilon(z) \right] \right\} u(z) = 0, \quad (A.65)$$

$$\left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{d}{dz} + ip \right) u(z) \Big|_{z=H_0} = 0, \quad \left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{d}{dz} - ip \right) u(z) \Big|_{z=H} = -2ip.$$

**Замечание A.6.** *Переход к уравнению Гельмгольца*

От волнового уравнения (A.65) можно с помощью замены  $\tilde{u}(z) = u(z)/\sqrt{\rho(z)}$  перейти к уравнению Гельмгольца с эффективным волновым числом  $\tilde{k}(z)$ , содержащему первую и вторую производные плотности. Однако появление производных плотности в волновом уравнении приводит к ряду ограничений, связанных с определенными свойствами гладкости функции  $\rho(z)$ . Тем более это неудобно, когда функция  $\rho(z)$  является экспериментально измеряемой величиной.  $\blacklozenge$

**Замечание A.7.** *Переход к интегральному уравнению*

Отметим, что краевая задача (A.65) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(z) = g(z, H) + \int_{H_0}^H d\xi g(z, \xi) \varphi(\xi) u(\xi), \quad (A.66)$$

где функция Грина в свободном пространстве ( $\varepsilon(z) = 0$ ) с заданным распределением плотности  $\rho(z)$

$$g(z, z_0) = \exp \left\{ ip \operatorname{sgn}(z - z_0) \int_{z_0}^z d\eta \rho(\eta) \right\} \quad (A.67)$$

(функция  $\operatorname{sgn}(z)$  равна 1, если  $z > 0$ , и  $-1$ , если  $z < 0$ ) описывается краевой задачей

$$\left\{ \frac{d}{dz} \frac{1}{\rho(z)} \frac{d}{dz} + p^2 \rho(z) \right\} g(z, z_0) = 2ip\delta(z - z_0),$$

$$\left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{d}{dz} + ip \right) g(z, z_0) \Big|_{z=H_0} = 0, \quad \left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{d}{dz} - ip \right) g(z, z_0) \Big|_{z=H} = 0,$$

а функция  $\varphi(z)$  определяется равенством

$$\varphi(z) = \frac{ip}{2\rho(z)} \left[ 1 + \frac{k_0^2}{p^2} \varepsilon(z) - \rho^2(z) \right]. \quad (A.68)$$

Перейдем теперь к выводу уравнений погружения.

Перепишем краевую задачу (A.65) в виде системы уравнений:

$$\frac{d}{dz} u(z, H) = -\rho(z)v(z, H),$$

$$\frac{d}{dz} v(z, H) = \frac{p^2}{\rho(z)} \left[ 1 + \frac{k_0^2}{p^2} \varepsilon(z) \right] u(z, H), \quad (A.69)$$

$$v(H_0, H) - ipu(H_0, H) = 0, \quad v(H, H) + ipu(H, H) = 2ip,$$

где мы включили параметр  $H$  в качестве новой переменной.

Далее действуем как и в предыдущих пунктах. Дифференцируем систему уравнений (A.69) по параметру  $H$ . Для производных  $\partial u(z, H)/\partial H$ ,  $\partial v(z, H)/\partial H$  получаем

краевую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \frac{\partial u(z, H)}{\partial H} &= -\rho(z) \frac{\partial v(z, H)}{\partial H}, \\ \frac{d}{dz} \frac{\partial v(z, H)}{\partial H} &= \frac{p^2}{\rho(z)} \left[ 1 + \frac{k_0^2}{p^2} \varepsilon(z) \right] \frac{\partial u(z, H)}{\partial H}, \\ \frac{\partial v(H_0, H)}{\partial H} - ip \frac{\partial u(H_0, H)}{\partial H} &= 0, \\ \left\{ \frac{\partial v(z, H)}{\partial H} + ip \frac{\partial u(z, H)}{\partial H} \right\} \Big|_{z=H} &= 2ip \{ ip\rho(H) + \varphi(H)u(H, H) \}, \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

где функция  $\varphi(H)$  описывается выражением (A.68).

Сопоставляя теперь системы уравнений (A.69) и (A.70), для поля внутри среды получаем уравнения погружения по параметру  $H$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial H} u(z, H) &= \{ ip\rho(H) + \varphi(H)u(H, H) \} u(z, H), \\ u(z, H) \Big|_{H=z} &= u(z, z), \\ \frac{\partial}{\partial H} v(z, H) &= \{ ip\rho(H) + \varphi(H)u(H, H) \} v(z, H), \\ v(z, H) \Big|_{H=z} &= v(z, z) = ip[2 - u(H, H)]. \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

Для функции  $u(H, H)$  имеем

$$\frac{d}{dH} u(H, H) = \frac{\partial}{\partial z} u(z, H) \Big|_{z=H} + \frac{\partial}{\partial H} u(z, H) \Big|_{z=H},$$

и, следовательно, с учетом (A.69) и (A.71) получаем уравнение Риккати

$$\frac{d}{dH} u(H, H) = 2ip\rho(H) [u(H, H) - 1] + \varphi(H)u^2(H, H), \quad (\text{A.72})$$

$$u(H, H) \Big|_{H=H_0} = 1.$$

Уравнения (A.71), (A.72) и будут уравнениями метода погружения для краевой задачи (A.65) [46]. Их, разумеется, можно было бы получить и из интегрального уравнения (A.66). Особенность этих уравнений состоит в том, что в них не входят производные плотности.

Аналогичным образом можно рассмотреть и поле точечного источника, расположенного в точке  $z_0$ , которое описывается уравнением

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} - \frac{\rho'(z)}{\rho(z)} \frac{d}{dz} + p^2 \left[ 1 + \frac{k_0^2}{p^2} \varepsilon(z) \right] \right\} G(z, z_0) = 2ip\rho(z_0)\delta(z - z_0). \quad (\text{A.73})$$

Вне слоя среды решение имеет вид уходящих волн:

$$G(z, z_0) = \begin{cases} T_1 e^{ip(z-H)} & (z \geq H), \\ T_2 e^{-ip(z-H_0)} & (z \leq H_0), \end{cases}$$

и, следовательно, краевыми условиями для уравнения (A.73) являются условия:

$$\left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{d}{dz} + ip \right) G(z, z_0) \Big|_{z=H_0} = 0, \quad \left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{d}{dz} - ip \right) G(z, z_0) \Big|_{z=H} = 0. \quad (\text{A.74})$$

Краевой задаче (A.73), (A.74) эквивалентно теперь интегральное уравнение

$$G(z, z_0) = g(z, z_0) + \int_{H_0}^H d\xi g(z, \xi) \varphi(\xi) G(\xi, z_0), \quad (\text{A.75})$$

где функция  $g(z, z_0)$  описывается выражением (A.67).

Рассматривая теперь функцию  $G(z, z_0, H)$  как функцию параметра  $H$ , получаем для нее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial G(z, z_0, H)}{\partial H} = \varphi(H)u(z, H)u(z_0, H), \quad (\text{A.76})$$

где  $u(z, H)$  — решение уравнения (A.71). Начальным условием для уравнения (A.76) является условие

$$G(z, z_0, H) \Big|_{H=\max(z, z_0)} = \begin{cases} u(z, z_0) & (z_0 \geq z), \\ u(z_0, z) & (z_0 \leq z). \end{cases}$$

При выводе уравнения (A.76) мы воспользовались теоремой взаимности, согласно которой

$$G(H, z, H) = G(z, H, H) = u(z, H).$$

Таким образом, в случае источника плоских волн в слое среды к уравнениям (A.71), (A.72) добавляется еще одно уравнение — (A.76). Отметим, что это уравнение интегрируется, т. е. решение задачи об источнике внутри слоя среды простым образом (через квадратуру) связано с решением задачи о падении волны на слой среды.

**Замечание A.8.** Учет типичных краевых условий для акустики слоистого океана (атмосферы)

Выше мы рассмотрели простейшую задачу о распространении волны в слое среды, вне которого среда однородна и ее параметры  $\varepsilon(z) = 0$  и  $\rho(z) = 1$ . Рассмотрим теперь типичную задачу о распространении акустической волны, например, в слоистом океане [36, 46, 110].

Пусть слоисто-неоднородная среда с параметрами  $\rho(z)$  и  $k^2(z) = k_0^2 [1 + \varepsilon(z)]$  занимает часть пространства  $H_0 < z < H$ , а вне его однородна и ее параметры  $k_1, \rho_1$  при  $z < H_0$  и  $k_2, \rho_2$  при  $z > H$ . Пусть внутри слоя в точке с координатами  $(z_0, \mathbf{R}_0)$  находится точечный источник. Тогда решение задачи о распространении волны сводится для фурье-образа поля давления к одномерному уравнению (A.73) с краевыми условиями непрерывности функций

$G(z, z_0)$  и  $\frac{1}{\rho(z)} \frac{dG(z, z_0)}{dz}$  на границах слоя, которые можно записать в виде

$$\left( \frac{d}{dz} + i\kappa_1 \right) G(z, z_0) \Big|_{z=H_0} = 0, \quad \left( \frac{d}{dz} - i\kappa_2 \right) G(z, z_0) \Big|_{z=H} = 0, \quad (\text{A.77})$$

где введены обозначения

$$\kappa_1 = p_1 \frac{\rho(H_0)}{\rho_1}, \quad \kappa_2 = p_2 \frac{\rho(H)}{\rho_2}, \quad p_i^2 = k_i^2 - q^2.$$

Пространственное же распределение поля давления описывается преобразованием Ганкеля

$$P(z, \mathbf{R}) = \frac{1}{4i\pi\rho(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{k^2 - q^2}} G_q(z, z_0) H_0^{(1)}(q|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|).$$

Очевидно, что так же, как и в случае замечания А.2. на с. 107, решение краевой задачи (А.73), (А.77) складывается из двух частей, т. е.

$$G(z, z_0) = G_1(z, z_0, H) + G_2(z, z_0, H), \quad (\text{А.78})$$

где функция  $G_1(z, z_0, H)$ , как функция параметра  $H$  (при  $H_0 = 0$  параметр  $H$  — глубина океана), удовлетворяет системе уравнений метода погружения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1(z, z_0, H)}{\partial H} &= \varphi(H) u_1(z, H) u_1(z_0, H), \\ G_1(z, z_0, H)|_{H=\max(z, z_0)} &= \begin{cases} u_1(z, z_0) & (z_0 \geq z), \\ u_1(z_0, z) & (z_0 \leq z), \end{cases} \\ \frac{\partial}{\partial H} u_1(z, H) &= \{ip\rho(H) + \varphi(H) u_1(H, H)\} u_1(z, H), \\ u_1(z, H)|_{H=z} &= u_1(z, z), \\ \frac{d}{dH} u_1(H, H) &= 2ip\rho(H) [u_1(H, H) - 1] + \varphi(H) u_1^2(H, H), \\ u_1(H, H)|_{H=H_0} &= \frac{2p}{p + \kappa_1}, \end{aligned} \quad (\text{А.79})$$

где функция  $\varphi(H)$  описывается выражением (А.68). Отметим, что решение первых двух уравнений можно записать в виде квадратур.

Функция же  $G_2(z, z_0, H)$  определяется равенством

$$G_2(z, z_0, H) = \frac{1}{G - u_1(H, H)} u_1(z, H) u_1(z_0, H), \quad G = \frac{2p}{p - \kappa_2}. \quad (\text{А.80})$$

Если источник волн находится на границе  $z = H$ , т. е.  $z_0 = H$ , то из (А.78), (А.80) получаем, что

$$G(z, H) = \frac{G}{G - u_1(H, H)} u_1(z, H) \quad \text{и} \quad G(H, H) = \frac{G u_1(H, H)}{G - u_1(H, H)}.$$

Для задачи (А.73) влияние границ  $z = H_0$  и  $z = H$  проявляется различным образом. Влияние границы  $z = H_0$  существенно для начального условия к уравнению для функции  $u_1(H, H)$ . Влияние же границы  $z = H$  непосредственно сказывается на структуре функции  $G_2(z, z_0, H)$ .

Предельные переходы по  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  ( $\rho_1$  и  $\rho_2$ ) позволяют рассматривать конкретные краевые условия, характерные, например, для акустики океана. Так, при  $\kappa_1 \rightarrow 0$  ( $\rho_2 \rightarrow \infty$ ) (граница вода–твердое дно)  $\left. \frac{d}{dz} G(z, z_0) \right|_{z=H_0} = 0$ , а при  $\kappa_2 \rightarrow \infty$  ( $\rho_2 \rightarrow 0$ ) (граница вода–воздух) постоянная величина  $G = 0$  и на границе  $H$  поле  $G(H, z_0) = 0$ .

При конкретных краевых условиях можно, разумеется, получить уравнения метода погружения и непосредственно из исходной краевой задачи. Такой подход мы продемонстрируем в следующем разделе при анализе акустико-гравитационных волн в слоистых средах. ♦

### Замечание А.9. Распространение электромагнитных волн в слоистых средах

Уравнение (А.65) описывает также распространение электромагнитных волн. Для линейной слоистой среды, как хорошо известно, достаточно рассмотреть лишь два направления поляризации падающего поля, когда электрическое поле волны  $E$  перпендикулярно к плоскости падения и параллельно ей. Первый случай эквивалентен значению  $\rho(z) = 1$ , а второй — значению  $\rho(z) = 1 + \varepsilon(z)$  (магнитную проницаемость среды считаем равной единице). Таким образом, уравнения погружения (А.71), (А.72) также пригодны для анализа краевых задач теории распространения электромагнитных волн. Распространение коротких и ультракоротких радиоволн в тропосферном слое волноводе над поверхностью океана изучалось на основе приведенного подхода в работах [10, 11, 17, 57–66, 123]. ♦

### Замечание А.10. Связь между решениями различных краевых задач

Метод погружения позволяет переформулировать различные краевые волновые задачи в задачи с начальными условиями по параметру, связанному с толщиной слоя. Как хорошо известно, поле точечного источника выражается через два линейно независимых решения исходного волнового уравнения. Аналогом второго линейно независимого решения в методе погружения является решение какой-либо другой краевой задачи. Учитывая, что каждая из краевых задач теории распространения волн в слоистых средах имеет самостоятельный физический интерес, представляется полезным получить представление для поля точечного источника через решения различных краевых задач. Это было сделано в работе [45].

Рассмотрим две различные краевые задачи для функции  $G_1(z, z_0)$  из представления (А.78), отличающиеся краевыми условиями на границе  $z = H_0$ , решения которых обозначим через функции  $G_1(z, z_0)$  и  $\tilde{G}_1(z, z_0)$ . Тогда для функции  $G_1(z, z_0)$  можно получить представление

$$G_1(z, z_0) = \begin{cases} \frac{u_1(z_0, H)}{u_1(H, H) - \tilde{u}_1(H, H)} [u_1(z, H) - \tilde{u}_1(z, H)] & (z \geq z_0), \\ \frac{u_1(z, H)}{u_1(H, H) - \tilde{u}_1(H, H)} [u_1(z_0, H) - \tilde{u}_1(z_0, H)] & (z \leq z_0). \end{cases} \quad (\text{А.81})$$

Отметим, что функции  $\tilde{u}_1(z, H)$  и  $\tilde{u}_1(H, H)$ , как функции параметра  $H$ , также удовлетворяют уравнениям (А.79) и отличаются от соответствующих функций без знака тильды только другим начальным условием для уравнения Риккати. Очевидно, что функция  $\tilde{G}_1(z, z_0)$  также имеет структуру, аналогичную (А.81), а именно:

$$\tilde{G}_1(z, z_0) = \frac{\tilde{u}_1(z_1, H)}{u_1(z_1, H)} G_1(z, z_0) \quad (z_1 = \min(z_0, z)). \quad (\text{А.82})$$

Функции  $u_1(z, H)$  и  $\tilde{u}_1(z, H)$ , фигурирующие в (А.81) и (А.82), не являются независимыми. Используя уравнения погружения (А.79), легко показать, что их комбинация

$$W(z, H) = \frac{u_1(z, H) \tilde{u}_1(z, H)}{u_1(H, H) - \tilde{u}_1(H, H)}$$

не зависит от  $H$ , т. е.  $\partial W(z, H) / \partial H = 0$  и, следовательно,

$$\frac{u_1(z, H) \tilde{u}_1(z, H)}{u_1(H, H) - \tilde{u}_1(H, H)} = \frac{u_1(H, H) \tilde{u}_1(H, H)}{u_1(H, H) - \tilde{u}_1(H, H)}.$$

Таким образом, для независимого нахождения правых частей представлений (А.81) и (А.82) необходимо решить два уравнения Риккати, отличающиеся начальными условиями, и одно уравнение для функции  $u_1(z, H)$  (или  $\tilde{u}_1(z, H)$ ). Следовательно, интегрирование дополнительного уравнения Риккати эквивалентно решению первого уравнения в (А.79).

В физических задачах распространения, например акустических (электромагнитных) волн в неоднородных средах, большое внимание уделяется вопросу о влиянии импеданса границы

на акустическое (электромагнитное) поле в среде. Полученное выше представление является очень удобным и «экономически» выгодным именно для анализа таких вопросов. В самом деле, как отмечалось выше, решение каждой отдельно взятой краевой задачи требует решения уравнения Риккати и вычисления двух квадратур от, вообще говоря, сильно осциллирующих функций. Рассмотрение же двух таких задач позволяет обойтись решением двух уравнений Риккати и вычислением одной квадратуры. Все остальные волновые характеристики для обеих задач получаются алгебраическим путем с помощью найденных решений. Если мы имеем в дополнение к рассмотренным двум задачам еще и третью задачу, то ее решение можно сразу выписать с помощью формулы Грина для рассматриваемого волнового уравнения.

Так, если краевые условия для функций  $G_1^{(\alpha)}(z, z_0)$  и  $G_1^{(\beta)}(z, z_0)$  записать в виде

$$\left( \frac{d}{dz} - 2ipp(z)\alpha \right) G_1^{(\alpha)}(z, z_0) \Big|_{z=H_0} = 0, \quad \left( \frac{d}{dz} - 2ipp(z)\beta \right) G_1^{(\beta)}(z, z_0) \Big|_{z=H_0} = 0,$$

то формула Грина для связи решений  $G_1^{(\alpha)}(z, z_0)$  и  $G_1^{(\beta)}(z, z_0)$  имеет вид

$$G_1^{(\beta)}(z, z_0) = G_1^{(\alpha)}(z, z_0) - (\alpha - \beta) G_1^{(\alpha)}(H_0, z_0) G_1^{(\beta)}(z, H_0). \quad (\text{A.83})$$

Полагая в (A.83)  $z_0 = H_0$ , получаем

$$G_1^{(\beta)}(z, H_0) = \frac{1}{1 + (\alpha - \beta) G_1^{(\alpha)}(H_0, H_0)} G_1^{(\alpha)}(z, H_0),$$

и, следовательно, формула (A.83) принимает вид

$$\tilde{G}_1(z, z_0) = G_1^{(\alpha)}(z, z_0) - \frac{(\alpha - \beta)}{1 + (\alpha - \beta) G_1^{(\alpha)}(H_0, H_0)} G_1^{(\alpha)}(H_0, z_0) G_1^{(\alpha)}(z, H_0). \quad (\text{A.84})$$

Если же теперь рассмотреть третью краевую задачу, например с краевым условием

$$\left( \frac{d}{dz} - 2ipp(z)\gamma \right) G_1^{(\gamma)}(z, z_0) \Big|_{z=H_0} = 0,$$

то связь ее решения с решением предыдущей задачи согласно формуле (A.84) имеет вид

$$G_1^{(\gamma)}(z, x_0) = G_1^{(\alpha)}(z, z_0) - \frac{(\alpha - \gamma)}{1 + (\alpha - \gamma) G_1^{(\alpha)}(H_0, H_0)} G_1^{(\alpha)}(H_0, z_0) G_1^{(\alpha)}(z, H_0). \quad \blacklozenge$$

### Акустико-гравитационные волны в слоистом океане.

В предыдущих пунктах мы рассматривали в качестве эталонных задач задачи со свободно пропускающими границами. Однако в физических исследованиях часто в качестве исходных задач возникают задачи с отражающими границами. Разумеется, уравнения погружения для них можно получить и из представления (A.36) на с. 108, однако технически более просто рассматривать такие задачи как исходные. В качестве примера рассмотрим задачу о возбуждении акустико-гравитационных волн в слоистом океане. Детальное обсуждение этой задачи можно найти в работах [24–29, 46–48, 100], где рассматривалось распределение по глубине океана низкочастотного акустического шума для различных моделей поверхностного шума, стратификации среды и импедансных свойств морского дна.

Исходными уравнениями являются уравнения гидродинамики в адиабатическом приближении:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) \frac{d}{dt} p(\mathbf{r}, t) &= -\nabla p(\mathbf{r}, t) + \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{g} + \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \operatorname{div}(\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) &= Q(\mathbf{r}, t), \\ \frac{d}{dt} p(\mathbf{r}, t) &= c^2(\mathbf{r}, t) \frac{d}{dt} \rho(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

Здесь  $\rho(\mathbf{r}, t)$  — плотность среды,  $p(\mathbf{r}, t)$  — давление,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  — скорость среды,  $c(\mathbf{r}, t)$  — скорость звука в среде,  $\mathbf{g} = \{0, 0, -g\}$  — ускорение силы тяжести (ось  $z$  направлена вертикально вверх, против сил тяжести),  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ ,  $Q(\mathbf{r}, t)$  — источники силы и массы соответственно, а оператор

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \nabla).$$

Уравнения (A.85) описывают мелкомасштабные движения, на которые не оказывает влияния вращение Земли, и, следовательно, можно пренебречь силой Кориолиса.

Пусть невозмущенное состояние среды описывается параметрами  $\mathbf{v}_0(z) = \{\mathbf{U}_0(z), 0\}$ ,  $\rho_0(z)$ ,  $c(z)$ ,  $p_0(z)$ , где  $\mathbf{U}_0(z)$  — горизонтальная составляющая скорости, а функции  $p_0(z)$  и  $\rho_0(z)$  связаны уравнением гидростатики:

$$\frac{d}{dz} p_0(z) = -g \rho_0(z).$$

Рассмотрим малые колебания, возбуждаемые источниками силы и массы. Положим

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_0(z) + \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(z) + \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.86})$$

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0(z) + \tilde{p}(\mathbf{r}, t).$$

Тогда, подставляя (A.86) в (A.85) и линеаризируя систему, получаем систему уравнений для колебательных величин (отмеченных знаком тильда, который в дальнейшем опускается):

$$\begin{aligned} \rho_0(z) \left[ \frac{D}{Dt} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + w(\mathbf{r}, t) \frac{d}{dz} \mathbf{U}_0(z) \right] &= -\nabla_{\perp} p(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_{\perp}(\mathbf{r}, t), \\ \rho_0(z) \frac{D}{Dt} w(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial z} p(\mathbf{r}, t) - g \rho(\mathbf{r}, t) + F_z(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

$$\frac{D}{Dt} \rho(\mathbf{r}, t) + w(\mathbf{r}, t) \frac{d}{dz} \rho_0(z) + \rho_0(z) \left( \frac{d}{dz} w(\mathbf{r}, t) + \nabla_{\perp} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) = Q(\mathbf{r}, t),$$

$$\frac{D}{Dt} p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2(z)} \frac{D}{Dt} p(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{g} N^2(z) \rho_0(z) w(\mathbf{r}, t),$$

где  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ,  $w(\mathbf{r}, t)$  — соответственно горизонтальная и вертикальная колебательные компоненты скорости,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{U}_0(z) \nabla_{\perp}), \quad \nabla_{\perp} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\},$$

$\mathbf{F}_{\perp}(\mathbf{r}, t)$ ,  $F_z(\mathbf{r}, t)$  — проекции  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$  соответственно на горизонтальную плоскость и ось  $z$ , а

$$N^2(z) = -g \left\{ \frac{1}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz} + \frac{g}{c^2(z)} \right\}$$

— квадрат частоты Брента–Вайсяля, являющейся основной характеристикой внутренних гравитационных волн.

Если теперь ввести спектральные плотности для всех величин  $\varphi(t, \mathbf{R}, z)$  с помощью равенств  $(\mathbf{R} = \{x, y\})$

$$\varphi(t, \mathbf{R}, z) = \int d\omega \int d\mathbf{q} \varphi(\omega, \mathbf{q}, z) e^{-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{R}},$$

$$\varphi(\omega, \mathbf{q}, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dt \int d\mathbf{R} \varphi(t, \mathbf{R}, z) e^{i\omega t - i\mathbf{q}\mathbf{R}},$$

то после исключения из системы (A.87) плотности и горизонтальной составляющей скорости, приходим к замкнутой системе уравнений для давления и вертикальной скорости:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dz} + \frac{g}{c^2(z)} \right) p(\omega, \mathbf{q}, z) - iA(\omega, \mathbf{q}, z)\rho_0(z) \left( 1 - \frac{N^2(z)}{c^2(z)} \right) w(\omega, \mathbf{q}, z) = F_z(\omega, \mathbf{q}, z), \\ & \left( \frac{d}{dz} - \frac{g}{c^2(z)} - \frac{1}{A(\omega, \mathbf{q}, z)} \frac{dA(\omega, \mathbf{q}, z)}{dz} \right) w(\omega, \mathbf{q}, z) - \\ & - i \frac{A(\omega, \mathbf{q}, z)}{\rho_0(z)} \left( \frac{1}{c^2(z)} - \frac{q^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, z)} \right) p(\omega, \mathbf{q}, z) = \\ & = \frac{1}{\rho_0(z)} \left\{ Q(\omega, \mathbf{q}, z) + \frac{1}{A(\omega, \mathbf{q}, z)} \mathbf{q} F_{\perp}(\omega, \mathbf{q}, z) \right\}, \quad (\text{A.88}) \end{aligned}$$

где

$$A(\omega, \mathbf{q}, z) = \omega - \mathbf{q} \mathbf{U}_0(z),$$

а плотность и горизонтальная составляющая скорости определяются решением системы уравнений (A.88) с помощью равенств

$$\rho(\omega, \mathbf{q}, z) = \frac{1}{c^2(z)} p(\omega, \mathbf{q}, z) + \frac{iN^2(z)\rho_0(z)}{gA(\omega, \mathbf{q}, z)} w(\omega, \mathbf{q}, z), \quad (\text{A.89})$$

$$\mathbf{u}(\omega, \mathbf{q}, z) = \frac{1}{\rho_0(z)A(\omega, \mathbf{q}, z)} \left\{ -i\rho_0(z) \frac{d}{dz} w(\omega, \mathbf{q}, z) + \mathbf{q} p(\omega, \mathbf{q}, z) + i \mathbf{F}_{\perp}(\omega, \mathbf{q}, z) \right\}.$$

К системе уравнений (A.88) следует добавить линеаризованные краевые условия: равенство нулю колебательной вертикальной скорости на дне при  $z = H_0$  и условие на свободной поверхности при  $z = H$ , которые имеют вид

$$w(\omega, \mathbf{q}, H_0) = 0,$$

$$iA(\omega, \mathbf{q}, H)p(\omega, \mathbf{q}, H) + g\rho_0(H)w(\omega, \mathbf{q}, H) = iA(\omega, \mathbf{q}, H)p_a(\omega, \mathbf{q}),$$

где  $p_a(\omega, \mathbf{q})$  — спектральная компонента возмущений атмосферного давления над поверхностью океана. Вертикальное смещение свободной поверхности описывается равенством

$$\xi(\omega, \mathbf{q}, H) = \frac{i}{A(\omega, \mathbf{q}, H)} w(\omega, \mathbf{q}, H).$$

Вводя новые переменные — смещение жидких частиц и давление в таких частицах:

$$\xi(\omega, \mathbf{q}, z) = \frac{i}{A(\omega, \mathbf{q}, H)} w(\omega, \mathbf{q}, z),$$

$$P(\omega, \mathbf{q}, z) = p(\omega, \mathbf{q}, z) - g\rho_0(z)\xi(\omega, \mathbf{q}, z),$$

краевую задачу (A.88) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dz} - \frac{gq^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, z)} \right) \xi(\omega, \mathbf{q}, z) + \frac{1}{\rho_0(z)} \left( \frac{1}{c^2(z)} - \frac{q^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, z)} \right) P(\omega, \mathbf{q}, z) = \\ & = \frac{1}{\rho_0(z)A(\omega, \mathbf{q}, z)} \left( Q(\omega, \mathbf{q}, z) + \frac{\mathbf{q}}{A(\omega, \mathbf{q}, z)} \mathbf{F}_{\perp}(\omega, \mathbf{q}, z) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dz} + \frac{gq^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, z)} \right) P(\omega, \mathbf{q}, z) - \rho_0(z) \left( A^2(\omega, \mathbf{q}, z) - \frac{g^2 q^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, z)} \right) \xi(\omega, \mathbf{q}, z) = \\ & = F_z(\omega, \mathbf{q}, z) - \frac{ig}{A(\omega, \mathbf{q}, z)} \left( Q(\omega, \mathbf{q}, z) + \frac{\mathbf{q}}{A(\omega, \mathbf{q}, z)} \mathbf{F}_{\perp}(\omega, \mathbf{q}, z) \right), \end{aligned}$$

$$\xi(\omega, \mathbf{q}, H_0) = 0, \quad P(\omega, \mathbf{q}, H) = p_a(\omega, \mathbf{q}). \quad (\text{A.90})$$

Преимущество перехода от (A.88) к (A.90) заключается в том, что в (A.90) отсутствуют производные параметров стратификации среды.

Решение краевой задачи (A.90) является суммой двух частных решений: первое соответствует действию источников в правой части системы (A.90) в отсутствие  $p_a(\omega, \mathbf{q})$ , а второе — отсутствию источников  $\mathbf{F}(\omega, \mathbf{q}, z)$ ,  $Q(\omega, \mathbf{q}, z)$ . Здесь мы ограничимся рассмотрением второй краевой задачи.

Введем вспомогательные уравнения для функций  $\Phi(z, z_0) = \Phi(\omega, \mathbf{q}, z, z_0)$  и  $\Psi(z, z_0) = \Psi(\omega, \mathbf{q}, z, z_0)$ , описывающих поле точечного источника:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dz} - \frac{gq^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, z)} \right) \Phi(z, z_0) + K(z)\Psi(z, z_0) = 0, \\ & \left( \frac{d}{dz} + \frac{gq^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, z)} \right) \Psi(z, z_0) - L(z)\Phi(\omega, \mathbf{q}, z, z_0) = -\delta(z - z_0), \quad (\text{A.91}) \\ & \Phi(H_0, z_0) = 0, \quad \Psi(H, z_0) = 0, \end{aligned}$$

где функции

$$K(z) = K(\omega, \mathbf{q}, z) = \frac{1}{\rho_0(z)} \left( \frac{1}{c^2(z)} - \frac{q^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, z)} \right), \quad (\text{A.92})$$

$$L(z) = L(\omega, \mathbf{q}, z) = \rho_0(z) \left( A^2(\omega, \mathbf{q}, z) - \frac{g^2 q^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, z)} \right).$$

Положим теперь в системе уравнений (A.91)  $z_0 = H$ , т.е. рассмотрим действие источника, находящегося на свободной поверхности. Тогда система уравнений (A.91) примет вид

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dz} - \frac{gq^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, z)} \right) \Phi(z, H) + K(z)\Psi(z, H) = 0, \\ & \left( \frac{d}{dz} + \frac{gq^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, z)} \right) \Psi(z, H) - L(z)\Phi(z, H) = 0, \quad (\text{A.93}) \end{aligned}$$

$$\Phi(H_0, H) = 0, \quad \Psi(z, H)|_{z \rightarrow H} = 1.$$

Последнее краевое условие вытекает из условия скачка функции  $\Psi(z, z_0)$  при переходе через точку  $z_0$ :

$$\Psi(z_0 + 0, z_0) - \Psi(z_0 - 0, z_0) = -1.$$

Следовательно, решение рассматриваемой краевой задачи, связанной с действием атмосферного давления, можно записать в виде

$$\xi(\omega, \mathbf{q}, z) = p_a(\omega, \mathbf{q})\Phi(z, H), \quad P(\omega, \mathbf{q}, z) = p_a(\omega, \mathbf{q})\Psi(z, H). \quad (\text{A.94})$$

Далее действуем как и в предыдущих пунктах. Рассматривая решение задачи (А.93) как функцию параметра погружения  $H$  — положения свободной поверхности, можно переформулировать ее в задачу с начальными условиями:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial H}\Phi(z, H) &= \left\{ \frac{gq^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, H)} - L(H)\Phi_H \right\} \Phi(z, H), \\ \frac{\partial}{\partial H}\Psi(z, H) &= \left\{ \frac{gq^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, H)} - L(H)\Phi_H \right\} \Psi(z, H), \\ \Phi(z, H)|_{H \rightarrow z+0} &= \Phi_z, \quad \Psi(z, H)|_{H \rightarrow z+0} = 1,\end{aligned}\tag{A.95}$$

где функция  $\Phi_H = \Phi(H - 0, H)$  описывается уравнением Риккати:

$$\frac{d}{dH}\Phi_H = -K(H) + \frac{2gq^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, H)}\Phi_H - L(H)\Phi_H^2,\tag{A.96}$$

с начальным условием  $\Phi_{H \rightarrow H_0} = 0$ , вытекающим из краевых условий для системы (А.93). С учетом выражений (А.92) его можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\frac{d}{dH}\Phi_H &= \frac{1}{\rho_0(H)} \left( \frac{q^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, H)} - \frac{1}{c^2(H)} \right) + \frac{2gq^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, H)}\Phi_H + \\ &+ \rho_0(H) \left( \frac{g^2q^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, H)} - A^2(\omega, \mathbf{q}, H) \right) \Phi_H^2, \quad \Phi_{H \rightarrow H_0} = 0.\end{aligned}\tag{A.97}$$

Отметим, что для чисто акустических и внутренних гравитационных волн в отсутствие горизонтального течения жидкости, т.е. при  $\mathbf{U}_0(z) = 0$ , уравнение (А.97) упрощается ( $A(\omega, \mathbf{q}, H) \equiv \omega$ ). Так

- в случае акустических волн  $g = 0$  и, следовательно,

$$\frac{d}{dH}\Phi_H = -\frac{1}{\rho_0(H)\omega^2} \left[ \frac{\omega^2}{c^2(H)} - q^2 \right] - \rho_0(H)\omega^2\Phi_H^2, \quad \Phi_{H \rightarrow H_0} = 0,\tag{A.98}$$

- в случае внутренних гравитационных волн  $c^2(z) \rightarrow \infty$  и, следовательно,

$$\frac{d}{dH}\Phi_H = \frac{q^2}{\rho_0(H)\omega^2} + \frac{2gq^2}{\omega^2}\Phi_H + \rho_0(H) \left( \frac{g^2q^2}{\omega^2} - \omega^2 \right) \Phi_H^2, \quad \Phi_{H \rightarrow H_0} = 0.\tag{A.99}$$

В общем случае решение уравнений (А.95) имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi(z, H) &= \Phi_z \Psi(z, H), \\ \Psi(z, H) &= \exp \left\{ \int_z^H d\eta \left[ \frac{gq^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, \eta)} - L(\eta)\Phi_H \right] \right\}.\end{aligned}\tag{A.100}$$

Таким образом, поле излучения акустико-гравитационных волн от точечного источника, расположенного на свободной поверхности, простым образом (через квадратуру) связано с функцией  $\Phi_H = \Phi(H - 0, H)$ , описывающей поле на самой границе

от расположенного там же источника. Следует подчеркнуть также, что как в уравнение (А.96), так и в сопутствующие квадратуры для различных гидрофизических полей входят только параметры стратификации, но не их производные. Это позволяет численно интегрировать уравнение (А.96) и вычислять соответствующие квадратуры не только для модельных профилей параметров среды, обладающих хорошими свойствами гладкости, но и для реальных профилей, полученных путем зондирования океана. Производные параметров стратификации входят в равенства (А.90), описывающие другие гидрофизические параметры.

**Замечание А.11.** *Об акустических шумах в слоистом океане*

Вертикальные колебания свободной поверхности под действием атмосферного давления описываются формулой, вытекающей из формулы (А.94):

$$\xi(\omega, \mathbf{q}, H) = p_a(\omega, \mathbf{q})\Phi_H(\omega, \mathbf{q}),\tag{A.101}$$

т.е. функция  $\Phi_H(\omega, \mathbf{q})$  является передаточной функцией от атмосферного давления к свободной поверхности, учитывающей, разумеется, стратификацию среды, т.е. изменения с глубиной океана как плотности среды, так и скорости распространения акустических волн. Поле акустического давления внутри среды описывается формулой (А.94), где функция  $\Psi(\omega, \mathbf{q}, z, H)$ , согласно выражениям (А.100) и (А.92), имеет вид

$$\Psi(\omega, \mathbf{q}, z, H) = \exp \left\{ -\omega^2 \rho \int_z^H d\eta \Phi_H(\omega, \mathbf{q}) \right\}.\tag{A.102}$$

Предположим, что поле атмосферного давления на свободной поверхности,  $p_a(t, \mathbf{R})$ , — статистически однородное и изотропное в пространстве случайное поле, стационарное во времени, имеющее пространственно-временную спектральную функцию  $\mathfrak{R}_a(\omega, \mathbf{q})$ . Тогда поле вертикальных смещений свободной поверхности также будет статистически однородным и изотропным в пространстве и стационарным во времени случайным полем с пространственно-временной спектральной функцией

$$\mathfrak{R}_\xi(\omega, \mathbf{q}) = \mathfrak{R}_a(\omega, \mathbf{q})|\Phi_H(\omega, \mathbf{q})|^2.\tag{A.103}$$

Из формулы (А.103) видно, что каждая спектральная компонента поля смещения свободной поверхности пропорциональна спектральной компоненте поля атмосферного давления, но коэффициент пропорциональности определяется стратификацией среды. Следствием этого факта является то обстоятельство, что уже чисто пространственный (или временной) спектр поля смещения не совпадает с соответствующим спектром атмосферного давления. Так, например,

$$\mathfrak{R}_\xi(\omega) = \int d\mathbf{q} \mathfrak{R}_a(\omega, \mathbf{q})|\Phi_H(\omega, \mathbf{q})|^2.$$

Используя функцию  $\Phi(z, H) = \Phi(\omega, \mathbf{q}, z, H)$ , можно описать статистические характеристики гидрофизических параметров в глубине среды, индуцированные флуктуациями атмосферного давления. Это позволяет решать такие, например, задачи, как трансформация шумов в глубине океана. ♦

**Замечание А.12.** *О структуре решений уравнений метода погружения*

В простейшем случае распространения акустических волн в однородной среде ( $g = 0$ ,  $c = \text{const}$ ,  $\rho = \text{const}$ ,  $A(\omega, \mathbf{q}) = \omega$ ) решение уравнения (А.98) имеет вид

$$\Phi_H(\omega, \mathbf{q}) = -\frac{1}{\rho\omega^2} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - q^2} \operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - q^2} (H - H_0) \right).\tag{A.104}$$



В этом случае функция  $\Psi(z, H)$ , описывающая распределение поля акустического давления в среде, согласно (A.102) принимает вид

$$\Psi(\omega, \mathbf{q}, z, H) = \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{q}^2}(z - H_0)\right)}{\cos\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{q}^2}(H - H_0)\right)}. \quad (\text{A.105})$$

Из выражений (A.104) и (A.105) видно, что существуют такие значения  $\omega_n(\mathbf{q})$ , для которых знаменатель обращается в нуль, а передаточная функция  $\Phi_H(\omega, \mathbf{q})$  и функция  $\Psi(\omega, \mathbf{q}, z, H)$  обращаются в бесконечность, т. е. имеют одинаковые особенности полюсного характера. Дискретный набор таких значений  $\omega_n(\mathbf{q})$  суть собственные числа однородной краевой задачи, и им отвечают ненормированные собственные функции  $\Psi(\omega_n(\mathbf{q}), \mathbf{q}, z, H)$ .

Обозначим

$$q = \frac{\omega}{c} \cos \theta,$$

тогда собственные числа  $\theta_n$  описываются равенством

$$\sin \theta_n = \frac{\pi c}{\omega(H - H_0)} \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2(H - H_0)} \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где  $\lambda = 2\pi c/\omega$  — длина акустической волны.

Рассмотрим теперь подробнее случай экспоненциального распределения плотности среды при постоянстве других параметров и  $A(\omega, \mathbf{q}) = \omega$ . Если плотность среды возрастает с глубиной (в случае океана, например) по закону

$$\rho(z) = \rho_0 e^{2\alpha(H-z)},$$

то квадрат частоты Брента–Вайсяля описывается формулой

$$N^2 = g \left(2\alpha - \frac{g}{c^2}\right)$$

и решение уравнения (A.97) имеет вид

$$\Phi_H(\omega, \mathbf{q}) = K(H) \frac{\text{sh}[\Delta(\omega, \mathbf{q})(H - H_0)]}{u(\omega, \mathbf{q}, H - H_0)}, \quad (\text{A.106})$$

где функции

$$\Delta^2(\omega, \mathbf{q}) = \left(\frac{g\mathbf{q}^2}{\omega^2} - \alpha\right)^2 - K(H)L(H) = \alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \mathbf{q}^2 \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right), \quad (\text{A.107})$$

$$u(\omega, \mathbf{q}, x) = \left(\frac{g\mathbf{q}^2}{\omega^2} - \alpha\right) \text{sh}[\Delta(\omega, \mathbf{q})x] - \Delta(\omega, \mathbf{q}) \text{ch}[\Delta(\omega, \mathbf{q})x].$$

Решение (A.106) содержит много информации. Так, знак величины  $\Delta^2(\omega, \mathbf{q})$  указывает, с какими типами волн мы имеем дело (распространяющимися или затухающими), а условие  $\Delta^2(\omega, \mathbf{q}) = 0$ , или

$$\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \mathbf{q}^2 \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right) = 0, \quad (\text{A.108})$$

является дисперсионным уравнением для волн в неограниченном пространстве и определяет две ветви  $\omega = \omega(\mathbf{q})$ , соответствующие внутренним гравитационным и акустическим волнам. Равенство же

$$u(\omega, \mathbf{q}, H - H_0) = 0$$

при фиксированных значениях  $H, H_0$  определяет дисперсионное уравнение  $\omega = \omega(\mathbf{q})$  для однородной краевой задачи (A.91). Поскольку выражение (A.106) имеет особенности (полюсы на дисперсионной кривой), то следует, вообще говоря, включить в задачу малое затухание  $A \rightarrow A + i\gamma$ , обеспечивающее правильную регуляризацию задачи. ♦

**Замечание A.13.** Собственные значения и собственные функции краевой задачи (A.93)

Выше отмечалось, что полюсы функции  $\Phi_H(\omega, \mathbf{q})$  определяют собственные значения краевой задачи (A.93). Это свойство можно непосредственно использовать для нахождения собственных значений (т. е. дисперсионных кривых) и собственных функций.

Выражения (A.100) с помощью уравнения (A.96) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\omega, \mathbf{q}, z, H) &= \Phi_H(\omega, \mathbf{q}) \exp \left\{ \int_z^H d\eta \left[ \frac{K(\omega, \mathbf{q}, \eta)}{\xi_\eta(\omega, \mathbf{q})} - \frac{g\mathbf{q}^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, \eta)} \right] \right\}, \\ \Psi(\omega, \mathbf{q}, z, H) &= \frac{\Phi_H(\omega, \mathbf{q})}{\Phi_z(\omega, \mathbf{q})} \exp \left\{ \int_z^H d\eta \left[ \frac{K(\omega, \mathbf{q}, \eta)}{\xi_\eta(\omega, \mathbf{q})} - \frac{g\mathbf{q}^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, \eta)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

Введем теперь в рассмотрение функцию

$$f_H(\omega, \mathbf{q}) = 1/\Phi_H(\omega, \mathbf{q}),$$

которая описывается уравнением Риккати, вытекающим из (A.96),

$$\frac{d}{dH} f_H(\omega, \mathbf{q}) = L(\omega, \mathbf{q}, H) - \frac{2g\mathbf{q}^2}{A^2(\omega, \mathbf{q}, z)} f_H(\omega, \mathbf{q}) + K(\omega, \mathbf{q}, H) f_H^2(\omega, \mathbf{q}). \quad (\text{A.110})$$

Решение краевой задачи (A.93) имеет резонансную структуру. Это означает, что полюсы функции  $\Phi_H(\omega, \mathbf{q})$  (или нули функции  $f_H(\omega, \mathbf{q})$ ) описывают собственные значения (дисперсионные кривые) и собственные функции однородной краевой задачи (A.93). А именно, собственные значения (дисперсионные кривые) для нашей задачи описываются уравнением

$$f_H(\omega_n(\mathbf{q}, H), \mathbf{q}) = 0,$$

а квадратуры (A.109) будут описывать ненормированные собственные функции

$$\begin{aligned} \Phi_n(\omega_n(\mathbf{q}, H), \mathbf{q}, z, H) &= \exp \left\{ \int_z^H d\eta \left[ \frac{K(\omega_n(\mathbf{q}, H), \mathbf{q}, \eta)}{\Phi_\eta(\omega_n(\mathbf{q}, H), \mathbf{q})} - \frac{g\mathbf{q}^2}{A^2(\omega_n(\mathbf{q}, H), \mathbf{q}, \eta)} \right] \right\}, \\ \Psi_n(\omega_n(\mathbf{q}, H), \mathbf{q}, z, H) &= \\ &= \frac{1}{\Phi_z(\omega_n(\mathbf{q}, H), \mathbf{q})} \exp \left\{ \int_z^H d\eta \left[ \frac{K(\omega_n(\mathbf{q}, H), \mathbf{q}, \eta)}{\Phi_\eta(\omega_n(\mathbf{q}, H), \mathbf{q})} - \frac{g\mathbf{q}^2}{A^2(\omega_n(\mathbf{q}, H), \mathbf{q}, \eta)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.111})$$

Эту особенность можно непосредственно использовать для нахождения спектральных характеристик краевой задачи. В частности, для них можно непосредственно получить динамические уравнения (задачу с начальными условиями), пригодные для анализа как детерминированных, так и статистических задач [13–16, 73, 137].

Анализ собственных значений основывается на анализе нулей решения уравнения Риккати, которое запишем в общем виде

$$\frac{d}{dH} f_H = a_H(\lambda) + b_H(\lambda) f_H + c_H(\lambda) f_H^2, \quad (\text{A.112})$$

где  $\lambda$  — спектральный параметр. Собственные значения определяются как решения уравнения

$$f_H(\lambda_H) = 0, \quad (\text{A.113})$$

где мы ввели зависимость спектрального параметра от параметра  $H$ . Так как собственные значения являются функциями параметра  $H$ , то они удовлетворяют уравнению

$$a_H(\lambda_H) + A_H(\lambda_H) \frac{d}{dH} \lambda_H = 0, \quad (\text{A.114})$$

где

$$A_H(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} f_H(\lambda),$$

с начальным условием при  $H \rightarrow 0$  (здесь считаем, что  $H_0 = 0$ ), определяемым из асимптотического поведения конкретного собственного значения. ♦

### A.2.2. Волны в периодически неоднородных средах

В предыдущем параграфе данного приложения были получены уравнения погружения для широкого класса краевых задач, связанных с распространением волн в слоистых неоднородных средах. Существующие подходы к анализу подобных задач в настоящее время связаны с использованием тех или иных приближенных методов, и представляет определенный интерес провести сопоставление этих результатов с точным решением задачи. Для нахождения точных решений удобно воспользоваться уравнениями погружения, полученными выше. В качестве иллюстрации возможностей метода погружения мы рассмотрим простейшую постановку задачи о распространении плоской волны в слое периодически неоднородной среды.

Задача о волнах в периодических средах традиционно привлекает внимание физиков ввиду ее значимости практически для всех областей физики. Обзор современного состояния теории содержится в работе [95]. Обычно исследователи ограничиваются анализом дисперсионных соотношений (существования зон прозрачности и непрозрачности), т. е. связи частоты монохроматической волны с ее волновым числом, при котором возможно распространение волны. Однако представляет большой интерес и задача о распространении конкретной волны (с заданными частотой и волновым числом) в периодически неоднородных средах. Примером такой задачи является задача о распространении радиоволн в ионосфере Земли, неоднородности которой создаются мощной волной накачки. При анализе таких задач уже используются различные приближенные методы, главным из которых является метод усреднения по быстрым осцилляциям (переход к укороченным уравнениям). Этот метод не является, строго говоря, асимптотическим, и его главное достоинство — простота и физическая наглядность получаемых результатов. Интересно сравнить результаты этого приближенного метода с точным решением задачи [43]. Отметим, что численное моделирование распространения временных импульсов в периодически неоднородных средах было выполнено в работах [30–32, 90].

### Падение волны на слой периодически неоднородной среды

Пусть слой неоднородной среды, как и ранее, занимает часть пространства  $L_0 < x < L$ , и справа из однородного полупространства  $x < L$  на него падает плоская волна единичной амплитуды  $e^{-ik(x-L)}$ . Тогда волновое поле внутри слоя описывается краевой задачей для уравнения Гельмгольца (A.14) на с. 103:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dx^2} + k_0^2 [1 + \varepsilon(x)] \right) u(x) &= 0, \\ \left( \frac{d}{dx} + ik_0 \right) u(x) \Big|_{x=L_0} &= 0, \quad \left( \frac{d}{dx} - ik_0 \right) u(x) \Big|_{x=L} = -2ik_0. \end{aligned} \quad (\text{A.115})$$

Считаем, что вне слоя  $\varepsilon(x) = 0$ . Внутри же слоя функцию  $\varepsilon(x)$  зададим в виде

$$\varepsilon(x) = -4\mu \cos(2Kx) + 2i\gamma, \quad (\text{A.116})$$

где  $2\gamma$  — коэффициент затухания.

Комплексные коэффициенты отражения волны от слоя и прохождения определяются через решение краевой задачи (A.115) с помощью равенств

$$R_L = u(L) - 1, \quad T_L = u(L_0).$$

Переходя к безразмерным расстояниям (т. е. полагая  $k_0 = 1$ ), перепишем краевую задачу (A.115) в виде  $(\Delta = (K - k_0)/k_0)$

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dx^2} + [1 - 4\mu \cos(2(1 + \Delta)x) + 2i\gamma] \right) u(x) &= 0, \\ \left( i \frac{d}{dx} - 1 \right) u(x) \Big|_{x=L_0} &= 0, \quad \left( i \frac{d}{dx} + 1 \right) u(x) \Big|_{x=L} = 2. \end{aligned} \quad (\text{A.117})$$

Уравнение (A.117) без учета краевых условий является *уравнением Матье* и хорошо изучено (см., например, [2]). Так, при  $\gamma = 0$  имеются области (на плоскости  $\mu, \Delta$ ), соответствующие параметрической неустойчивости (параметрический резонанс), первая из которых изображена на рис. A.3 (заштрихованная область).

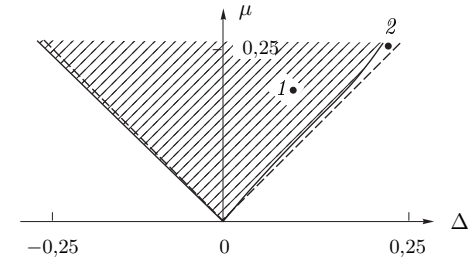


Рис. A.3. Зоны параметрической неустойчивости для уравнения (A.117) в плоскости параметров  $(\mu, \Delta)$  при  $\gamma = 0$

При  $\mu \rightarrow 0$  эти области соответствуют значениям  $\Delta_n = 1/n - 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ( $K = k_0/n$ ). Для рассматриваемой краевой задачи эти области соответствуют повышенной отражательной способности слоя. Вне этих областей волна относительно свободно должна проходить через слой среды.

Решение краевой задачи (A.117) можно записать в виде, содержащем *функции Матье* и их производные. Однако, несмотря на то что эти функции хорошо изучены и достаточно подробно протабулированы, построить картину поведения волнового поля внутри слоя среды (и, следовательно, коэффициентов отражения и прохождения волн) далеко не просто ввиду сильной изменчивости волнового поля. Гораздо проще получить решение краевой задачи (A.117) непосредственно, используя численные методы. При этом удобно воспользоваться уравнениями погружения (A.25), с. 105, рассматривая зависимость решения краевой задачи (A.117) от параметра  $L$ . Эти уравнения в нашем случае имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} u(x, L) &= i \left\{ 1 + \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}(L) (1 + R_L) \right\} u(x, L), \quad u(x, L) \Big|_{L=x} = 1 + R_x, \\ \frac{d}{dL} R_L &= 2iR_L + \frac{i}{2} \tilde{\varepsilon}(L) (1 + R_L)^2, \quad R_{L_0} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.118})$$

где  $\tilde{\varepsilon}(L) = -4\mu \cos(2(1 + \Delta)L) + 2i\gamma$ .

Первое уравнение в (A.118) интегрируется. Таким образом, решение краевой задачи (A.117) сводится к решению уравнения Риккати и вычислению квадратуры. Однако при отсутствии затухания ( $\gamma = 0$ ) квадратура для интенсивности волнового поля  $I(x, L) = |u(x, L)|^2$  вычисляется (см. (1.17) на с. 12):

$$I(x, L) = |1 + R_x|^2 \frac{1 - |R_L|^2}{1 - |R_x|^2}, \quad (\text{A.119})$$

и решение задачи сводится к решению единственного уравнения Риккати.

Остановимся на приближенном решении уравнения Риккати, основанном на усреднении решения задачи по быстрым осцилляциям.

Представим коэффициент отражения  $R_L$  в виде

$$R_L = -i\rho_L e^{2i(1+\Delta)L}.$$

Тогда для функции  $\rho_L$  из (A.118) вытекает уравнение

$$\frac{d}{dL}\rho_L = -2(\gamma + i\Delta)\rho_L + \mu(1 - \rho_L^2) + \{\dots\}, \quad \rho_{L_0} = 0. \quad (\text{A.120})$$

Здесь через  $\{\dots\}$  обозначены члены, содержащие осциллирующие функции  $e^{\pm 2i(1+\Delta)L}$ ,  $e^{\pm 4i(1+\Delta)L}$ . Предполагая малость изменения функции  $\rho_L$  на периоде осцилляций, можно усреднить (A.120) по этим «быстрым» осцилляциям. В результате получаем приближенное уравнение

$$\frac{d}{dL}\rho_L = -2(\gamma + i\Delta)\rho_L + \mu(1 - \rho_L^2), \quad \rho_{L_0} = 0,$$

решение которого имеет вид ( $\alpha = \sqrt{\mu^2 + (\gamma + i\Delta)^2}$ )

$$\rho_L = \frac{\mu}{\alpha} \frac{\text{sh } \alpha(L - L_0)}{\text{ch } \alpha(L - L_0) + \frac{\gamma + i\Delta}{\alpha} \text{sh } \alpha(L - L_0)}. \quad (\text{A.121})$$

Рассмотрим подробнее случай отсутствия затухания ( $\gamma = 0$ ). В этом случае квадрат модуля коэффициента отражения  $|R_L|^2 = |\rho_L|^2$  и, следовательно,

$$|R_L|^2 = \frac{\text{sh}^2 \alpha(L - L_0)}{\text{ch}^2 \alpha(L - L_0) - \frac{\Delta^2}{\mu^2}}, \quad \alpha = \sqrt{\mu^2 - \Delta^2}. \quad (\text{A.122})$$

Из формулы (A.119) получаем в этом случае выражение для интенсивности волнового поля внутри среды:

$$I(x, L) = \frac{\text{ch } 2\alpha(x - L_0) - \frac{\Delta^2}{\mu^2}}{\text{ch}^2 \alpha(L - L_0) - \frac{\Delta^2}{\mu^2}}. \quad (\text{A.123})$$

В предельном случае  $L_0 \rightarrow -\infty$ , соответствующем падению волны на полупространство  $x < L$ , получаем выражение

$$I(x, L) = e^{-2\alpha(L-x)}. \quad (\text{A.124})$$

Следствием выражений (A.122)–(A.124) является тот факт, что при  $\mu^2 \geq \Delta^2$  с увеличением толщины слоя  $|R_L|^2 \rightarrow 1$  и интенсивность волнового поля экспоненциально затухает с глубиной. В случае же  $\mu^2 < \Delta^2$  все функции являются периодическими в зависимости от толщины слоя. Из приведенного вывода формул (A.122)–(A.124) ясно, что он не может быть использован при  $\Delta \sim -1$ . Кроме того, можно ожидать, что в области параметров  $\mu \sim |\Delta|$ , где происходит замена одного типа решений на другой, формулы (A.122)–(A.124) также несправедливы, поскольку они получены не путем асимптотического анализа, а фактически из физических соображений. Область параметров  $\mu^2 \geq \Delta^2$ , где изложенная теория предсказывает повышенную величину отражательной способности слоя среды, выделена на рис. A.3 пунктирными линиями.

Численный анализ задачи прежде всего показывает, что действительно внутри областей прозрачности решение задачи в отсутствие поглощения является периодическим, а внутри зон непрозрачности появляется повышенная отражательная способность, характеризующаяся, однако, сильной изменчивостью. В зонах прозрачности (вдали от границ) решение хорошо описывается приближенным методом усреднения. Также хорошо описывается этим методом и решение внутри первой зоны непрозрачности вдали от границ. На рис. A.4 изображено поведение величины  $|R_L|^2$  в зависимости от толщины слоя  $L$  и распределение интенсивности волны  $I(x, L)$  внутри слоя, соответствующее  $L = 20$ , при значениях параметров, соответствующих точке 1 на рис. A.3. Вблизи же границ зон положение усложняется. Так, для значений параметров, соответствующих точке 2 на рис. A.3, поведение коэффициента отражения в зависимости от толщины слоя и распределение интенсивности поля в слое при  $L = 100$  приведены на рис. A.5.

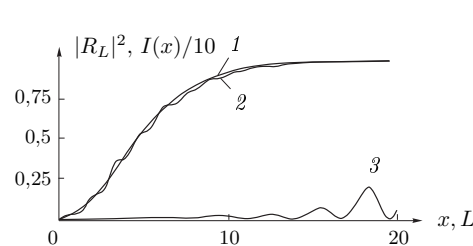


Рис. A.4. Зависимость  $|R_L|^2$  от толщины слоя: кривая 1 соответствует формуле (A.122); 2 — расчетная кривая; 3 — распределение  $I(x)/10$  при  $L = 20$  ( $\mu = 0,2$ ,  $\Delta = 0,1$ ,  $\gamma = 0$ )

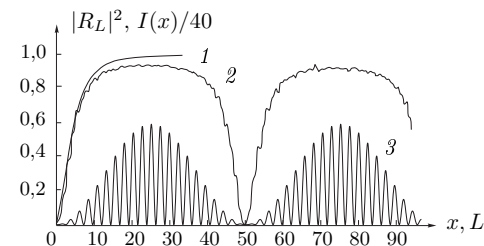


Рис. A.5. Зависимость  $|R_L|^2$  от толщины слоя: кривая 1 соответствует формуле (A.122); 2 — расчетная кривая; 3 — распределение  $I(x)/40$  при  $L = 100$  ( $\mu = 0,25$ ,  $\Delta = 0,24$ ,  $\gamma = 0$ )

Достаточно тонкий слой (до  $L \sim 10$ ) ведет себя как отражающий слой, хорошо описываемый формулой метода усреднения (A.122), однако при дальнейшем увеличении толщины слоя отражательная способность его падает. При  $L \approx 53$  слой становится абсолютно прозрачным. Далее картина периодически повторяется, в соответствии с тем, что параметры точки 2 на рис. A.3 выбраны в зоне прозрачности.

Приведенные выше расчеты соответствуют отсутствию затухания. При наличии затухания поведение коэффициента отражения было качественно одинаковым как в зонах прозрачности, так и вне их. При достаточно большой толщине слоя значение модуля коэффициента отражения носит характер периодической функции даже в зоне непрозрачности.

### Брэгговский резонанс в неоднородных средах

Выше было показано, что для  $\varepsilon(x)$  вида (A.116) при условии  $\mu^2 \geq \Delta^2$ , соответствующем первой зоне параметрической неустойчивости для уравнения Матье, модуль коэффициента отражения  $|R_L|$  при увеличении толщины слоя стремится к единице и интенсивность волнового поля  $I(x) = |u(x, L)|^2$ , усредненная по осцилляциям, экспоненциально спадает от границы  $x = L$ .

При наличии отражающей границы  $x = L_0$  (т. е. при краевом условии  $u(L_0, L) = 0$ ) и функции  $\tilde{\varepsilon}(x)$  вида

$$\tilde{\varepsilon}(x) = -4\mu \cos(2(1 + \Delta)x + \delta) \quad (|\Delta| < \mu), \quad (\text{A.125})$$

отличающегося от (A.116) наличием постоянной составляющей фазы у  $\tilde{\varepsilon}(x)$ , интенсивность волнового поля при определенных значениях параметра  $\delta$  может, наоборот, экспоненциально нарастать вглубь среды, что соответствует возбуждению резонатора зеркало–решетка, работающего на брэгговском резонансе. В самом деле, в этом случае  $|R_L| = 1$  и, следовательно, коэффициент отражения имеет структуру

$$R_L = e^{i\phi_L},$$

а уравнения погружения (A.118) принимают вид (считаем здесь, что  $L_0 = 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} I(x, L) &= -I(x, L) \tilde{\varepsilon}(L) \sin \phi_L, \quad I(x, x) = 2(1 + \cos \phi_x), \\ \frac{d}{dL} \phi_L &= 2 + \tilde{\varepsilon}(L) (1 + \cos \phi_L)^2, \quad \phi_0 = \pi. \end{aligned} \quad (\text{A.126})$$

Подставляя (A.125) в (A.126) и усредняя по быстрым осцилляциям ( $\phi_L = \phi_0 + 2L$ ), можно вместо (A.126) получить приближенную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \ln I(x, L) &= 2\mu \sin[\phi_L - 2(1 + \Delta)L - \delta], \\ \frac{\partial}{\partial L} \phi_L &= 2 - 2\mu \cos[\phi_L - 2(1 + \Delta)L - \delta]. \end{aligned} \quad (\text{A.127})$$

Введем вместо  $\phi_L$  новую переменную  $\tilde{\phi}_L$ :

$$\tilde{\phi}_L = \phi_L - 2(1 + \Delta)L - \delta.$$

Тогда система (A.126) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \ln I(x, L) &= 2\mu \sin \tilde{\phi}_L, \\ \frac{\partial}{\partial L} \tilde{\phi}_L &= -2(\Delta + \mu \cos \tilde{\phi}_L), \quad \tilde{\phi}_0 = \pi - \delta. \end{aligned} \quad (\text{A.128})$$

Теперь ясно, что если  $\Delta + \mu \cos \tilde{\phi}_0 = 0$ , т. е.

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\Delta}{\mu}, \quad (\text{A.129})$$

то  $\tilde{\phi}_L \equiv \tilde{\phi}_0$ , и, следовательно,

$$I(x, L) = 2(1 + \cos \phi_x) \exp \left\{ 2\sqrt{(\mu^2 - \Delta^2)}(L - x) \right\}, \quad (\text{A.130})$$

т. е. интенсивность экспоненциально нарастает вглубь среды, достигая максимума в окрестности границы, на которой  $I(0, L) = 0$ .

Описанный эффект получен на основе приближенного метода (метода усреднения) и является весьма «тонким», так как небольшие изменения величины  $\delta$  ведут к срыву резонансного возбуждения.

В работе [44] численно интегрировались уравнения (A.118), (A.119) с  $\tilde{\varepsilon}(x)$  вида (A.125) и начальным условием  $R_0 = -1$  для различных значений параметров  $\mu$ ,  $\Delta$  и  $\delta$ . Явление параметрического возбуждения резонатора наблюдалось как внутри первой зоны параметрической неустойчивости, так и вне ее. На рис. A.6 представлены примеры такого возбуждения.

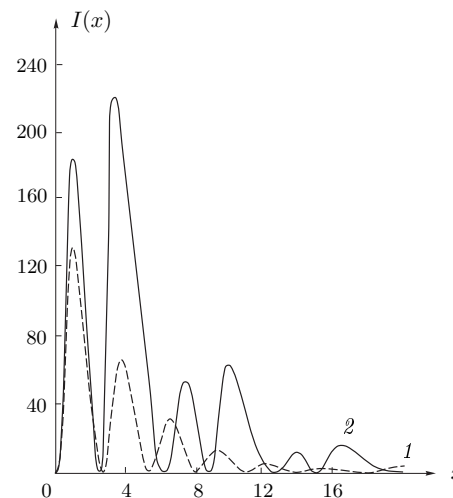


Рис. A.6. Параметрическое возбуждение резонатора зеркало–решетка: кривая 1 соответствует  $\mu = 0,2$ ,  $\Delta = 0,15$ ,  $\delta = \pi/2 - \arcsin(\Delta/\mu) + 0,1$ ; 2 —  $\mu = 0,25$ ,  $\Delta = -0,5$ ,  $\delta = \pi/2 - 0,75$

Кривая 1 соответствует распределению интенсивности внутри среды для первой зоны, а кривая 2 соответствует распределению интенсивности для второй зоны. Небольшие изменения параметра  $\delta$  на  $\pm 0,05$  ведут к падению интенсивности волны в среде по крайней мере на порядок.

### A.2.3. Краевая стационарная нелинейная одномерная задача о самовоздействии волны

#### Общие уравнения

Рассмотрим теперь задачу о падении плоской волны  $U(x) = v e^{-ik_0(x-L)}$ , где  $v$  — ее амплитуда, на слой нелинейной среды, занимающий часть пространства  $L_0 < x < L$ , для которой функция

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(x, J(x))$$

также зависит от интенсивности волнового поля  $J(x) = |U(x)|^2$  внутри среды (*нелинейная задача о самовоздействии волны*). Вне слоя среды, как и ранее, считаем, что  $\varepsilon(x) = 0$ . Формулировке и детальному анализу этой задачи для детерминированного случая посвящены работы [4, 51, 56, 86] (см. также [36]), а для статистического случая — [107, 115, 143].

Рассматриваемая стационарная нелинейная задача о самовоздействии волны описывается нелинейной краевой задачей

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dx^2} + k_0^2 [1 + \varepsilon(x, J(x))] \right) U(x) &= 0, \\ \left( \frac{d}{dx} + ik_0 \right) U(x) \Big|_{x=L_0} &= 0, \quad \left( \frac{d}{dx} - ik_0 \right) U(x) \Big|_{x=L} = -2ik_0 v. \end{aligned} \quad (\text{A.131})$$

Отметим также, что и задачи, описываемые нелинейным уравнением Шредингера, аналогичны краевой задаче (A.131) (см. [131–134]).

Представим решение этой задачи в виде

$$U(x) = vu(x).$$

Тогда для функции  $u(x)$  получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dx^2} + k_0^2 [1 + \varepsilon(x, wI(x))] \right) u(x) &= 0, \\ \left( \frac{d}{dx} + ik_0 \right) u(x) \Big|_{x=L_0} &= 0, \quad \left( \frac{d}{dx} - ik_0 \right) u(x) \Big|_{x=L} = -2ik_0, \end{aligned} \quad (\text{A.132})$$

где  $w = |v|^2$  — интенсивность падающей волны, а  $I(x) = |u(x)|^2$  — интенсивность волнового поля внутри слоя среды.

Решение краевой задачи (A.132) зависит от параметров  $L$  и  $w$ , т. е.

$$u(x) = u(x, L, w).$$

Для вывода уравнений погружения воспользуемся методом интегрального уравнения. Краевая задача (A.132) эквивалентна интегральному уравнению (A.43), которое в нашем случае принимает вид

$$u(x, L, w) = e^{ik_0(L-x)} + i \frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0|x-\xi|} \varepsilon(\xi, wI(\xi, L, w)) u(\xi, L, w). \quad (\text{A.133})$$

Продифференцируем теперь уравнение (A.133) по параметру  $L$ . Для производной  $\frac{\partial}{\partial L} u(x, L, w)$  получаем интегральное уравнение вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} u(x, L, w) &= a(L, w) e^{ik_0(L-x)} + i \frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0|x-\xi|} \left\{ \varepsilon(\xi, wI(\xi, L, w)) \frac{\partial u(\xi, L, w)}{\partial L} + \right. \\ &\quad \left. + u(\xi, L, w) \frac{\partial \varepsilon(\xi, wI(\xi, L, w))}{\partial I(\xi, L, w)} \frac{\partial I(\xi, L, w)}{\partial L} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.134})$$

где теперь

$$a(L, w) = ik_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L, wI_L(w)) u_L(w) \right\}, \quad (\text{A.135})$$

а функции

$$u_L(w) = u(L, L, w), \quad I_L(w) = I(L, L, w).$$

Положим

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x, L, w) = a(L, w) u(x, L, w) + \psi(x, L, w).$$

Тогда для функции  $\psi(x, L, w)$  получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \psi(x, L, w) &= i \frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0|x-\xi|} \varepsilon(\xi, wI(\xi, L, w)) \psi(\xi, L, w) + \\ &\quad + i \frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0|x-\xi|} u(\xi, L, w) \frac{\partial \varepsilon(\xi, wI(\xi, L, w))}{\partial I(\xi, L, w)} \frac{\partial I(\xi, L, w)}{\partial L}. \end{aligned} \quad (\text{A.136})$$

Продифференцируем теперь уравнение (A.133) по параметру  $w$ . Для производной  $\frac{\partial}{\partial w} u(x, L, w)$  получаем интегральное уравнение вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} u(x, L, w) &= i \frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0|x-\xi|} \varepsilon(\xi, wI(\xi, L, w)) \frac{\partial}{\partial w} u(\xi, L, w) + \\ &\quad + i \frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0|x-\xi|} u(\xi, L, w) \frac{\partial \varepsilon(\xi, wI(\xi, L, w))}{w \partial I(\xi, L, w)} \left[ 1 + w \frac{\partial}{\partial w} \right] I(\xi, L, w). \end{aligned} \quad (\text{A.137})$$

Исходя из определения величины  $I(x, L, w) = u(x, L, w)u^*(x, L, w)$ , где  $u^*(x, L, w)$  — комплексно сопряженное волновое поле, с учетом равенства (A.135) можно написать соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} I(x, L, w) &= [a(L, w) + a^*(L, w)] I(x, L, w) + \\ &\quad + u(x, L, w) \psi^*(x, L, w) + u^*(x, L, w) \psi(x, L, w), \\ \frac{1}{w} \left( I(x, L, w) + w \frac{\partial I(x, L, w)}{\partial w} \right) &= \frac{I(x, L, w)}{w} + \\ &\quad + u(x, L, w) \frac{\partial u^*(x, L, w)}{\partial w} + u^*(x, L, w) \frac{\partial u(x, L, w)}{\partial w}, \end{aligned}$$

и при условии

$$\psi(x, L, w) = w [a(L, w) + a^*(L, w)] \frac{\partial}{\partial w} u(x, L, w)$$

уравнения (A.136) и (A.143) совпадают. Таким образом, предположив единственность решения задачи, получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x, L, w) = \left[ a(L, w) + wb(L, w) \frac{\partial}{\partial w} \right] u(x, L, w) \quad (x < L), \quad (\text{A.138})$$

где обозначено

$$b(L, w) = a(L, w) + a^*(L, w), \quad (\text{A.139})$$

которое можно рассматривать как дифференциальное уравнение, если к нему добавить начальное условие при  $L \rightarrow x$ :

$$u(x, L, w)|_{L=x} = u_x(w). \quad (\text{A.140})$$

Для функции  $u_L(w)$  имеем

$$\frac{\partial}{\partial L} u_L(w) = \frac{\partial}{\partial L} u(x, L, w) \Big|_{x=L} + \frac{\partial}{\partial x} u(x, L, w) \Big|_{x=L}. \quad (\text{A.141})$$

Первое слагаемое в правой части (A.141) определяется уравнением (A.138), в котором нужно положить  $x = L$ , а второе — краевым условием в (A.132). В результате получаем замкнутое нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} u_L(w) = 2ik_0 [u_L(w) - 1] + i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L, w I_L(w)) u_L^2(w) + \\ + wb(L, w) \frac{\partial}{\partial w} u_L(w) \quad (I_L(w) = |u_L(w)|^2) \end{aligned} \quad (\text{A.142})$$

с начальным условием

$$u_{L_0}(w) = 1,$$

вытекающим из (A.132). Уравнения (A.138), (A.142) полностью эквивалентны как интегральному уравнению (A.133), так и исходной краевой задаче (A.132), которая сведена теперь к задаче с начальными условиями. Это и есть уравнения метода погружения для данной задачи.

Если в уравнении (A.138) положить  $x = L_0$ , то получим уравнение для коэффициента прохождения волны  $T_L(w) = u(L_0, L, w)$ :

$$\frac{\partial}{\partial L} T_L(w) = \left[ a(L, w) + wb(L, w) \frac{\partial}{\partial w} \right] T_L(w), \quad T_L(w) = 1. \quad (\text{A.143})$$

Коэффициент отражения волны равен  $\rho_L(w) = u_L(w) - 1$  и описывается замкнутым уравнением, вытекающим из (A.142):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \rho_L(w) = 2ik_0 \rho_L(w) + i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L, w |1 + \rho_L(w)|^2) (1 + \rho_L(w))^2 + \\ + wb(L, w) \frac{\partial}{\partial w} \rho_L(w), \quad \rho_{L_0}(w) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.144})$$

Если среда линейна, то исчезает зависимость от  $w$  и все уравнения переходят в соответствующие уравнения линейной задачи. Отметим, что следствием (A.138) является уравнение для интенсивности волнового поля  $J(x, L, w) = w|u(x, L, w)|^2$ :

$$\frac{\partial}{\partial L} J(x, L, w) = wb(w) \frac{\partial}{\partial w} J(x, L, w), \quad (\text{A.145})$$

$$J(x, x, w) = J_x(w) = w|u_x(w)|^2.$$

Уравнения в частных производных первого порядка, как хорошо известно, эквивалентны системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Если ввести характеристические кривые

$$w_L = w(L, w_0)$$

согласно равенству

$$\frac{d}{dL} w_L = -b(L, w_L) w_L, \quad w_{L_0} = w_0, \quad (\text{A.146})$$

то поле на границе слоя  $u_L(w)$  вдоль характеристик будет описываться уравнением ( $I_L = |u_L|^2$ )

$$\frac{d}{dL} u_L = 2ik_0 [u_L - 1] + i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L, w_L I_L) u_L^2, \quad u_{L_0} = 1, \quad (\text{A.147})$$

полностью совпадающим по внешнему виду с уравнением линейной задачи, а уравнение (A.145) перейдет в равенство

$$\frac{d}{dL} J(x, L) = 0, \quad J(x, x) = J_x = w_x |u_x|^2, \quad (\text{A.148})$$

и, следовательно, интенсивность волнового поля внутри среды остается постоянной на характеристике, т. е.

$$J(x, L) = J_x = w_x |u_x|^2. \quad (\text{A.149})$$

Таким образом, интенсивность волны внутри среды полностью определяется решением задачи (A.146), (A.147), т. е. значением поля на границе слоя. При этом, если мы знаем динамику характеристик  $w_L$  в зависимости от  $L$  и распределение интенсивности волны внутри среды для какой-либо фиксированной толщины слоя  $J(x, L)$ , то для любой другой толщины слоя  $L_1 \leq L$  поведение интенсивности внутри среды остается без изменения, но соответствует уже интенсивности падающей волны  $w_{L_1}$ , т. е.

$$J(x, L_1) = J(x, L).$$

Следовательно, равенство (A.149) отражает свойство инвариантности распределения интенсивности волнового поля внутри слоя среды по отношению к изменению толщины слоя и интенсивности волны, падающей на слой. Это свойство инвариантности является весьма общим и обобщается на трехмерные задачи.

В силу (A.149) при  $x = L_0$

$$J(0, L) = w_0.$$

Учитывая, что поле на границе слоя среды  $x = L_0$  определяет комплексный коэффициент прохождения волны через слой среды  $T_L = u(L_0, L)$ , для квадрата модуля коэффициента прохождения волны получаем выражение

$$|T_L|^2 = \frac{1}{w_L} J(L_0, L) = \frac{w_0}{w_L},$$

которое раскрывает физический смысл характеристик  $w_L = w(L, w_0)$ , а сама величина  $|T_L|^2$  описывается уравнением

$$\frac{d}{dL} |T_L|^2 = b(L, w_L) |T_L|^2, \quad |T_{L_0}|^2 = 1.$$

При наличии затухания в среде и при увеличении толщины слоя интенсивность волны на границе  $x = L_0$  (и, следовательно, величина  $|T_L|^2$ ) должна уменьшаться. Поэтому ясно, что для достаточно больших  $L$  величина  $w_L$  должна расти с увеличением  $L$ .

Введем действительную и мнимую части волнового поля на характеристике:

$$u_L = R(L) + iS(L).$$

Тогда уравнения (A.146), (A.147) примут вид

$$\frac{d}{dL} w_L = [\gamma(L, J_L) R(L) + \varepsilon_1(L, J_L) S(L)] w_L, \quad w_{L_0} = w_0,$$

$$\frac{d}{dL} R(L) = -2S(L) - \varepsilon_1(L, J_L) R(L)S(L) - \frac{1}{2} \gamma(L, J_L) [R^2(L) - S^2(L)], \quad (\text{A.150})$$

$$\frac{d}{dL} S(L) = 2[R(L) - 1] + \frac{1}{2} \varepsilon_1(L, J_L) [R^2(L) - S^2(L)] - \gamma(L, J_L) R(L)S(L),$$

где

$$J_L = w_L [R^2(L) + S^2(L)].$$

Квадрат модуля коэффициента отражения волны от слоя среды определяется выражением

$$|\rho_L|^2 = [R(L) - 1]^2 + S^2(L).$$

При  $\gamma = 0$  из (A.150) следует равенство

$$|\rho_L|^2 + |T_L|^2 = 1,$$

соответствующее сохранению плотности потока энергии. Отметим, что если

$$\varepsilon(L, J_L) \equiv \varepsilon(J_L) = \varepsilon_1(J_L) + i\gamma(J_L),$$

где  $\varepsilon_1^*(J) = \varepsilon_1(J)$ , а величина  $\gamma(J)$  описывает затухание волны, то, исключая из (A.150) переменную  $L$ , мы приходим к системе уравнений, решение которой определяет  $u_L = u(w_L)$ :

$$\begin{aligned} w_L [\gamma(J_L) R(L) + \varepsilon_1(J_L) S(L)] \frac{dR(L)}{dw_L} &= \\ &= -2S(L) - \varepsilon_1(J_L) R(L)S(L) - \frac{1}{2}\gamma(J_L) [R^2(L) - S^2(L)], \\ w_L [\gamma(J_L) R(L) + \varepsilon_1(J_L) S(L)] \frac{dS(L)}{dw_L} &= \\ &= 2[R(L) - 1] + \frac{1}{2}\varepsilon_1(J_L) [R^2(L) - S^2(L)] - \gamma(J_L) R(L)S(L). \end{aligned} \quad (\text{A.151})$$

Таким образом, для этого случая зависимость величины  $u_L$  от толщины слоя  $L$  определяется только зависимостью  $w_L$  от  $L$ .

Если характеристические кривые не пересекаются, то непрерывное возрастание значений  $w_L$  при фиксированном  $L$  соответствует непрерывному возрастанию соответствующих значений  $w_0$ . Учитывая, что при увеличении  $L$  при фиксированном значении  $w_L$  область соответствующих значений  $w_0$  сжимается к значению  $w_0 = 0$ , которому соответствует характеристическая кривая  $w_L = 0$  (случай линейной задачи), можно, очевидно, считать начальным условием для (A.151) при  $L \rightarrow \infty$  решение линейной задачи. Если же величина  $b(w_L)$  для достаточно больших  $w_L$  растет с ростом  $w_L$ , то для любого  $w_0$  существует такое конечное значение толщины слоя  $L(w_0)$ , что  $w_L = \infty$ . И наоборот, для любой конечной величины  $L$  существует такое предельное значение  $\tilde{w}_0$ , что соответствующее ей  $w_L = \infty$ . Изменению величины  $w_0$  в области  $0 \leq w_0 \leq \tilde{w}_0$  соответствует непрерывное изменение  $w_L$  в области  $0 \leq w_L < \infty$ . При увеличении толщины слоя  $L$  величина  $\tilde{w}_0 \rightarrow 0$ . Ниже на конкретных примерах мы убедимся, что в ряде случаев такая ситуация действительно имеет место.

Выше было рассмотрено падение волны на слой среды. Можно рассмотреть также случай, когда источник поля находится внутри слоя среды. Поскольку такая задача не представляет особого физического интереса, не будем на ней останавливаться. Отметим также, что задача о наклонном падении плоской волны для простейших типов нелинейности сводится к данной при простом переобозначении переменных.

## Падение волны на полупространство нелинейной среды

Если функция  $\varepsilon(x, wI(x))$  не зависит явно от  $x$ , т.е.  $\varepsilon(x, wI(x)) = \varepsilon(wI(x))$ , то в уравнении (A.144) можно совершить предельный переход  $L_0 \rightarrow -\infty$ , соответствующий падению волны на полупространство  $x < L$ . В этом случае для поля на границе среды получаем нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка ( $I(w) = |u(w)|^2$ )

$$wb(w) \frac{d}{dw} u(w) = -2i [u(w) - 1] - i \frac{1}{2} \varepsilon(wI(w)) u^2(w) \quad (\text{A.152})$$

с начальным условием, определяемым решением линейной задачи при  $w = 0$ ,

$$u(0) = \frac{2}{1 + \alpha}, \quad \alpha = \sqrt{1 + \varepsilon(0)}, \quad \text{Im } \alpha > 0, \quad \text{Re } \alpha > 0,$$

а волновое поле  $u(x, w)$  внутри среды описывается линейным уравнением ( $k(L - x) = \xi$ )

$$\frac{\partial}{\partial \xi} u(\xi, w) = \left[ a(w) + wb(w) \frac{\partial}{\partial w} \right] u(\xi, w) \quad (\xi > 0) \quad (\text{A.153})$$

с начальным условием  $u(0, w) = u(w)$ , где

$$a(w) = i \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(wI(w)) u(w) \right\}, \quad b(w) = a(w) + a^*(w).$$

Для интенсивности волнового поля внутри среды  $J(\xi, w) = w|u(\xi, w)|^2$  из (A.153) вытекает уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \xi} J(\xi, w) = wb(w) \frac{\partial}{\partial w} J(\xi, w), \quad J(0, w) = wI(w) = w|u(w)|^2. \quad (\text{A.154})$$

Параметрическое представление решения уравнения (A.154) легко строится методом характеристик с характеристическим параметром  $\bar{w}$ :

$$\xi = - \int_{\bar{w}}^w \frac{dw}{wb(w)}, \quad J(\xi, w) = \bar{w}I(\bar{w}). \quad (\text{A.155})$$

Исключая параметр  $\bar{w}$ , окончательно получим в явном виде зависимость  $J(\xi, w)$ .

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению поля на границе  $u(w)$  или коэффициента отражения  $\rho(w) = u(w) - 1$ .

Отметим, что при  $\varepsilon(0) = 0$ ,  $u(0) = 1$  в отсутствие затухания легко найти частное решение, когда функция  $u(w)$  вещественна. В этих условиях  $b(w) \equiv 0$  и из (A.152) следует трансцендентное уравнение для  $u(w)$ :

$$4[u(w) - 1] = -\varepsilon(wI(w))u^2(w).$$

Тогда из уравнения (A.153) следует решение

$$u(\xi, w) = u(w) \exp \left\{ i\xi \frac{2 - u(w)}{u(w)} \right\}, \quad (\text{A.156})$$

отвечающее ситуации распространения плоской волны в нелинейной среде.

Рассмотрим более подробно структуру полученных уравнений и их решений. Будем считать, что

$$\varepsilon(J) = \varepsilon_1(J) + i\gamma(J),$$

где  $\varepsilon_1^*(J) = \varepsilon_1(J)$ , а величина  $\gamma(J)$  описывает затухание волны. Положим

$$u(w) = R(w) + iS(w)$$

и разделим в (A.152) вещественную и мнимую части:

$$wb(w)\frac{d}{dw}R(w) = 2S(w) + \varepsilon_1(wI(w))R(w)S(w) + \frac{1}{2}\gamma(wI(w))\left[R^2(w) - S^2(w)\right],$$

$$wb(w)\frac{d}{dw}S(w) = 2[1 - R(w)] + \gamma(wI(w))R(w)S(w) - \frac{1}{2}\varepsilon_1(wI(w))\left[R^2(w) - S^2(w)\right], \quad (\text{A.157})$$

где

$$I(w) = R^2(w) + S^2(w),$$

$$b(w) = -[\gamma(wI(w))R(w) + \varepsilon_1(wI(w))S(w)].$$

Отметим, что система уравнений (A.157) формально совпадает с системой уравнений (A.151). Начальные условия к системе (A.157) вытекают из (A.152). Из условия  $|\rho(w)|^2 \leq 1$  вытекают ограничения

$$0 \leq R(w) \leq 2, \quad |S(w)| \leq 1.$$

Причем равенства могут осуществляться лишь при  $\gamma = 0$ .

Следствием уравнений (A.157) являются равенства

$$b(w)\frac{d}{dw}wR(w) = 2S(w) - \frac{1}{2}\gamma(wI(w))I(w), \quad (\text{A.158})$$

$$b(w)\frac{d}{dw}wI(w) = 4S(w).$$

Рассмотрим прежде всего случай отсутствия затухания, т. е.  $\gamma(wI(w)) = 0$ . Тогда система уравнений (A.157) упрощается:

$$\varepsilon_1(wI(w))wS(w)\frac{d}{dw}R(w) = -S(w)[2 + \varepsilon_1(wI(w))R(w)], \quad (\text{A.159})$$

$$\varepsilon_1(wI(w))wS(w)\frac{d}{dw}S(w) = 2[R(w) - 1] + \frac{1}{2}\varepsilon_1(wI(w))\left[R^2(w) - S^2(w)\right],$$

а равенства (A.158) принимают форму

$$\varepsilon_1(wI(w))wS(w)\frac{d}{dw}wR(w) = -2S(w), \quad (\text{A.160})$$

$$\varepsilon_1(wI(w))wS(w)\frac{d}{dw}wI(w) = -4S(w).$$

Рассматривая систему (A.159) как систему обыкновенных дифференциальных уравнений (без учета начальных условий), видим, что все решения этой системы распадаются на решения двух типов.

1.  $S(w) = 0$ . Тогда первое из уравнений (A.159) удовлетворяется тождественно, а из второго уравнения следует трансцендентное уравнение для  $R(w)$ :

$$4[1 - R(w)] = R^2(w)\varepsilon_1(wR^2(w)). \quad (\text{A.161})$$

В этом случае  $b(w) \equiv 0$  и решение уравнения (A.155) имеет вид

$$J(\xi, w) = wR^2(w). \quad (\text{A.162})$$

Этот тип решения соответствует режиму плоской волны, распространяющейся в нелинейной среде. Волновое поле в этом случае, как это следует из (A.153), имеет вид

$$u(\xi, w) = R(w) \exp\left\{i\xi \frac{2 - R(w)}{R(w)}\right\}. \quad (\text{A.163})$$

Второй тип решений соответствует случаю

2.  $S(w) \neq 0$ . Пусть при  $w = w_0$  функции  $R(w_0) = R_0$ ,  $S(w_0) = S_0$ . Тогда, сокращая (A.159), (A.160) на  $S(w)$ , получаем систему уравнений:

$$\varepsilon_1(wI(w))w\frac{d}{dw}R(w) = -[2 + \varepsilon_1(wI(w))R(w)], \quad (\text{A.164})$$

$$\varepsilon_1(wI(w))wS(w)\frac{d}{dw}S(w) = 2[R(w) - 1] + \frac{1}{2}\varepsilon_1(wI(w))\left[R^2(w) - S^2(w)\right],$$

и равенства

$$\varepsilon_1(wI(w))\frac{d}{dw}wR(w) = -2, \quad (\text{A.165})$$

$$\varepsilon_1(wI(w))\frac{d}{dw}wI(w) = -4.$$

Интегрируя равенства (A.165), получаем

$$\int_{w_0 I_0}^{wI(w)} dt \varepsilon_1(t) = -4(w - w_0), \quad I_0 = R_0^2 + S_0^2, \quad (\text{A.166})$$

$$wI(w) - 2wR(w) = w_0[I(w_0) - 2R(w_0)]. \quad (\text{A.167})$$

Равенство (A.166) определяет  $I(w)$  как функцию  $w$ , а равенство (A.167) определяет функцию  $R(w)$ . Функция  $S(w)$  определяется из равенства

$$S(w) = \pm\sqrt{I(w) - R^2(w)}, \quad (\text{A.168})$$

где знак корня должен быть выбран с учетом начального условия или, при условии  $S(w_0) = 0$ , с учетом ограниченности волнового поля при  $\xi > 0$ . Из (A.166) следует выражение для квадрата модуля коэффициента отражения:

$$|\rho(w)|^2 = [R(w) - 1]^2 + S^2(w) = 1 - \frac{w_0}{w}(2R_0 - I_0). \quad (\text{A.169})$$

Следовательно,  $2R_0 > I_0$ , и для этого типа решения модуль коэффициента отражения увеличивается с ростом интенсивности падающей волны. Данный тип решения может существовать, только если подкоренное выражение в (A.168) положительно.



В точках, где

$$I(w_1) = R^2(w_1),$$

может происходить смена режимов решения. Для этого типа решения легко написать неявную формулу для интенсивности поля внутри среды, вытекающую из (A.155). Все эти формулы можно получить, естественно, путем непосредственного интегрирования уравнения (A.131) на с. 136 (при  $\gamma = 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(wI)$ ) с помощью двух интегралов

$$U(x) \frac{d}{dx} U^*(x) - U^*(x) \frac{d}{dx} U(x) = \text{const},$$

$$\frac{dU(x)}{dx} \frac{dU^*(x)}{dx} + k^2 \int_{J_0}^{J(x)} dt [1 + \varepsilon(t)] = \text{const}. \quad (\text{A.170})$$

Однако они дают явную зависимость всех величин от интенсивности падающей волны, которую выделить из интегралов (A.170) непросто. Обычно, исходя из (A.170), авторы анализируют возможные типы решений, которые затем сшиваются на границе слоя с падающей волной. При этом в ряде случаев возникают неоднозначности, когда одному и тому же полю внутри среды соответствуют несколько значений коэффициента отражения. Эту неоднозначность не снимает в ряде случаев даже наличие затухания. Развиваемый подход основывается на другом принципе. При малых интенсивностях падающей волны  $w$  мы имеем линейную задачу. Дальнейшая эволюция поля с ростом  $w$  описывается нелинейной системой уравнений (A.157) с заданными начальными условиями. Естественно думать, что эта эволюция должна выделить из возможных типов решений те, которые на самом деле могут осуществляться, и мы должны автоматически получить тот тип решения (1 или 2), который соответствует начальным данным, а также возможные переходы от одного типа к другому. Изменение интенсивности падающей волны, естественно, происходит адиабатически. При наличии затухания решить уравнения (A.157) аналитически не представляется возможным. Анализ системы (A.157) в отсутствие затухания позволяет установить, где имеют место особенности в решениях, а для установления поведения в окрестности этих особенностей можно использовать численный счет.

### Примеры расчета волновых полей в нелинейной среде

Рассмотрим конкретно два простейших типа нелинейностей:  $\varepsilon_1(t) = \pm \beta t$ ,  $\beta > 0$ . Нас будет интересовать случай малого затухания. Обсуждение других типов нелинейностей можно найти, например, в книге [36, 110].

**Пример 1.** Пусть  $\varepsilon_1(t) = \beta t$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma = 0$ . В этом случае  $\varepsilon_1(0) = 0$  и начальные условия для системы (A.157) имеют вид

$$R(0) = 1, \quad S(0) = 0.$$

Учитывая, что параметр  $\beta$  входит только в комбинации  $\beta w > 0$ , можно без ограничения общности положить его равным единице. Итак, в этом случае имеем систему:

$$[R^2(w) + S^2(w)] w^2 S(w) \frac{d}{dw} R(w) = S(w) \{2 + wR(w) [R^2(w) + S^2(w)]\}, \quad R(0) = 1,$$

$$[R^2(w) + S^2(w)] w^2 S(w) \frac{d}{dw} S(w) = 2[R(w) - 1] + \frac{1}{2} w [R^4(w) - S^4(w)], \quad S(0) = 0. \quad (\text{A.171})$$

Предположим, что в окрестности начала координат  $S(w)$  не равно тождественно нулю. Сокращая (A.171) на  $S(w)$  и линеаризируя оставшееся уравнение, получим

$$w^2 \frac{d}{dw} R(w) = -2 - wR(w),$$

откуда находим интеграл

$$wR(w) = -2 \ln w + \text{const},$$

который ни при одном значении постоянной не удовлетворяет начальному условию  $R(0) = 1$ . Следовательно,  $S(w) = 0$  в некоторой окрестности начала координат и первое уравнение (A.171) удовлетворяется тождественно. Таким образом, мы имеем решение типа 1, и функция  $R(w)$  определяется из алгебраического уравнения (A.161), которое в данном случае имеет вид

$$4[1 - R(w)] = wR^4(w).$$

Это уравнение всегда имеет два вещественных корня разных знаков. По формуле Феррари ветвь, удовлетворяющая начальному условию  $R(0) = 1$ , определяется соотношением

$$R(w) = \sqrt{\frac{2}{w\sqrt{2y}} - \frac{y}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{2y}, \quad (\text{A.172})$$

где

$$y = \frac{4}{\sqrt{3w}} \text{sh} \frac{\varphi}{3}, \quad \text{sh} \varphi = \frac{9}{8\sqrt{3w}}.$$

При малых  $w$  имеем

$$R(w) \approx 1 - w/4, \quad \rho(w) \approx -w/4 \quad (w \rightarrow 0).$$

Для больших значений аргумента

$$R(w) \approx \sqrt{2}w^{-1/4}, \quad \rho(w) \approx -1 + \sqrt{2}w^{-1/4} \quad (w \rightarrow \infty),$$

и, следовательно, функция  $R(w)$  монотонно убывает к нулю при увеличении  $w$ , а коэффициент отражения стремится к  $-1$ . Такое решение соответствует режиму плоской волны в нелинейной среде, и интенсивность волнового поля внутри слоя описывается формулой (A.162).

Рассмотрим теперь слой конечной толщины и проследим, каким образом решение задачи для конечного слоя переходит в решение задачи для полупространства, полученное выше. Для типа нелинейности  $\varepsilon_1(J) = J$  все характеристики  $w_L$  являются гладкими функциями толщины слоя  $L$ , не пересекающимися и не касающимися друг друга ни в какой точке. Поэтому для любого значения интенсивности падающей волны  $w$  при любой толщине слоя имеется единственное решение. На рис. A.7, а представлены примеры распределения интенсивности волнового поля внутри тонкого слоя среды  $L = 10$  для разных значений интенсивности падающей волны  $w$  и  $\gamma = 0,05$ .

Характерно наличие осцилляций, тем больших, чем больше параметр  $w$ , обусловленных интерференцией прямой и отраженной в среде волн. При увеличении толщины слоя амплитуда осцилляций уменьшается (рис. A.7, б), и в предельном случае падения волны на полупространство (рис. A.7, в) кривые становятся монотонно затухающими. При толщине слоя  $L = 100$

на расстояниях  $\xi = L - x \approx 60$  от границы слоя, на которую падает волна, решение задачи совпадает с решением линейной задачи. Что касается зависимости интенсивности поля на границе слоя и квадрата модуля коэффициента отражения, то для достаточно тонкого слоя наблюдаются сильные колебания в зависимости от  $w$ , которые исчезают при переходе к полупространству (рис. A.8). ♦

**Пример 2.** Пусть теперь  $\varepsilon_1(t) = -\beta t$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma = 0$ . В этом случае также можно положить  $\beta = 1$ , и задача описывается системой уравнений:

$$[R^2(w) + S^2(w)] w^2 S(w) \frac{d}{dw} R(w) = S(w) \{2 + wR(w) [R^2(w) + S^2(w)]\}, \quad R(0) = 1,$$

$$[R^2(w) + S^2(w)] w^2 S(w) \frac{d}{dw} S(w) = 2[R(w) - 1] + \frac{1}{2} w [R^4(w) - S^4(w)], \quad S(0) = 0. \quad (\text{A.173})$$

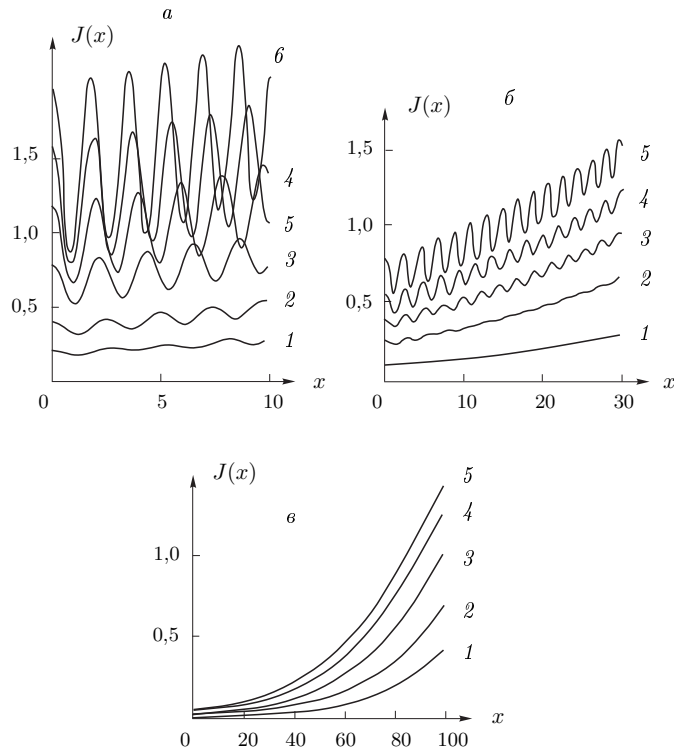


Рис. А.7. Распределение интенсивности волны  $J(x)$  внутри слоя среды при  $\varepsilon_1(J) = J$ ,  $\gamma = 0,05$ . Рис. (а) соответствует  $L = 10$ : кривая 1 —  $w = 0,32$ ; 2 —  $w = 0,61$ ; 3 —  $w = 1,23$ ; 4 —  $w = 1,76$ ; 5 —  $w = 2,58$ ; 6 —  $w = 2,95$ . Рис. (б) соответствует  $L = 30$ : 1 —  $w = 0,32$ ; 2 —  $w = 0,87$ ; 3 —  $w = 1,35$ ; 4 —  $w = 1,79$ ; 5 —  $w = 2,45$ . Рис. (в) соответствует  $L = 100$ : 1 —  $w = 0,49$ ; 2 —  $w = 0,86$ ; 3 —  $w = 1,46$ ; 4 —  $w = 1,95$ ; 5 —  $w = 2,39$

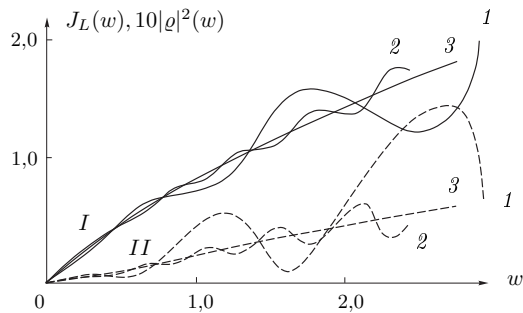


Рис. А.8. Зависимости  $J_L(w)$  (сплошные линии I) и  $10|\rho|^2(w)$  (штриховые линии II) при  $\varepsilon_1(J) = J$ ,  $\gamma = 0,05$ . Кривая 1 —  $L = 10$ ; 2 —  $L = 30$ ; 3 —  $L = 100$

Легко заметить, что в окрестности  $w = 0$  величина  $S(w) = 0$ , так же как и в примере 1. Функция  $R(w)$  описывается алгебраическим уравнением

$$4[R(w) - 1] = wR^4(w). \quad (\text{A.174})$$

Несложный анализ показывает, что это уравнение при

$$0 < w < w_{cr} = (3/4)^3$$

имеет два вещественных корня; нужная нам ветвь, удовлетворяющая условию  $R(0) = 1$ , заключена в пределах  $0 < R < R_{cr} = 3/4$ . Решение снова находится по формуле Феррари и имеет вид

$$R(w) = \frac{1}{2}\sqrt{2y} - \sqrt{\frac{2}{w\sqrt{2y}} - \frac{y}{2}}, \quad (\text{A.175})$$

где теперь

$$y = \frac{4}{\sqrt{3}w} \operatorname{ch} \frac{\varphi}{3}, \quad \operatorname{ch} \varphi = \frac{9}{8\sqrt{3}w} = \left(\frac{w_0}{w}\right)^{1/2}.$$

При малых  $w$  имеем

$$R(w) \approx 1 + w/4, \quad \rho(w) \approx w/4 \quad (w \rightarrow 0).$$

При  $w \rightarrow w_{cr} - 0$  нетрудно получить асимптотическое выражение

$$R(w) \approx \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{1 - \frac{w}{w_{cr}}},$$

откуда, в частности, следует, что  $dR(w)/dw \rightarrow \infty$  при  $w \rightarrow w_{cr} - 0$ . Этот тип решения также соответствует режиму плоской волны, и интенсивность волнового поля внутри слоя  $J(\xi, w) = wR^2(w)$ . В критической точке  $J(\xi, w_{cr}) = 3/4$  и в этом случае  $1 + \varepsilon(J) = 1/4$ .

При  $w > w_{cr}$  уравнение (A.174) не имеет вещественных корней, и это означает, что  $S(w) \neq 0$ , и мы приходим к решению типа 2. Формально при  $w > w_{cr}$  данная задача имеет континуум решений, описываемый системой уравнений (A.164) с произвольными начальными условиями при  $w = w_{cr}$ . Естественно предположить непрерывность решения задачи как функции  $w$ . Тогда, считая, что при  $w = w_{cr}$  функции  $R(w_{cr}) = 4/3$ ,  $S(w_{cr}) = 0$ , из формул (A.166)–(A.168) получаем решение вида ( $w \geq w_{cr}$ )

$$I(w) = \frac{1}{4w}Q(w), \quad R(w) = \frac{1}{8w} \left[ Q(w) + \frac{3}{2} \right], \quad (\text{A.176})$$

$$S(w) = \frac{1}{16\sqrt{2}w} [Q(w) - 3] \sqrt{Q(w) - 2},$$

где

$$Q(w) = \sqrt{128w - 45}.$$

Квадрат модуля коэффициента отражения описывается, согласно (A.169), формулой

$$|\rho(w)|^2 = 1 - \frac{3}{8w}, \quad |\rho(w_{cr})|^2 = \frac{1}{9}.$$

Учитывая, что в данном случае

$$wb(w) = \frac{1}{64\sqrt{2}}Q(w) [Q(w) - 3] \sqrt{Q(w) - 2},$$

интеграл (A.155), определяющий характеристику, легко вычисляется, и мы получаем окончательное выражение для интенсивности поля внутри среды:

$$J(\xi, w) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{q(w)e^{\xi/\sqrt{2}} + 1}{q(w)e^{\xi/\sqrt{2}} - 1} \right]^2 \right\}, \quad (\text{A.177})$$

где

$$q(w) = \frac{\sqrt{Q(w) - 2} + 1}{\sqrt{Q(w) - 2} - 1}.$$

С учетом того что для данной задачи  $\varepsilon(J) = -J$ , формула (А.177) описывает распределение диэлектрической проницаемости в зависимости от  $w$  и  $\xi$ , сформированное падающей волной. Мы видим, что перестройка поля с режима плоской волны на более сложный режим (А.177) начинается осуществляться раньше, чем обратится в нуль величина  $\tilde{\varepsilon}(J) = 1 + \varepsilon(J)$ . При  $w_{cr} < w < w_1 = 61/128$  величина  $\tilde{\varepsilon}(J)$  в нуль вообще не обращается. При  $w \geq w_1$  всегда имеется точка

$$\xi_0(w) = \sqrt{2} \ln \left[ \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right] \frac{\sqrt{Q(w) - 2} - 1}{\sqrt{Q(w) - 2} + 1},$$

в которой  $\tilde{\varepsilon}(J) = 0$ . При этом в области  $0 \leq \xi \leq \xi_0$  величина  $\tilde{\varepsilon}(J) \leq 0$ . При  $w = w_1$  значение  $\xi_0 = 0$ , а при  $w \gg w_1$

$$\xi_0(w) = \sqrt{2} \ln \left[ \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right] \approx 2,5.$$

В остальной же области пространства ( $\xi > \xi_0$ ) величина  $\tilde{\varepsilon}(J) > 0$ .

Таким образом, вблизи границы раздела появляется узкий слой, имеющий толщину порядка длины волны, где  $\tilde{\varepsilon}(J) < 0$ , и именно этим обстоятельством обусловлен тот факт, что с ростом интенсивности падающей волны поле проникает далеко в глубь среды ( $J(\xi, w) \approx 3/4$  при  $\xi \gg 1$ ).

Выше мы предположили возможность непрерывного продолжения решения через критическую точку  $w_{cr}$  и выяснили, что в этом случае производные всех рассмотренных величин терпят разрыв в этой точке. Ответ на вопрос, имеет ли это место на самом деле, можно получить, изучив решение задачи при наличии конечного (хоть и сколь угодно малого) затухания. Уравнения (А.157) численно интегрировались для данного случая с постоянными малыми значениями коэффициента затухания  $\gamma$ . С уменьшением параметра  $\gamma$  наблюдается стремление непрерывного решения к решению, описанному выше, т. е. к непрерывному по  $w$  решению, но с разрывной производной (рис. А.9).

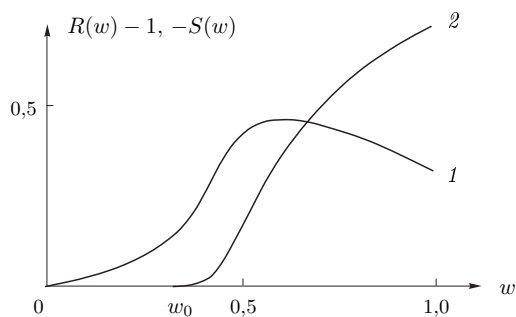


Рис. А.9. Зависимость поля на границе от  $w$ : кривая 1 соответствует величине  $(R(w) - 1)$ ; кривая 2 соответствует  $(-S(w))$  ( $\gamma = 0,01$ )

Рассмотрим теперь слой конечной толщины. Нас интересует, как и в предыдущем примере, когда и каким образом решение задачи переходит в решение задачи о падении волны на полупространство. Необходимо предполагать, что в среде обязательно имеется поглощение, т. е. величина  $\gamma$  может быть хоть и малой величиной, но отличной от нуля. Для типа нелинейности  $\varepsilon_1(J) = -J$  картина существенно зависит от параметра  $\gamma$ . Так, при  $\gamma > 0,05$  характеристики, как и в предыдущем примере, нигде не пересекаются и переход к задаче о падении волны на полупространство осуществляется практически при  $L \sim 70$ . При меньших значениях параметра  $\gamma$  характеристики начинают пересекаться, и в точках пересечения значения  $J_L$  и  $|\rho|^2$

на разных характеристиках не совпадают. Так, при  $\gamma = 0,01$  имеется пучок характеристик, соответствующих начальным значениям  $0,25 < w_0 < 0,33$ , в котором кривые пересекаются при  $7,4 < L < 33$ . Причем в точках пересечения характеристик  $0,36 < w_L < 0,41$ . Напомним, что в задаче о падении волны на полупространство при  $\gamma = 0$  существует критическое значение интенсивности падающей волны  $w_{cr} = (3/4)^2 \approx 0,42$ , при котором структура поля в среде коренным образом меняется. Существование же пересечения характеристик свидетельствует о том, что для слоя конечной толщины имеется неоднозначность как для поля на границе слоя, так и внутри среды. В качестве примера на рис. А.10, б представлено решение задачи для слоя толщины  $L = 14,15$ . Кривые 3, 4 на рис. А.10, а соответствуют характеристикам, пересекающимся при данной толщине слоя и ограничивающим другие пересекающиеся характеристики. Кривой 5 отвечает одна из «ближайших» характеристик, уже не пересекающихся с другими. Из рисунка видно, что эта характеристика уходит на бесконечность практически при данной толщине слоя.

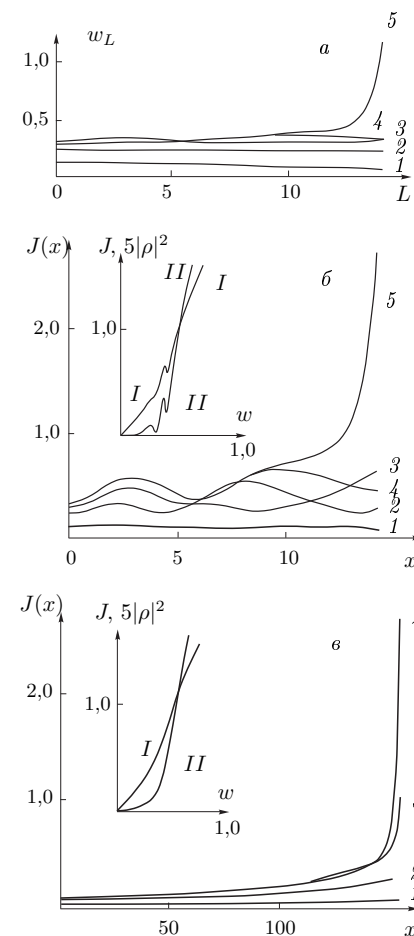


Рис. А.10. Решение задачи при  $\varepsilon_1(J) = -J$ ,  $\gamma = 0,01$ : (а) зависимость характеристик  $w_L$  от толщины слоя; (б) распределение интенсивности волны  $J(x)$  внутри слоя при  $L = 14,15$ : кривая 1 —  $w = 0,14$ ; 2 —  $w = 0,29$ ; 3 —  $w = 0,40$ ; 4 —  $w = 1,40$ ; 5 —  $w = 2,13$  ( $J_L = 3,75$ ) (на врезке — зависимости  $I - J(w)$ ,  $II - 5|\rho|^2(w)$ ); (в) распределение интенсивности волны  $J(x)$  внутри слоя при  $L = 155,23$ : 1 соответствует  $w = 0,13$ ; 2 —  $w = 0,30$ ; 3 —  $w = 0,55$ ; 4 —  $w = 2,33$  ( $J_L = 3,93$ ) (на врезке — зависимости  $I - J(w)$ ,  $II - 5|\rho|^2(w)$ )

Кривые для зависимости поля на границе слоя от  $w$  были получены путем последовательного соединения конечных точек решения системы (A.150) в той последовательности, в которой выбирались точки  $w_0$  (начальные значения  $w_0$  выбирались по возрастанию).

Из рисунка видно наличие неоднозначности в окрестности  $w \sim 0,40$ , которая свидетельствует о существовании разрыва, например, модуля коэффициента отражения и о наличии гистерезиса как при увеличении  $w$ , так и при его уменьшении.

Для рассматриваемого типа нелинейности любая характеристическая кривая уходит на бесконечность при конечной толщине слоя. При толщине слоя  $L \approx 33$  самая нижняя из семейства пересекающихся характеристик уходит на бесконечность, и решение задачи становится единственным и гладким для любой толщины слоя и интенсивности падающей волны. На рис. A.10, в представлено решение задачи для  $L = 155,23$ , практически эквивалентное решению задачи о падении волны на полупространство. Так как для рассматриваемой задачи диэлектрическая проницаемость среды  $\tilde{\varepsilon}(x) = 1 - J(x)$ , из рисунка видно, что вблизи границы образуется тонкий слой, где  $\tilde{\varepsilon}(x) < 0$ , в соответствии с результатами полученными ранее. Вне его  $\tilde{\varepsilon}(x) > 0$  и решение быстро выходит на решение линейной задачи. ♦

### A.3. Одномерная нестационарная краевая волновая задача

В предыдущем параграфе мы подробно рассмотрели линейные стационарные краевые волновые задачи. Ниже мы рассмотрим переход от краевой задачи к задаче с начальными условиями для скалярного волнового уравнения. Такие задачи возникают при анализе распространения временных импульсов в стационарных и нестационарных средах, а также при рассеянии волн одного типа на волнах другого типа (например, рассеяние света на ультразвуке или рассеяние звука на внутренних волнах). Рассмотрим простейшую одномерную задачу с несогласованной границей.

#### A.3.1. Случай нестационарной среды

Пусть, как и ранее, слой неоднородной среды занимает часть пространства  $L_0 < x < L$  и в пространственно-временной точке  $(x_0, t_0)$  располагается точечный источник. Определим функцию Грина для волнового уравнения (волновое поле точечного источника) с помощью уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{c^2(x, t)} \right) G(x, t, x_0, t_0) = -\frac{2}{c_0} \delta(x - x_0) \delta(t - t_0), \quad (\text{A.178})$$

где функция  $c(x, t)$  описывает пространственно-временные неоднородности скорости распространения волны в среде. В этом случае функция  $G(x, t, x_0, t_0)$  будет безразмерной функцией. Вне слоя среды пространство считаем однородным, скорость распространения волны в котором равна  $c_0$ . Если  $c(L, t) \neq c_0$ , то существует разрыв скорости распространения волны на границе  $x = L$ . Такую границу, как и для стационарных задач, будем называть *несогласованной границей*. Если же  $c(L, t) = c_0$ , то разрыва скорости распространения волны нет и границу будем называть *согласованной*. Рассмотрим случай несогласованной границы. Уравнения метода погружения для согласованной границы см. в работе [112].

Введем функцию

$$\varepsilon(x, t) = \frac{c_0^2}{c^2(x, t)} - 1. \quad (\text{A.179})$$

Тогда волновое уравнение (A.178) можно записать в виде

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} \right) G(x, t, x_0, t_0) - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} [\varepsilon(x, t) G(x, t, x_0, t_0)] = -\frac{2}{c_0} \delta(x - x_0) \delta(t - t_0). \quad (\text{A.180})$$

Вне слоя среды решение имеет вид уходящих волн:

$$G(x, t, x_0, t_0) = T_1(x - L - c_0 t) \quad (x \geq L),$$

$$G(x, t, x_0, t_0) = T_2(x - L_0 + c_0 t) \quad (x \leq L_0),$$

и краевыми условиями для этой задачи, как и ранее, являются условия непрерывности поля  $u(x, t)$  и производной  $\partial u(x, t) / \partial x$  на границах слоя, которые можно записать в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) G(x, t, x_0, t_0) \Big|_{x=L} = 0, \quad (\text{A.181})$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) G(x, t, x_0, t_0) \Big|_{x=L_0} = 0.$$

Функция  $G(x, t, x_0, t_0)$  непрерывна во всех точках пространства, а ее пространственная производная по  $x$  испытывает скачок в точке расположения источника:

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, t, x_0, t_0) \Big|_{x=x_0+0} - \frac{\partial}{\partial x} G(x, t, x_0, t_0) \Big|_{x=x_0-0} = -\frac{2}{c_0} \delta(t - t_0). \quad (\text{A.182})$$

При отсутствии неоднородностей скорости распространения волны, т.е. при  $\varepsilon(x, t) = 0$ , функция Грина свободного пространства

$$g_0(x, t, x_0, t_0) = g_0(x - x_0, t - t_0)$$

определяется выражением

$$g_0(x, t) = \theta(c_0 t - |x|) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega + i0} e^{-i\omega(c_0 t - |x|)}, \quad (\text{A.183})$$

и при фиксированном расположении точек наблюдения и источника (например при  $x < x_0$ ) для нее имеют место равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_0} g(x - x_0, t - t_0) = -\frac{\partial}{\partial x} g(x - x_0, t - t_0) =$$

$$= -\frac{\partial}{c_0 \partial t} g(x - x_0, t - t_0) = \frac{\partial}{c_0 \partial t_0} g(x - x_0, t - t_0), \quad (\text{A.184})$$

выражающие свойство факторизации волнового уравнения (см. приложение Б).

Краевой задаче (A.180), (A.181) эквивалентно интегральное уравнение

$$G(x, t, x_0, t_0, L) = g_0(x - x_0, t - t_0) -$$

$$- \frac{1}{2c_0} \int_{L_0}^L dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 g_0(x - x_1, t - t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} [\varepsilon(x_1, t_1) G(x_1, t_1, x_0, t_0, L)]. \quad (\text{A.185})$$

Пусть теперь источник волн находится на границе слоя  $x_0 = L$ . Тогда краевая задача (A.180), (A.181) запишется в виде (с учетом равенства (A.182))

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} \right) G(x, t, L, t_0) &= \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} [\varepsilon(x, t) G(x, t, L, t_0)], \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) G(x, t, L, t_0) \Big|_{x=L} &= \frac{2}{c_0} \delta(t - t_0), \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) G(x, t, L, t_0) \Big|_{x=L_0} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.186})$$

что эквивалентно интегральному уравнению

$$\begin{aligned} G(x, t, L, t_0) &= g_0(x - L, t - t_0) - \\ &- \frac{1}{2c_0} \int_{L_0}^L dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 g_0(x - x_1, t - t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} [\varepsilon(x_1, t_1) G(x_1, t_1, L, t_0)]. \end{aligned} \quad (\text{A.187})$$

#### Замечание A.14. Падение волны на слой среды

Отметим, что интегральное уравнение (A.187) (или соответствующая краевая задача (A.186)) описывает задачу о падении волны на слой неоднородной среды. Пусть справа из области  $x > L$  на него падает волна  $u_0(x - L + c_0 t)$ , где  $c_0$  — скорость распространения волны в свободном пространстве. Тогда в области  $x > L$  волновое поле определяется равенством

$$u(x, t) = u_0(x - L + c_0 t) + R(x - L - c_0 t) \quad (x \geq L),$$

где  $R(x - L - c_0 t)$  — отраженная волна. В области  $x < L_0$  имеем проходящую волну

$$u(x, t) = T(x - L_0 + c_0 t) \quad (x \leq L_0),$$

а в области  $L_0 < x < L$  волновое поле удовлетворяет волновому уравнению

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} \right) u(x, t) = \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} [\varepsilon(x, t) u(x, t)] \quad (\text{A.188})$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) u(x, t) \Big|_{x=L} &= 2 \frac{\partial}{c_0 \partial t} u_0(c_0 t), \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) u(x, t) \Big|_{x=L_0} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.189})$$

При этом падающее поле  $u_0(x - L + c_0 t)$  на границе слоя  $x = L$  создает распределение источников  $f(t_0)$  такое, что

$$u_0(c_0 t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \theta(t - t_0) f(t_0), \quad f(t_0) = \frac{\partial}{\partial t_0} u_0(c_0 t_0),$$

и волновое поле внутри слоя  $u(x, t)$  описывается выражением

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 G(x, t, L, t_0) f(t_0).$$

Отметим, что падающая волна вида «ступеньки», соответствующая функции (A.183),

$$g_0(x - L, t) = \theta(x - L + c_0 t),$$

создает распределение источников

$$f(t_0) = \delta(t_0),$$

и, следовательно, в этом случае волновое поле внутри среды

$$u(x, t) = G(x, t, L, 0). \quad \blacklozenge$$

Получим теперь уравнения метода погружения для краевой задачи (A.186). Продифференцируем уравнение (A.187) по параметру  $L$ . Получаем с учетом (A.184) интегральное уравнение для величины  $\partial G(x, t, L, t_0) / \partial L$  вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} G(x, t, L, t_0) &= \hat{A}(L, t_0) g_0(x - L, t - t_0) - \\ &- \frac{1}{2c_0} \int_{L_0}^L dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 g_0(x - x_1, t - t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \left[ \varepsilon(x_1, t_1) \frac{\partial}{\partial L} G(x_1, t_1, L, t_0) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.190})$$

где оператор  $\hat{A}(L, t_0)$  действует по переменной  $t_0$  на произвольную функцию  $F(t_0)$  согласно формуле

$$\hat{A}(L, t_0) F(t_0) = \frac{\partial}{c_0 \partial t_0} F(t_0) - \frac{1}{2c_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 F(t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} [\varepsilon(L, t_1) G_L(t_1, t_0)], \quad (\text{A.191})$$

а функция  $G_L(t, t_0) = G(L, t, L, t_0)$  описывает волновое поле в плоскости источника  $x = L$ .

Решение интегрального уравнения (A.190) можно связать с самим волновым полем  $G(x, t, L, t_0)$  в операторном виде:

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x, t, L, t_0) = \hat{A}(L, t_0) G(x, t, L, t_0),$$

или в виде соотношения

$$\left( \frac{\partial}{\partial L} - \frac{\partial}{c_0 \partial t_0} \right) G(x, t, L, t_0) = - \frac{1}{2c_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 G(x, t, L, t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} [\varepsilon(L, t_1) G_L(t_1, t_0)], \quad (\text{A.192})$$

которое можно рассматривать как интегро-дифференциальное уравнение, если дополнить его начальным условием

$$G(x, t, x, t_0) = G_x(t, t_0). \quad (\text{A.193})$$

Для функции  $G_L(t, t_0) = G(L, t, L, t_0)$  имеем

$$\frac{\partial}{\partial L} G_L(t, t_0) = \frac{\partial}{\partial L} G(x, t, L, t_0) \Big|_{x=L} + \frac{\partial}{\partial x} G(x, t, L, t_0) \Big|_{x=L}. \quad (\text{A.194})$$

Первое слагаемое в (А.194) определяется соотношением (А.192) при  $x = L$ , а второе — из краевого условия (А.186). В результате получаем замкнутое интегро-дифференциальное уравнение с начальным условием, вытекающим из (А.186):

$$\left( \frac{\partial}{\partial L} - \frac{\partial}{c_0 \partial t_0} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) G_L(t, t_0) = \frac{2}{c_0} \delta(t - t_0) - \frac{1}{2c_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 G_L(t, t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} [\varepsilon(L, t_1) G_L(t_1, t_0)], \quad (\text{А.195})$$

$$G_{L_0}(t, t_0) = g_0(0, t - t_0) = \theta(t - t_0).$$

Уравнения (А.192), (А.193), (А.195) и являются уравнениями метода погружения для данной задачи с несогласованной границей [6, 36].

**Замечание А.15.** Учет краевого условия на границе  $x = L_0$

Выше рассматривалось свободное полупространство  $x < L_0$ , в котором скорость распространения волны равнялась  $c_0$ . Если же скорость распространения волны отлична от скорости распространения волны в полупространстве  $x > L$  и равна  $c_1$ , то очевидно, что все полученные уравнения остаются в силе. В этом случае меняется лишь краевое условие в (А.186) на границе  $x = L_0$  на условие

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) G(x, t, L, t_0) \Big|_{x=L} = \frac{2}{c_0} \delta(t - t_0), \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c_1 \partial t} \right) G(x, t, L, t_0) \Big|_{x=L_0} = 0,$$

и, следовательно, меняется начальное условие для функции  $G_L(t, t_0)$  на условие

$$G_L(t, t_0) = \frac{2c_1}{c_0 + c_1} \theta(t - t_0). \quad \blacklozenge$$

### А.3.2. Стационарная среда

В случае стационарной среды, когда скорость распространения волны не зависит от времени, функция  $\varepsilon(x, t) \equiv \varepsilon(x)$  и все полученные уравнения упрощаются, так как их решения зависят лишь от разности времен  $(t - t_0)$ . В этом случае можно положить  $t_0 = 0$  и переписать, например, уравнения (А.192) и (А.195) в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial L} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) G(x, t, L) = -\frac{1}{2c_0} \varepsilon(L) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \frac{\partial G(x, t - t_1, L)}{\partial t} \frac{\partial G_L(t_1)}{\partial t_1}, \quad (\text{А.196})$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial L} + \frac{2}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) G_L(t) = \frac{2}{c_0} \delta(t) - \frac{1}{2c_0} \varepsilon(L) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \frac{\partial G_L(t - t_1)}{\partial t} \frac{\partial G_L(t_1)}{\partial t_1}, \quad (\text{А.197})$$

$$G_{L_0}(t) = g_0(0, t) = \frac{2c_1}{c_0 + c_1} \theta(t),$$

если скорость распространения волны в свободном полупространстве  $x < L_0 - c_1$ .

Полагая в (А.196)  $x = L_0$ , получаем уравнение для выходящей из слоя волны  $T_L(t) = G(L_0, t, L)$  вида

$$\left( \frac{\partial}{\partial L} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) T_L(t) = -\frac{1}{2c_0} \varepsilon(L) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \frac{\partial T_L(t - t_1)}{\partial t} \frac{\partial G_L(t_1)}{\partial t_1}, \quad (\text{А.198})$$

$$T_{L_0}(t) = g_0(0, t) = \frac{2c_1}{c_0 + c_1} \theta(t).$$

**Замечание А.16.** Структура решения задачи в слое однородной среды

Если параметры среды постоянны ( $c(x) \equiv c$ ), то с помощью преобразования Фурье мы можем легко построить решение уравнений погружения (или соответствующей краевой задачи). А именно, мы получаем следующее выражение для волнового поля на границе слоя  $x = L$  (для простоты мы полагаем  $t_0 = 0$ ):

$$G_L(t) = -\frac{1 + R_1}{2\pi i} \int \frac{d\omega}{\omega + i0} e^{-i\omega t} \frac{1 + R_2 \exp(2i\omega\tau_{L_0})}{1 + R_1 R_2 \exp(2i\omega\tau_{L_0})} = (1 + R_1) [\theta(t) + R_2(1 - R_1)\theta(t - 2\tau_{L_0}) + \dots], \quad (\text{А.199})$$

где  $\tau_{L_0} = (L - L_0)/c$  — время, за которое волна проходит слой среды, и величины  $R_i$  — соответствующие коэффициенты отражения плоских гармонических волн от границ  $x = L$  и  $x = L_0$ :

$$R_1 = \frac{c - c_0}{c + c_0}, \quad R_2 = \frac{c_1 - c}{c_1 + c}.$$

Из выражения (А.199) следует, что величина

$$G_{L_0}(t) = -\frac{(1 + R_1)(1 + R_2)}{1 + R_1 R_2} \theta(t) = \frac{2c_1}{c_0 + c_1} \theta(t) \quad (\text{А.200})$$

при  $L \rightarrow L_0$  (т.е. при стремлении толщины слоя к нулю), и мы должны учитывать все многократные переотражения от границ слоя. Однако значение поля на границе  $G_L(t = +0)$  определяется только границей  $x = L$ :

$$G_L(t = +0) = 1 + R_1 = \frac{2c}{c + c_0}. \quad (\text{А.201})$$

В момент времени  $t = 2\tau_{L_0} + 0$ , т.е. когда волна, отраженная от границы  $x = L_0$ , приходит к границе  $x = L$ , получаем выражение:

$$G_L(2\tau_{L_0} + 0) = (1 + R_1) [1 + R_2(1 - R_1)]. \quad (\text{А.202})$$

Аналогичным образом, для волнового поля внутри слоя среды можно получить выражение:

$$G(x, t, L) = (1 + R_1) [\theta(t - \tau_x) + R_2\theta(t - 2\tau_{L_0} + \tau_x) + \dots],$$

где  $\tau_x = (L - x)/c$  — время прихода волны в точку  $x$ . Из этого выражения, в частности, следует, что

$$G(x, \tau_x + 0, L) = \frac{2c}{c + c_0}, \quad T_L(\tau_{L_0} = 0) = \frac{4cc_1}{(c + c_0)(c + c_1)}, \quad (\text{А.203})$$

где  $T_L(t) = G(L_0, t, L)$  — коэффициент прохождения волны через слой среды. Ниже будет показано, что выражения (А.200)–(А.203) легко обобщаются на случай неоднородной среды.  $\blacklozenge$

**Замечание А.17.** Переход к стационарной волновой задаче

Представим решение в виде

$$G_L(t) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega + i0} G_L(\omega) e^{-i\omega t}.$$

Тогда, например, уравнение (А.197) переписется в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dL} G_L(\omega) = 2i \frac{\omega}{c_0} [G_L(\omega) - 1] + i \frac{\omega}{2c_0} \varepsilon(L) G_L^2(\omega).$$

Отсюда для коэффициента отражения на частоте  $\omega$ ,

$$R_L(\omega) = G_L(\omega) - 1,$$

получаем уравнение Риккати

$$\frac{d}{dL}R_L(\omega) = 2i\frac{\omega}{c_0}R_L(\omega) + i\frac{\omega}{2c_0}\varepsilon(L)[1 + R_L(\omega)]^2, \quad R_{L_0}(\omega) = \frac{c_1 - c_0}{c_1 + c_0},$$

соответствующее стационарной задаче.  $\blacklozenge$

Как указывалось выше, функция  $G(x, t, L)$  при  $t > 0$  описывает волновое поле в среде при падении на нее волны вида

$$g_0(x - L, t) = \theta(x - L + c_0 t).$$

При этом функция  $G_L(t)$ , описывающая волновое поле в плоскости  $x = L$ , т. е. обратнорассеянное поле, имеет структуру

$$G_L(t) = H_L(t)\theta(t). \quad (\text{A.204})$$

Подставляя выражение (A.204) в уравнение (A.197) и разделяя сингулярную  $\delta(t)$  и регулярную  $\theta(t)$  части, что соответствует *методу распространения сингулярностей* (см., например, [89]), получаем равенство

$$H_L(+0) = \frac{2c(L)}{c(L) + c_0}. \quad (\text{A.205})$$

Данное равенство очевидно, и выражает ту особенность, что в момент прихода волны к границе  $x = L$  отражение осуществляется только за счет скачка величины  $c(x)$  на границе слоя  $x = L$ . Его можно было бы взять за основу с самого начала. Уравнение же для функции  $H_L(t)$  при  $t > 0$  принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} + \frac{2}{c(L)}\frac{\partial}{\partial t}\right)H_L(t) = -\frac{1}{2c_0}\varepsilon(L)\int_0^t dt_1 \frac{\partial H_L(t-t_1)}{\partial t} \frac{\partial H_L(t_1)}{\partial t_1}, \quad (\text{A.206})$$

$$H_{L_0}(t) = \frac{2c_1}{c_0 + c_1}.$$

Благодаря структуре уравнения (A.206), мы можем последовательно вычислить коэффициенты разложения функции  $H_L(t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $t = 0$ . Действительно, полагая  $t = 0$  в уравнении (A.206), получаем

$$\frac{\partial H_L(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\frac{c(L)}{2}\frac{\partial}{\partial L}H_L(0) = -\frac{c_0 c(L)c'(L)}{(c(L) + c_0)^2}, \quad (\text{A.207})$$

где  $c'(L) = dc(L)/dL$ . Дифференцируя уравнение (A.206) по  $t$  и полагая опять  $t = 0$ , получаем выражение для  $\partial^2 H_L(t)/\partial t^2|_{t=0}$ , которое выражается через вторую производную  $c''(L) = d^2 c(L)/dL^2$ , и т. д.

Волновое поле внутри слоя среды  $G(x, t, L)$  описывается уравнением (A.196) и имеет следующую структуру:

$$G(x, t, L) = H(x, t, L)\theta(t - \tau_x(L)), \quad (\text{A.208})$$

где величина  $\tau_x(L)$  — время прихода волны от границы  $x = L$  в точку  $x$ . Подставляя выражение (A.208) в уравнение (A.196) и приравнявая нулю коэффициент при  $\theta(t - \tau_x(L))$  получаем уравнение для величины  $\tau_x(L)$ , из которого следует, что

$$\tau_x(L) = \int_x^L \frac{d\xi}{c(\xi)}. \quad (\text{A.209})$$

Для времен  $t > \tau_x(L)$  функция  $H(x, t, L)$  удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} + \frac{2}{c(L)}\frac{\partial}{\partial t}\right)H(x, t, L) = \frac{1}{2c_0}\left(1 - \frac{c_0^2}{c^2(L)}\right)H(x, \tau_x(L), L)\frac{\partial H_L(t - \tau_x(L))}{\partial t} +$$

$$+ \frac{1}{2c_0}\left(1 - \frac{c_0^2}{c^2(L)}\right)\int_0^{t-\tau_x(L)} dt_1 \frac{\partial H(x, t-t_1, L)}{\partial t} \frac{\partial H_L(t_1)}{\partial t_1} \quad (\text{A.210})$$

с начальным условием  $H(x, t, L)|_{L=x} = H_x(t)$ . Уравнение (A.210) не замкнуто относительно функции  $H(x, t, L)$ , так как его правая часть зависит от величины  $H(x, \tau_x(L), L)$ . Чтобы определить эту величину, положим  $t = \tau_x(L)$  в уравнении (A.210). Тогда, учитывая равенства (A.209) и (A.207), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dL}H(x, \tau_x(L), L) = -\frac{c'(L)}{2c(L)}\frac{c(L) - c_0}{c(L) + c_0}H(x, \tau_x(L), L), \quad (\text{A.211})$$

решение которого с начальным условием

$$H(x, \tau_x(L), L)|_{L=x} = H_x(0) = \frac{2c(x)}{c(x) + c_0}$$

имеет вид

$$H(x, \tau_x(L), L) = \frac{2\sqrt{c(x)c(L)}}{c(L) + c_0}. \quad (\text{A.212})$$

Аналогичным образом можно получить и дифференциальное уравнение для величины  $T_L(\tau_{L_0}(L))$ , описывающей выходящую из слоя среды волну, полагая  $x = L_0$  в уравнении (A.211):

$$\frac{d}{dL}T_L(\tau_{L_0}(L)) = -\frac{c'(L)}{2c(L)}\frac{c(L) - c_0}{c(L) + c_0}T_L(\tau_{L_0}(L)).$$

Начальное условие для этого уравнения вытекает из равенства (A.203) при  $L \rightarrow L_0$ :

$$T_L(\tau_{L_0} = 0)\Big|_{L \rightarrow L_0} = \frac{4c(L_0)c_1}{(c(L_0) + c_0)(c(L_0) + c_1)}.$$

Следовательно,

$$T_L(\tau_{L_0}(L)) = \frac{4c_1\sqrt{c(L_0)c(L)}}{(c(L_0) + c_0)(c(L_0) + c_1)}.$$

Таким образом, амплитуда волнового поля (скачок) в момент прихода волны в какую-либо точку слоя среды определяется локальным значением величины  $c(x)$  в этой точке и не зависит от предыстории процесса распространения волны.

Приведенное уравнение справедливо только для интервала времен  $t$ , пока отсутствует волна, отраженная от границы  $x = L_0$ . Так, функция  $G_L(t)$  определяется уравнением (A.206) только для времен  $0 \leq t < 2\tau_{L_0}(L)$ . Для интервала времен  $0 \leq t < 4\tau_{L_0}(L)$  функция  $G_L(t)$  уже имеет структуру

$$G_L(t) = H_L(t)\theta(t) + F_L(t)\theta(t - 2\tau_{L_0}(L)).$$

Это означает, что скачок волнового поля осуществляется в момент времени  $t = 2\tau_{L_0}(L) + 0$  и он вызван приходом волны, отраженной от границы  $x = L_0$ . Подставляя эту структуру в уравнение (A.197), получаем уравнение для функции  $F_L(t)$  и выражение для  $F_L(2\tau_{L_0})$  [9]:

$$F_L(2\tau_{L_0}) = \frac{4c_0c(L)(c_1 - c(L_0))}{(c(L) + c_0)^2(c(L_0) + c_1)}. \quad (\text{A.213})$$

Таким образом, амплитуда скачка на фронте обратнорассеянной волны в момент ее прихода от отражающей границы  $x = L_0$  также определяется локальными значениями величины  $c(x)$  на границах слоя.

Асимптотическое поведение функции  $H_L(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  можно найти из уравнения (A.206), если учесть, что его решение при  $t \rightarrow \infty$  не должно зависеть от начального (по времени) условия  $H_L(0)$ . Выполняя преобразование Лапласа по времени и пренебрегая начальным условием, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL}H_L(p) &= -\frac{2p}{c(L)}H_L(p) - \frac{p}{2c_0}\varepsilon(L)H_L^2(p), \\ H_{L_0}(p) &= \frac{2c_1}{c_0 + c_1}, \end{aligned}$$

решение которого имеет вид

$$H_L(p) = H_{L_0}(p) \frac{\exp(-2p\tau_{L_0}(L))}{1 + \frac{p}{2c_0}H_{L_0}(p) \int_{L_0}^L d\xi \varepsilon(\xi) \exp(-2p\tau_{L_0}(\xi))}, \quad \tau_{L_0}(L) = \int_{L_0}^L \frac{d\eta}{c(\eta)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} H_L(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{i\infty+\sigma} dp \exp(p(t - 2p\tau_{L_0}(L))) \times \\ &\times \frac{H_{L_0}(p)}{1 + \frac{p}{2c_0}H_{L_0}(p) \int_{L_0}^L d\xi \varepsilon(\xi) \exp(-2p\tau_{L_0}(\xi))}, \quad (\text{A.214}) \end{aligned}$$

и решение при  $t \rightarrow \infty$  выходит на стационарное значение  $H_L(t) = 1$ .

### Замечание A.18. Решение обратной задачи

Полученные выше соотношения и уравнения позволяют решить обратную задачу о восстановлении скорости распространения волны  $c(x)$  по известной временной зависимости рассеянного назад поля [9, 124].

Анализ обратной задачи при заданной временной зависимости волнового поля в какой-либо точке внутри слоя среды рассматривался в работе [114]. В самом деле, рассеянное назад поле описывается функцией  $H_L(t)$ , разложение которой в ряд Тейлора в окрестности  $t = 0$  определяет значения  $c(L)$ ,  $c'(L)$  и т. д. Если теперь рассматривать уравнение (A.206) как вспомогательное и переписать его в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2}{c(x)} \frac{\partial}{\partial t} \right) H_x(t) = \frac{1}{2c_0} \left( 1 - \frac{c_0^2}{c^2(x)} \right) \int_0^t dt_1 \frac{\partial H_x(t-t_1)}{\partial t} \frac{\partial H_x(t_1)}{\partial t_1} \quad (\text{A.215})$$

с «начальным» условием

$$H_x(t) \Big|_{x=L} = H(t),$$

то по известному поведению  $c(x)$  в окрестности  $x = L$  можно, решив уравнение (A.215), найти  $H_x(t)$  при  $x = L - \delta$ . По найденному значению  $H_x(t)$  снова находим  $c(x)$ ,  $c'(x)$  и т. д. по формулам

$$H_x(0) = \frac{2c(x)}{c(x) + c_0}, \quad (\text{A.216})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_x(t) \Big|_{t=0} = -\frac{c_0c(x)c'(x)}{(c_0 + c(x))^2}, \dots$$

Наконец, по значению

$$G_L(2\tau_{L_0}(L)) = H_L(2\tau_{L_0}(L)) + F_L(2\tau_{L_0}(L)),$$

согласно формуле (A.213), определяется величина  $c_1$ , характеризующая полупространство  $x < L_0$ .

Описанная схема решения обратной задачи допускает два аналитических решения: для экспоненциальной и линейной по времени функций  $H_L(t)$ .

В самом деле, если

$$H_L(t) = \alpha e^{\beta t}, \quad (\text{A.217})$$

то величины  $\alpha$  и  $\beta$  определяют значения  $c(L)$  и  $c'(L)$ . В этом случае решение уравнения (A.215) также является экспоненциальной функцией времени, т. е. согласно (A.216)

$$H_x(t) = \alpha(x)e^{\beta(x)t}, \quad (\text{A.218})$$

$$\alpha(x) = \frac{2c(x)}{c(x) + c_0}, \quad \beta(x) = -\frac{c_0c'(x)}{2(c(x) + c_0)}.$$

Подставляя (A.218) в (A.215), получаем дифференциальное уравнение второго порядка для  $c(x)$  вида

$$c''(x) - \frac{[c'(x)]^2}{2c(x)} = 0 \quad (\text{A.219})$$

с начальными условиями

$$c'(x)|_{x=L} = c'(L), \quad c(x)|_{x=L} = c(L).$$

Решение этого уравнения имеет две ветви:

$$c(x) = c(L) \left( 1 \pm \frac{\xi}{2} \right)^2, \quad \xi = \frac{|c'(L)|}{c(L)}(L - x), \quad (\text{A.220})$$



где верхний знак относится к случаю  $c'(L) > 0$ , а нижний —  $c'(L) < 0$ . Интересной особенностью решения (A.220) для  $c'(L) > 0$  является тот факт, что время прихода волны в точку  $\xi_0 = 2$ , в которой  $c(x) = 0$ , оказывается бесконечным. В этом случае падающая волна полностью отражается от слоя, проходя внутрь лишь на конечную глубину

$$L - x_0 = 2c(L)/c'(L).$$

Аналогичным образом можно получить аналитическое решение и для линейной по времени функции

$$H_L(t) = \alpha + \beta t. \quad (\text{A.221})$$

Тогда в соответствии с (A.216)

$$\begin{aligned} H_x(t) &= \alpha(x) + \beta(x)t, \\ \alpha(x) &= \frac{2c(x)}{c(x) + c_0}, \quad \beta(x) = -\frac{c_0 c(x) c'(x)}{(c(x) + c_0)^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.222})$$

а подстановка (A.222) в уравнение (A.215) приводит к дифференциальному уравнению следующего вида:

$$c''(x) - \frac{1}{2c(x)} \frac{c(x) - c_0}{c(x) + c_0} [c'(x)]^2 = 0. \quad (\text{A.223})$$

Решение уравнения (A.223) легко находится из трансцендентного уравнения вида

$$\arctg \sqrt{\frac{c(x)}{c_0}} - \sqrt{\frac{c(x)}{c_0}} - \arctg \sqrt{\frac{c(L)}{c_0}} + \sqrt{\frac{c(L)}{c_0}} = \pm \sqrt{\frac{c(L)}{c_0}} \frac{|c'(L)|}{c(L) + c_0} (L - x) \quad (\text{A.224})$$

(где, как и ранее, верхний знак соответствует значениям  $c'(L) > 0$ , а нижний —  $c'(L) < 0$ ) и зависит теперь от величины скачка скорости распространения волны на границе  $L$ . Время прихода волны в точку  $x$ , например для  $c'(L) < 0$ , определяется в этом случае выражением

$$\tau_x(L) = \frac{2(c(L) + c_0)}{\sqrt{c(L)c_0}|c'(L)|} \left( \arctg \sqrt{\frac{c(x)}{c_0}} - \arctg \sqrt{\frac{c(L)}{c_0}} \right).$$

Связь между двумя найденными аналитическими решениями легко заметить, если рассмотреть в (A.223) предельные случаи  $c(x) \gg c_0$  и  $c(x) \ll c_0$ . Так, при  $c(x) \gg c_0$  всюду в слое уравнение (A.223) переходит в (A.219), а при  $c(x) \ll c_0$  в уравнение

$$c(x) + \frac{[c'(x)]^2}{2c(x)} = 0, \quad (\text{A.225})$$

решение которого также имеет две ветви:

$$c(x) = c(L) \left( 1 \mp \frac{3}{2} \xi \right)^{2/3}, \quad \xi = \frac{|c'(L)|}{c(L)} (L - x). \quad (\text{A.226})$$

Необходимо подчеркнуть только, что при решении прямой задачи в случае  $c'(L) < 0$  эти предельные переходы могут привести к неустойчивости, связанной с тем, что функция  $H_L(t)$ , соответствующая решениям (A.219) и (A.226), растет экспоненциально, в то время как для точного решения (A.223) рост  $H_L(t)$  линейный. Отметим, что для приведенных решений обратной задачи, когда поле на границе описывается выражениями (A.217) и (A.221), поле внутри среды — также экспоненциальная и линейная функции времени соответственно.

Выше рассматривался случай несогласованной границы. Аналогичные уравнения погружения можно получить и для случая согласованной границы, они также позволяют решить обратную задачу, т. е. восстановить функцию  $c(x)$  по известной временной зависимости поля на границе слоя  $H_L(t)$  [92–94, 125–130]. ♦

### A.3.3. Одномерная нелинейная волновая задача

Полученные выше уравнения нетрудно обобщить на случай, когда в правой части уравнения (A.188) на с. 152 содержится нелинейный оператор  $\mathfrak{Z}(u)$ , например, вида

$$\mathfrak{Z}(u) = \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} [\varepsilon(x, t, u(x, t)) u(x, t)].$$

В этом случае вместо краевой задачи (A.188), (A.189) получаем краевую нелинейную задачу [36]

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} \right) u(x, t) &= \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} [\varepsilon(x, t, u(x, t)) u(x, t)], \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) u(x, t) \Big|_{x=L} &= 2 \frac{\partial}{c_0 \partial t} u_0(c_0 t), \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) u(x, t) \Big|_{x=L_0} = 0. \end{aligned}$$

Падающее поле  $u_0(c_0 t)$  создает на границе слоя  $x = L$  распределение источников  $f(t)$ , такое что

$$u_0(c_0 t) = \int dt_0 g_0(0, t - t_0) f(t_0),$$

где

$$g_0(x - L, t - t_0) = \theta(c_0(t - t_0) - L + x)$$

— функция Грина в свободном полупространстве  $x > L$ . Следовательно,

$$u(x, t, L) = \int dt_0 G(x, t, L, t_0) f(t_0),$$

где функция  $G(x, t, L, t_0)$  описывается краевой задачей

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} \right) G(x, t, L, t_0) = \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} [\varepsilon(x, t, u(x, t)) G(x, t, L, t_0)],$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) G(x, t, L, t_0) \Big|_{x=L} = \frac{2}{c_0} \delta(t - t_0),$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) G(x, t, L, t_0) \Big|_{x=L_0} = 0,$$

которой эквивалентно интегральное уравнение

$$\begin{aligned} G(x, t, L, t_0) &= g_0(x - L, t - t_0) - \\ &- \frac{1}{2c_0} \int_{L_0}^L dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 g_0(x - x_1, t - t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} [\varepsilon(x_1, t_1, u(x_1, t_1, L)) G(x_1, t_1, L, t_0)]. \end{aligned} \quad (\text{A.227})$$

Для функции  $G(x, t, L, t_0)$  легко получить операторное равенство с вариационными производными:

$$\frac{\partial G(x, t, L, t_0)}{\partial L} = \hat{A}(t_0) G(x, t, L, t_0) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \hat{A}(t') \frac{\delta G(x, t, L, t_0)}{\delta f(t')}, \quad (\text{A.228})$$

которое можно рассматривать как функциональное уравнение, если его дополнить начальным условием

$$G(x, t, L, t_0)|_{L=x} = G_x(t, t_0). \quad (\text{A.229})$$

В равенстве (A.228) действие оператора  $\widehat{A}(t_0)$  на произвольную функцию  $F(t_0)$  определяется соотношением

$$\widehat{A}(t_0)F(t_0) = \frac{\partial}{c_0 \partial t_0} F(t_0) - \frac{1}{2c_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 F(t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \left[ \varepsilon \left( L, t_1, \int d\tilde{t} G_L(t_1, \tilde{t}) f(\tilde{t}) \right) G_L(t_1, t_0) \right],$$

где функция

$$G_L(t, t_0) = G(L, t, L, t_0)$$

описывает волновое поле на границе  $x = L$ , т. е. обратнорассеянную волну.

Для функции  $G_L(t, t_0)$ , с учетом краевых условий (A.119) на с. 132, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial L} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) G_L(t, t_0) = \\ = \frac{2}{c_0} \delta(t - t_0) + \widehat{A}(t_0) G_L(t, t_0) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \widehat{A}(t') \frac{\delta G(x, t, L, t_0)}{\delta f(t')} \end{aligned} \quad (\text{A.230})$$

с начальным условием

$$G_{L_0}(t, t_0) = \theta(t - t_0). \quad (\text{A.231})$$

Уравнения (A.228)–(A.231) и являются уравнениями метода погружения для рассматриваемой нелинейной задачи. Отметим, что эти уравнения можно использовать для анализа задачи о распространении фронта падающей волны аналогично линейной задаче [22].

Если в уравнении (A.230) опустить члены, содержащие  $\varepsilon(x, t, u)$ , то решением упрощенного уравнения будет функция

$$G_L(t, t_0) = g_0(0, t - t_0),$$

что соответствует пренебрежению обратным рассеянием. Подставляя это решение в уравнение (A.228), можно получить для функции  $G(x, t, L, t_0)$  интегральное уравнение

$$\begin{aligned} G(x, t, L, t_0) = g_0(x - L, t - t_0) - \\ - \frac{1}{2c_0} \int_x^L dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 g_0(x - x_1, t - t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} [\varepsilon(x_1, t_1, u(x_1, t_1, L)) G(x_1, t_1, L, t_0)]. \end{aligned}$$

Для волнового поля в этом случае имеем уравнение

$$u(x, t) = u_0(x, t) - \frac{1}{2c_0} \int_x^L dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 g_0(x - x_1, t - t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} [\varepsilon(x_1, t_1, u(x_1, t_1)) u(x_1, t_1)],$$

которое можно записать в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) u(x, t) = - \frac{1}{2c_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 g_0(0, t - t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} [\varepsilon(x, t_1, u(x, t_1)) u(x, t_1)] = \\ = - \frac{1}{2c_0} \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon(x, t, u(x, t)) u(x, t)]. \end{aligned}$$

## Приложение Б

### ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

В данном приложении мы обсудим некоторые свойства фундаментальных решений (функций Грина) волновых уравнений в свободном пространстве и слоистых средах, следуя монографии [36] и работам [102, 112].

#### Б.1. Случай свободного пространства

Прежде всего рассмотрим функцию Грина для одномерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dx^2} g(x, x_0) + k^2 g(x, x_0) = \delta(x - x_0). \quad (\text{B.1})$$

Решение уравнения (B.1) с условиями излучения при  $x \rightarrow \pm\infty$  имеет вид

$$g(x, x_0) = g(x - x_0) = \frac{1}{2ik} e^{ik|x-x_0|}. \quad (\text{B.2})$$

Появление модуля  $|x - x_0|$  в правой части (B.2) обусловлено тем, что уравнение (B.1) — уравнение второго порядка по  $x$ . Однако, если мы зафиксируем взаимное расположение точек наблюдения и расположения источника, то функция Грина будет удовлетворять равенству (для определенности считаем, что  $x_0 > x$ )

$$\frac{\partial}{\partial x_0} g(x - x_0) = ik g(x - x_0),$$

которое можно рассматривать как уравнение первого порядка, если дополнить его начальным условием

$$g(x - x_0)|_{x_0=x} = g(0) = \frac{1}{2ik}.$$

Таким образом, при фиксированном расположении источника относительно точки наблюдения порядок уравнения для функции Грина понижается. Это обстоятельство является общим для волновых задач (*свойство факторизации волновых уравнений*) и соответствует тому факту, что в однородном пространстве волна, излучаемая, например, в направлении  $x < x_0$  (или  $x > x_0$ ), распространяется без изменения направления.

В общем случае функция Грина удовлетворяет операторному уравнению второго порядка

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \widehat{M}^2(\boldsymbol{\eta}) \right\} g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = \delta(x - x_0) g(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0), \quad (\text{B.3})$$

где оператор  $\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})$  действует на временную и другие пространственные переменные, обозначенные через  $\boldsymbol{\eta}$ . Так, для уравнения (B.1) оператор  $\widehat{M}^2(\boldsymbol{\eta})$  есть просто число  $\widehat{M}^2(\boldsymbol{\eta}) = k^2$ .

Функция Грина имеет структуру, аналогичную (Б.2):

$$g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = e^{i|x-x_0|\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})} g(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = e^{i|x-x_0|\widehat{M}(-\boldsymbol{\eta}_0)} g(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) \quad (\text{Б.4})$$

и, следовательно, например при  $x < x_0$ , описывается операторным уравнением первого порядка по  $x$  ( $x_0$ ) вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) &= -\frac{\partial}{\partial x} g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = \\ &= i\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = i\widehat{M}(-\boldsymbol{\eta}_0)g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) \end{aligned}$$

с начальным условием

$$g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0)|_{x_0=x} = g(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) \equiv g(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0).$$

Решение уравнения (Б.3) непрерывно по  $x$ , а его производная по  $x$  терпит разрыв в точке расположения источника  $x = x_0$ :

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) \right|_{x=x_0+0} - \left. \frac{\partial}{\partial x} g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) \right|_{x=x_0-0} = \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0). \quad (\text{Б.5})$$

Подставляя (Б.4) в (Б.5), получаем выражение

$$2i\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})g(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0). \quad (\text{Б.6})$$

В общем случае оператор  $\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})$  можно рассматривать как интегральный оператор. В самом деле, действие оператора  $\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})$  на произвольную функцию  $f(\boldsymbol{\eta})$  можно представить в виде

$$\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\eta}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{\xi} \widehat{M}(\boldsymbol{\eta})\delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi})f(\boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{\xi} M(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi})f(\boldsymbol{\xi}),$$

где ядро интегрального оператора определяется равенством

$$M(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}) = \widehat{M}(\boldsymbol{\eta})\delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}). \quad (\text{Б.7})$$

Можно ввести и обратный оператор  $\widehat{M}^{-1}(\boldsymbol{\eta})$  с соответствующим ядром  $M^{-1}(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi})$ .

Действуя на равенство (Б.6) оператором  $\widehat{M}^{-1}(\boldsymbol{\eta})$ , получаем, согласно (Б.7), ядро интегрального оператора вида

$$M(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = 2i\widehat{M}^2(\boldsymbol{\eta})g(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0), \quad (\text{Б.8})$$

а действуя на (Б.6) обратным оператором  $\widehat{M}^{-1}(\boldsymbol{\eta})$ , получаем ядро обратного интегрального оператора

$$M^{-1}(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = \widehat{M}^{-1}(\boldsymbol{\eta})\delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = 2ig(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0). \quad (\text{Б.9})$$

Таким образом, ядра интегральных операторов  $\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})$  и  $\widehat{M}^{-1}(\boldsymbol{\eta})$  просто определяются самим фундаментальным решением волновых уравнений.

Рассмотрим теперь конкретные волновые задачи.

1. Уравнение Гельмгольца запишем в виде

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k^2 \right) g(x - x_0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) = \delta(x - x_0)\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0), \quad (\text{Б.10})$$

где через  $\mathbf{R}$  обозначены координаты в плоскости, перпендикулярной оси  $x$ .

Решение уравнения (Б.10) с условиями излучения на бесконечности имеет вид

$$g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad \mathbf{r} = \{x, \mathbf{R}\}.$$

Функция  $g(\mathbf{r})$  допускает интегральное представление

$$g(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{8i\pi^2} \int \frac{d\mathbf{q}}{\sqrt{k^2 - \mathbf{q}^2}} \exp \left\{ i\sqrt{k^2 - \mathbf{q}^2}|x| + i\mathbf{q}\mathbf{R} \right\}.$$

Следовательно, оператор  $\widehat{M}(\mathbf{R})$  в данном случае имеет вид

$$\widehat{M}(\mathbf{R}) = \sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}, \quad \widehat{M}(\mathbf{R}_0) = \sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}_0}},$$

и соответствующие ядра интегральных операторов определяются, согласно (Б.8), (Б.9), выражениями

$$\begin{aligned} M(\mathbf{R}) &= 2i(k^2 + \Delta_{\mathbf{R}})g(\mathbf{R}) = -\frac{i}{2\pi R^2} \left( \frac{1}{R} - ik \right) e^{ikR}, \\ M^{-1}(\mathbf{R}) &= -\frac{i}{2\pi R} e^{ikR}. \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

В двумерном случае имеем соответственно

$$g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \quad (\mathbf{r} = \{x, y\}),$$

где  $H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}|)$  — функция Ганкеля и, следовательно, ядра соответствующих интегральных операторов

$$\widehat{M}(y) = \left[ k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]^{1/2}, \quad \widehat{M}^{-1}(y) = \left[ k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]^{-1/2}$$

определяются выражениями

$$M(y) = \frac{k}{2|y|} H_1^{(1)}(k|y|), \quad M^{-1}(y) = \frac{1}{2} H_0^{(1)}(k|y|). \quad (\text{Б.12})$$

В одномерном случае, как указывалось выше, операторы  $\widehat{M}$ ,  $\widehat{M}^{-1}$  являются просто числами.

2. Нестационарное волновое уравнение запишем в виде (Б.3)

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) g(x - x_0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0, t - t_0) = \delta(x - x_0)\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)\delta(t - t_0). \quad (\text{Б.13})$$

Для этого уравнения оператор  $\widehat{M}^2(\boldsymbol{\eta})$  является оператором дифференцирования:

$$\widehat{M}^2(\mathbf{R}, t) = \Delta_{\mathbf{R}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Решение уравнения (Б.13) с условиями излучения (запаздывающее решение) в трехмерном случае имеет вид

$$g(x, \mathbf{R}, t) = -\frac{c}{2\pi}\theta(t)\delta(c^2t^2 - x^2 - \mathbf{R}^2),$$

где  $\theta(t)$  — ступенчатая функция Хевисайда. И, следовательно, ядра соответствующих интегральных операторов имеют вид

$$\begin{aligned} M(\mathbf{R}, t) &= \frac{i}{\pi ct}\theta(t)\frac{\partial}{\partial t}\delta(c^2t^2 - \mathbf{R}^2), \\ M^{-1}(\mathbf{R}, t) &= -\frac{ic}{\pi}\theta(t)\delta(c^2t^2 - \mathbf{R}^2). \end{aligned} \quad (\text{Б.14})$$

В двумерном случае

$$g(x, y, t) = -\frac{c}{2\pi}\frac{\theta(ct - \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{c}{2\pi}\frac{\theta(c^2t^2 - x^2 - y^2)}{\sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2}}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} M(y, t) &= \frac{i}{\pi ct}\theta(t)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\theta(c^2t^2 - y^2)}{\sqrt{c^2t^2 - y^2}}, \\ M^{-1}(y, t) &= -\frac{ic}{\pi}\frac{\theta(ct - y)}{\sqrt{c^2t^2 - y^2}}. \end{aligned} \quad (\text{Б.15})$$

В одномерном случае

$$g(x, t) = -\frac{c}{2}\theta(ct - |x|)$$

и, следовательно,

$$M(t) = \frac{i}{c}\delta'(t), \quad M^{-1}(t) = -ic\theta(t). \quad (\text{Б.16})$$

Выше мы рассмотрели некоторые свойства фундаментальных решений (функций Грина) волновых уравнений, описывающих поле точечного источника в неограниченном свободном пространстве. Отметим, что изложенный анализ в случае свободного пространства существенно не меняется и для задач о поле точечного источника в конечном слое свободного или слоистой пространства.

## Б.2. Случай слоистой среды

Волновые уравнения в слоистой среде, для которой  $\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon(z)$ , факторизуются, так как волны распространяются в плоскости  $(x, y)$  и не рассеиваются назад.

Обозначим волновое поле точечного источника в одномерном пространстве через функцию  $G^{(1)}(z, z_0)$ . Она удовлетворяет уравнению

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + k^2(z) \right] G^{(1)}(z, z_0) = \delta(z - z_0),$$

решение которого можно записать в операторном виде

$$G^{(1)}(z, z_0) = \hat{L}^{-2}(z)\delta(z - z_0),$$

где оператор

$$\hat{L}^2(z) = \frac{d^2}{dz^2} + k^2(z).$$

Волновое поле точечного источника в двумерном пространстве описывается функцией Грина  $G^{(2)}(x, z, z_0)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{L}^2(z) \right] G^{(2)}(x, z, z_0) = \delta(x)\delta(z - z_0).$$

Решение этого уравнения имеет структуру

$$G^{(2)}(x, z, z_0) = e^{i|x|\hat{L}(z)}G^{(2)}(0, z, z_0), \quad (\text{Б.17})$$

где функция  $G^{(2)}(0, z, z_0)$  описывает волновое поле на оси  $x = 0$ . Скачок производной  $\frac{\partial}{\partial x}G^{(2)}(x, z, z_0)$  в точке  $x = 0$  описывается выражением

$$\frac{\partial}{\partial x}G^{(2)}(x, z, z_0) \Big|_{x=+0} - \frac{\partial}{\partial x}G^{(2)}(x, z, z_0) \Big|_{x=-0} = \delta(z - z_0),$$

и, следовательно, с помощью соотношения (Б.17) получаем равенство

$$2i\hat{L}(z)G^{(2)}(0, z, z_0) = \delta(z - z_0), \quad (\text{Б.18})$$

из которого следует, что

$$G^{(2)}(0, z, z_0) = \frac{1}{2i}\hat{L}^{-1}(z)\delta(z - z_0). \quad (\text{Б.19})$$

Действуя теперь оператором  $\hat{L}^2(z)$  на (Б.18), получаем равенство

$$\hat{L}^2(z)G^{(2)}(0, z, z_0) = \frac{1}{2i}\hat{L}(z)\delta(z - z_0). \quad (\text{Б.20})$$

Операторы  $\hat{L}(z)$  и  $\hat{L}^{-1}(z)$  можно рассматривать как интегральные операторы, и, следовательно, равенства (Б.20), (Б.19) определяют их ядра. Принимая это во внимание, видим, что равенство (Б.19) представляет собой нелинейное интегральное уравнение для функции  $G^{(2)}(0, z, z_0)$ , описывающей волновое поле на оси  $x = 0$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi G^{(2)}(0, z, \xi)G^{(2)}(0, \xi, z_0) = -\frac{1}{4}G^{(1)}(z, z_0),$$

где функция  $G^{(1)}(z, z_0)$  — функция Грина для одномерной задачи.

В трехмерном случае в слоистой среде функция Грина описывается уравнением

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \hat{L}^2(z) \right] G^{(3)}(x, y, z, z_0) = \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0).$$

Запишем его решение в виде

$$G^{(3)}(x, y, z, z_0) = e^{i|x|\hat{L}(y, z)}G^{(3)}(0, y, z, z_0), \quad (\text{Б.21})$$

где оператор

$$\widehat{L}(y, z) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \widehat{L}^2(z),$$

а функция  $G^{(3)}(0, y, z, z_0)$  описывает волновое поле в плоскости  $(y, z)$ . Условие скачка для производной  $\frac{\partial}{\partial x} G^{(3)}(x, y, z, z_0)$  в плоскости  $x = 0$  дает операторное равенство

$$G^{(3)}(0, y, z, z_0) = \frac{1}{2i} \widehat{L}^{-1}(y, z) \delta(y) \delta(z - z_0),$$

которое можно переписать в виде, содержащем функцию Ганкеля первого рода:

$$G^{(3)}(0, y, z, z_0) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left[ y \widehat{L}(z) \right] \delta(z - z_0).$$

Используя интегральное представление для функции Ганкеля,

$$H_0^{(1)}(\beta\mu) = \frac{1}{i\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \exp \left\{ i \frac{\mu}{2} \left( x + \frac{\beta^2}{x} \right) \right\},$$

получаем связь функции  $G^{(3)}(0, y, z, z_0)$  с решением параболического уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, z, z_0) &= \frac{i}{2k} \widehat{L}^2(z) u(t, z, z_0), \\ u(0, z, z_0) &= \delta(z - z_0) \end{aligned}$$

по вспомогательному параметру  $t$  в виде квадратуры

$$G^{(3)}(0, y, z, z_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp \left[ i \frac{k}{2t} y^2 \right] u(t, z, z_0)$$

или в виде

$$G^{(3)}(0, y, z, z_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp \left\{ i \frac{k}{2t} (y^2 + t^2) \right\} \psi(t, z, z_0),$$

где функция  $\psi(t, z, z_0)$  является решением параболического уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, z, z_0) &= \frac{i}{2k} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(z) - k^2 \right] \psi(t, z, z_0), \\ \psi(0, z, z_0) &= \delta(z - z_0). \end{aligned} \quad (\text{Б.22})$$

Так как ориентация оси  $x$  была произвольной, то при  $y > 0$  функция

$$G^{(3)}(x, y, z, z_0) = G^{(3)}(\rho, z, z_0),$$

где  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , определяет функцию Грина во всем пространстве:

$$G^{(3)}(x, y, z, z_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp \left\{ i \frac{k}{2t} (x^2 + y^2 + t^2) \right\} \psi(t, z, z_0). \quad (\text{Б.23})$$

Интегрируя равенство (Б.23) сперва по  $y$ , а затем и по  $x$ , получаем соответствующие интегральные представления для двумерной и одномерной функций Грина в виде

$$G^{(2)}(x, z, z_0) = \frac{1}{2ik} \left( \frac{k}{2\pi i} \right)^{1/2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \exp \left\{ i \frac{k}{2t} (x^2 + t^2) \right\} \psi(t, z, z_0), \quad (\text{Б.24})$$

$$G^{(1)}(z, z_0) = \frac{1}{2ik} \int_0^\infty dt \exp \left\{ i \frac{kt}{2} \right\} \psi(t, z, z_0). \quad (\text{Б.25})$$

## Приложение В

### ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ДЛЯ ОПИСАНИЯ КОГЕРЕНТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Остановимся теперь кратко на математическом аппарате, позволяющем описать когерентные процессы в стохастических динамических системах. Для более полной информации см. монографии [37, 38, 40].

#### В.1. Вариационные (функциональные) производные

Прежде всего напомним общее определение функционала. Мы говорим, что задан некоторый функционал, если установлено правило, по которому каждой функции из некоторой совокупности сопоставлено число. Примеры функционалов:

$$\text{а) } F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} d\tau a(\tau)\varphi(\tau),$$

где  $a(t)$  — заданная (фиксированная) функция, а пределы  $t_1, t_2$  могут быть как конечными, так и бесконечными. Это — линейный функционал.

$$\text{б) } F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2)\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2),$$

где  $B(t_1, t_2)$  — фиксированная заданная функция. Это — квадратичный функционал.

$$\text{в) } F[\varphi(\tau)] = f(\Phi[\varphi(\tau)]),$$

где  $f(x)$  — заданная функция, а величина  $\Phi[\varphi(\tau)]$  сама является функционалом.

Оценим разность значений одного и того же функционала (см. рис. В.1), взятого для двух функций  $\varphi(\tau)$  и  $\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)$ ,  $\delta\varphi(\tau) \neq 0$  при

$$t - \frac{1}{2}\Delta t < \tau < t + \frac{1}{2}\Delta t$$

Вариацией функционала называется линейная по  $\delta\varphi(\tau)$  часть разности

$$\delta F[\varphi(\tau)] = \{F[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] - F[\varphi(\tau)]\}.$$

*Вариационной (или функциональной) производной* называется предел (см., например, [?])

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\int_{\Delta t} d\tau \delta\varphi(\tau)}. \quad (\text{В.1})$$

С целью сокращения записи вместо обозначения  $\delta F[\varphi(\tau)]/\delta\varphi(t)dt$  будем использовать  $\delta F[\varphi(\tau)]/\delta\varphi(t)$ .

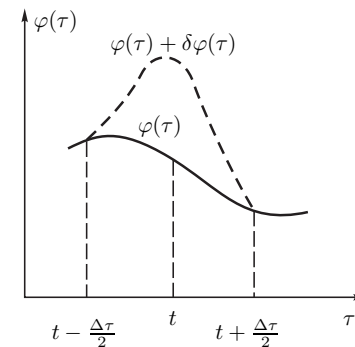


Рис. В.1. К определению вариационной производной

Отметим, что если в (В.1) взять в качестве функции  $\delta\varphi(\tau) = \alpha\delta(\tau - t)$ , где  $\delta(\tau)$  — обычная дельта-функция Дирака, то формулу (В.1) можно записать в виде, имеющем вид обычной производной:

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d}{d\alpha} F[\varphi(\tau) + \alpha\delta(\tau - t)].$$

Вариационная производная от функционала  $F[\varphi(\tau)]$  является снова функционалом от  $\varphi(\tau)$ , зависящим еще от точки  $t$  как от параметра. Следовательно, эта вариационная производная будет иметь производные двойного типа: ее можно дифференцировать обычным образом по параметру  $t$ , а можно также составить ее вариационную производную по  $\varphi(\tau)$  в точке  $\tau = t'$ , являющуюся второй вариационной производной от исходного функционала:

$$\frac{\delta^2 F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t')\delta\varphi(t)} = \frac{\delta}{\delta\varphi(t')} \left[ \frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} \right].$$

Вторая вариационная производная будет уже функционалом от  $\varphi(\tau)$ , зависящим от пары точек  $t, t'$ , и т. д.

Найдем вариационные производные от функционалов (а), (б) и (в).

В случае (а) имеем

$$\delta F[\varphi(\tau)] = F[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] - F[\varphi(\tau)] = \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} d\tau a(\tau)\delta\varphi(\tau).$$

Если функция  $a(t)$  непрерывна на отрезке  $\Delta t$ , то по теореме о среднем

$$\delta F[\varphi(\tau)] = a(t') \int_{\Delta t} d\tau \delta\varphi(\tau),$$

где точка  $t'$  принадлежит отрезку  $[t - \Delta t/2, t + \Delta t/2]$ , так что

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a(t') = a(t). \quad (\text{В.2})$$

Аналогично, в случае **(б)** получаем

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t)} = \int_{t_1}^{t_2} d\tau [B(\tau, t) + B(t, \tau)] \varphi(\tau) \quad (t_1 < t < t_2).$$

Отметим, что здесь функцию  $B(\tau_1, \tau_2)$  всегда можно считать симметричной функцией своих аргументов.

В случае **(в)** имеем

$$\begin{aligned} F[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] &= f(\Phi[\varphi(\tau)]) + \frac{\partial}{\partial \Phi}(\Phi[\varphi(\tau)]) \delta\Phi \delta\Phi[\varphi(\tau)] + \dots = \\ &= F[\varphi(\tau)] + \frac{\partial f(\Phi[\varphi(\tau)])}{\partial \Phi} \delta\Phi[\varphi(\tau)] + \dots \end{aligned}$$

и, следовательно, получаем

$$\frac{\delta}{\delta \varphi(t)} f(\Phi[\varphi(\tau)]) = \frac{\partial f(\Phi[\varphi(\tau)])}{\partial \Phi} \frac{\delta}{\delta \varphi}(t) \Phi[\varphi(\tau)]. \quad (\text{B.3})$$

Рассмотрим теперь функционал  $\Phi[\varphi(\tau)] = F_1[\varphi(\tau)]F_2[\varphi(\tau)]$ . Для него имеем

$$\begin{aligned} \delta\Phi[\varphi(\tau)] &= \{F_1[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)]F_2[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] - F_1[\varphi(\tau)]F_2[\varphi(\tau)]\} = \\ &= F_1[\varphi(\tau)]\delta F_2[\varphi(\tau)] + F_2[\varphi(\tau)]\delta F_1[\varphi(\tau)], \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta \varphi(t)} F_1[\varphi(\tau)]F_2[\varphi(\tau)] = F_1[\varphi(\tau)] \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} F_2[\varphi(\tau)] + F_2[\varphi(\tau)] \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} F_1[\varphi(\tau)]. \quad (\text{B.4})$$

Можно формально определить и выражение для вариационной производной функционала  $\varphi(\tau_0)$  по функции  $\varphi(t)$  соотношением

$$\frac{\delta \varphi(\tau_0)}{\delta \varphi(t)} = \delta(\tau_0 - t). \quad (\text{B.5})$$

Формулу (B.5) можно обосновать, например, рассматривая линейный функционал вида

$$F[\varphi(\tau)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \varphi(\tau) \exp\left\{-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (\text{B.6})$$

Для него, согласно (B.2), вариационная производная имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta \varphi(t)} F[\varphi(\tau)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(t - \tau_0)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (\text{B.7})$$

Переходя теперь формально к пределу при  $\sigma \rightarrow 0$  в выражениях (B.6) и (B.7), мы и получаем формулу (B.5). И при этом

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t)} = \frac{\partial F[\varphi(\tau)]}{\partial \varphi(\tau)} \frac{\delta \varphi(\tau)}{\delta \varphi(t)} = \frac{\partial F[\varphi(\tau)]}{\partial \varphi(\tau)} \delta(\tau - t).$$

С помощью формулы (B.5) очень удобно производить функциональное дифференцирование функционалов, явно зависящих от  $\varphi(\tau)$ . Так для квадратичного функционала **(б)** имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) \varphi(\tau_1) \varphi(\tau_2) &\stackrel{(\text{B.4})}{=} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) \left[ \frac{\delta \varphi(\tau_1)}{\delta \varphi(t)} \varphi(\tau_2) + \varphi(\tau_1) \frac{\delta \varphi(\tau_2)}{\delta \varphi(t)} \right] \stackrel{(\text{B.5})}{=} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d\tau [B(t, \tau) + B(\tau, t)] \varphi(\tau) \quad (t_1 < t < t_2). \end{aligned}$$

В качестве другого примера рассмотрим функционал

$$F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} d\tau L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right).$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} F[\varphi(\tau)] &\stackrel{(\text{B.3})}{=} \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left[ \frac{\partial L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)}{\partial \varphi(\tau)} + \frac{\partial L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)}{\partial \dot{\varphi}(\tau)} \frac{d}{d\tau} \right] \frac{\delta \varphi(\tau)}{\delta \varphi(t)} \stackrel{(\text{B.5})}{=} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left[ \frac{\partial L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)}{\partial \varphi(\tau)} + \frac{\partial L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right)}{\partial \dot{\varphi}(\tau)} \frac{d}{d\tau} \right] \delta(\tau - t) = \\ &= \left( -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}(t)} + \frac{\partial}{\partial \varphi(t)} \right) L\left(t, \varphi(t), \frac{d\varphi(t)}{dt}\right), \end{aligned}$$

где  $\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t)$ , если точка  $t$  принадлежит интервалу  $(t_1, t_2)$ .

Подобно тому как функция может быть разложена в ряд Тейлора, функционал  $F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)]$  можно разложить в функциональный ряд Тейлора по функции  $\eta(\tau)$  в окрестности  $\eta(\tau) \sim 0$ :

$$\begin{aligned} F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)] &= F[\varphi(\tau)] + \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t)} \eta(t) + \\ &+ \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \frac{\delta^2 F[\varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t_1) \delta \varphi(t_2)} \eta(t_1) \eta(t_2) + \dots \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

Отметим, что операторное выражение типа

$$\begin{aligned} 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} + \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \eta(t_1) \eta(t_2) \frac{\delta^2}{\delta \varphi(t_1) \delta \varphi(t_2)} + \dots = \\ = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} + \frac{1}{2!} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} \right]^2 + \dots \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

можно сокращенно записать в виде оператора

$$\exp\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} \right\}, \quad (\text{B.10})$$

действие которого надо понимать именно в смысле разложения (В.9). С помощью этого оператора формулу (В.8) можно переписать в виде

$$F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)] = \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta \varphi(t)} \right\} F[\varphi(\tau)], \quad (\text{В.11})$$

что позволяет нам интерпретировать оператор (В.10) как оператор функционального сдвига.

Рассмотрим теперь функционал  $F[t; \varphi(\tau)]$ , зависящий от параметра  $t$ . Этот функционал можно дифференцировать по  $t$ , а также найти его вариационную производную по  $\varphi(t')$ . Легко видеть, что эти операции перестановочны, т. е. имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta F[t; \varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t')} = \frac{\delta}{\delta \varphi(t')} \frac{\partial F[t; \varphi(\tau)]}{\partial t}. \quad (\text{В.12})$$

Если область изменения  $\tau$  не зависит от  $t$ , то равенство (В.12) очевидно. В противном случае, например для функционалов  $F[t; \varphi(\tau)]$ , у которых  $0 \leq \tau \leq t$ , равенство (В.12) проверяется путем разложения функционала  $F[t; \varphi(\tau)]$  в функциональный ряд Тейлора.

В качестве конкретного примера применения описанного формализма, рассмотрим простейшую задачу, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0. \quad (\text{В.13})$$

## В.2. Принцип динамической причинности

Для многих прикладных задач, связанных с изучением статистических характеристик их решений, требуется знание зависимости решений этих задач от коэффициентов уравнения (вообще говоря, функциональной). Эти зависимость обладает некоторыми общими свойствами. Проиллюстрируем их на примере простейшей задачи — системы обыкновенных дифференциальных уравнений (В.13), которую можно переписать в виде нелинейного интегрального уравнения

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t d\tau \mathbf{U}(\mathbf{r}(\tau), \tau). \quad (\text{В.14})$$

Решение уравнения (В.14) зависит параметрически от начальных условий  $\mathbf{r}_0, t_0$  и функционально от векторного поля  $\mathbf{U}(\mathbf{r}', \tau)$ .

Проварьируем уравнение (В.14) по полю  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ . Считая, что начальное условие  $\mathbf{r}_0$  не зависит от поля  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ , с помощью равенства (В.5), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\delta U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r}(\tau) - \mathbf{r}') \delta(\tau - t'),$$

получаем линейное уравнение для вариационной производной:

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')) \theta(t' - t_0) \theta(t - t') + \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(\tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')}, \quad (\text{В.15})$$

где  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  — дельта функция Дирака, а

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases}$$

— ступенчатая функция Хевисайда. Из уравнения (В.15) следует, что

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = 0, \quad \text{если } t' > t \text{ или } t' < t_0, \quad (\text{В.16})$$

т. е. решение  $\mathbf{r}(t)$  динамической задачи (В.14), если рассматривать его как функционал поля  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$ , зависит только от значений  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$  при  $t_0 < t' < t$ . Следовательно, функция  $\mathbf{r}(t)$  не меняется, если поле  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$  изменяется вне интервала  $(t_0, t')$ , т. е. для  $t' < t_0$  или  $t' > t$ . Условие (В.16) будем называть *условием динамической причинности*.

Принимая это условие во внимание, уравнение (В.15) можно переписать в виде (при  $t_0 < t' < t$ )

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')) + \int_{t'}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(\tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')}, \quad (\text{В.17})$$

и, следовательно, переходя к пределу  $t \rightarrow t' + 0$ , получаем равенство

$$\left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t=t'+0} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')), \quad (\text{В.18})$$

или же в пределе  $t' \rightarrow t - 0$

$$\left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t'=t-0} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \quad (\text{В.19})$$

Интегральное уравнение (В.17) для вариационной производной, очевидно, эквивалентно линейному дифференциальному уравнению с начальным условием

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right) = \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(t), t)}{\partial r_k} \left( \frac{\delta r_k(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right), \quad (\text{В.20})$$

$$\left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t=t'} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')).$$

Условие динамической причинности является общим свойством задач, описываемых дифференциальными уравнениями с начальными условиями.

## В.3. Уравнение Лиувилля

Современный аппарат теории случайных процессов позволяет построить замкнутое описание динамических систем, если эти системы удовлетворяют условию динамической причинности и описываются линейными дифференциальными уравнениями



в частных производных или интегральными уравнениями определенного типа. Переход от описания исходной, вообще говоря нелинейной, системы к эквивалентному описанию с помощью линейных уравнений в частных производных можно осуществить с помощью индикаторных функций. Однако размерность пространства переменных при этом увеличивается. Рассмотрим такой переход на примере уравнения (В.13).

Пусть стохастическая задача описывается системой уравнений (В.13):

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0. \quad (\text{В.21})$$

Введем скалярную функцию в пространстве  $(\mathbf{r}, t)$ :

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}), \quad (\text{В.22})$$

обычно называемую *индикаторной функцией*, сосредоточенную на сечении случайного процесса  $\mathbf{r}(t)$  заданной плоскостью  $\mathbf{r}(t) = \text{const}$ .

Дифференцируя (В.22) по времени  $t$  с помощью уравнения (В.21), получаем равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{r}, t) &= -\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) = -\mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} [\mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t) \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r})]. \end{aligned}$$

Используя далее «выкалывающее» свойство дельта-функции

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t) \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}),$$

получаем линейное уравнение в частных производных

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \varphi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \varphi(\mathbf{r}, t_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (\text{В.23})$$

которое эквивалентно исходной системе и называется *уравнением Лиувилля*. Это уравнение соответствует уравнению непрерывности для движения фазовых точек в фазовом пространстве  $\{\mathbf{r}, t\}$ .

**Замечание В.1.** *Особенность работы с дельта-функцией*

Из изложенного метода вывода уравнения Лиувилля очевидно, что необходимо видеть различие между функцией  $\mathbf{r}(t)$  и параметром  $\mathbf{r}$ . В связи с этим для правильной работы с дельта-функцией необходимо выписывать аргумент функции  $\mathbf{r}(t)$  во всех промежуточных выкладках (ср. запись уравнений (В.21) и (В.13)). Пренебрежение этим правилом приводит, как правило, к ошибке.  $\blacklozenge$

Переход от системы (В.21) к уравнению Лиувилля (В.23) сопровождается расширением фазового пространства  $(\mathbf{r}, t)$ , которое, однако, имеет конечную размерность.

Уравнение (В.23) можно переписать в виде линейного интегрального уравнения:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \{ \mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau) \varphi(\mathbf{r}, \tau) \},$$

вариация которого по функции  $U_i(\mathbf{r}', t')$  с использованием формулы (В.5) приводит к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} &= - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial r_i} \left\{ \frac{\delta U_i(\mathbf{r}, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \varphi(\mathbf{r}, \tau) \right\} - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau) \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right\} = \\ &= -\theta(t-t')\theta(t'-t_0) \frac{\partial}{\partial r_j} \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}, t') \} - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau) \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right\}, \quad (\text{В.24}) \end{aligned}$$

где, как и ранее,  $\theta(t)$  — ступенчатая функция Хевисайда. Следовательно,

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \sim \theta(t-t')\theta(t'-t_0),$$

и вариационная производная удовлетворяет условию

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = 0, \quad \text{если } t' < t_0 \text{ или } t' > t,$$

которое выражает условие динамической причинности для уравнения Лиувилля (В.23).

При условии  $t_0 < t' < t$  уравнение (В.24) можно записать в виде

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = -\frac{\partial}{\partial r_j} \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}, t') \} - \int_{t'}^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \mathbf{U}(\mathbf{r}, \tau) \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, \tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \right\}, \quad (\text{В.25})$$

откуда получаем равенство

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_i(\mathbf{r}', t')} \Big|_{t=t'+0} = -\frac{\partial}{\partial r_i} \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}, t') \}. \quad (\text{В.26})$$

Отметим, что равенство (В.26) можно получить и непосредственно из выражения (В.18). В самом деле, вариационная производная  $\delta\varphi(\mathbf{r}, t)/\delta U_j(\mathbf{r}', t')$ , в силу определения функции  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ,

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} = \frac{\delta}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial r_i} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')}, \quad (\text{В.27})$$

и, следовательно, при  $t = t' + 0$  имеем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\delta\varphi(\mathbf{r}, t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \Big|_{t=t'+0} &= -\frac{\partial}{\partial r_i} \delta(\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}) \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}', t')} \Big|_{t=t'+0} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial r_j} \{ \delta(\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \} = -\frac{\partial}{\partial r_j} \{ \varphi(\mathbf{r}, t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \}. \quad (\text{В.28}) \end{aligned}$$

## В.4. Статистические характеристики случайных процессов и полей

### В.4.1. Общие замечания

Если мы имеем случайную функцию  $z(t)$  (случайный процесс), то все ее статистические характеристики в фиксированный момент времени  $t$  описываются одномерной плотностью вероятностей

$$P(z, t) = \langle \delta(z(t) - z) \rangle, \quad (\text{В.29})$$

параметрически зависящей от времени, с помощью равенства

$$\langle f(z(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) P(z, t).$$

В формуле В.29 через скобки  $\langle \dots \rangle$  обозначена операция усреднения по ансамблю случайного процесса  $z(t)$ .

Интегральная функция распределения для этого процесса, определяющая вероятность того, что в момент времени  $t$  процесс  $z(t) < Z$ , вычисляется по формуле

$$F(t, Z) = P(z(t) < Z) = \int_{-\infty}^Z dz P(z, t),$$

и, следовательно,

$$F(t, Z) = \langle \theta(Z - z(t)) \rangle, \quad F(t, \infty) = 1, \quad (\text{В.30})$$

где  $\theta(z)$  — функция Хевисайда, равная нулю при  $z < 0$  и единице при  $z > 0$ .

Отметим, что сингулярная дельта-функция Дирака, стоящая под знаком усреднения в (В.29):

$$\varphi(z, t) = \delta(z(t) - z),$$

называется *индикаторной функцией*.

Для полного статистического описания случайной функции  $z(t)$  достаточно знать ее характеристический функционал

$$\Phi[v(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau v(\tau) z(\tau) \right\} \right\rangle,$$

где функция  $v(t)$  — произвольная (достаточно «хорошая») функция. Зная функционал  $\Phi[v(\tau)]$ , можно найти такие характеристики случайной функции  $z(t)$ , как ее среднее значение  $\langle z(t) \rangle$ , корреляционную функцию  $\langle z(t_1) z(t_2) \rangle$ ,  $n$ -точечную моментную функцию  $\langle z(t_1) \dots z(t_n) \rangle$  и т. д.

В самом деле, раскладывая характеристический функционал  $\Phi[v(\tau)]$  в функциональный ряд Тейлора, получаем для него выражение через моментные функции процесса  $z(t)$ :

$$\Phi[v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n M_n(t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n),$$

$$M_n(t_1, \dots, t_n) = \langle z(t_1) \dots z(t_n) \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(t_1) \dots \delta v(t_n)} \Phi[v(\tau)] \Big|_{v=0}.$$

Таким образом, моментные функции случайного процесса  $z(t)$  определяются через вариационные производные характеристического функционала. Вариационные производные и правила работы с ними определены в Приложении А.

Представим теперь  $\Phi[v(\tau)]$  в виде  $\Phi[v(\tau)] = \exp\{\Theta[v(\tau)]\}$ . Функционал  $\Theta[v(\tau)]$  также можно разложить в функциональный ряд Тейлора:

$$\Theta[v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_n(t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n), \quad (\text{В.31})$$

где функция

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(t_1) \dots \delta v(t_n)} \Theta[v(\tau)] \Big|_{v=0}$$

называется *кумулянтной функцией*  $n$ -го порядка случайного процесса  $z(t)$ .

#### В.4.2. Расщепление корреляций для гауссовых случайных процессов и полей (формула Фурутцу–Новикова)

При статистическом анализе динамических систем необходимо уметь вычислять корреляцию  $\langle z(t) R[z(\tau)] \rangle$ , где  $R[z(\tau)]$  — функционал, который может зависеть от процесса  $z(t)$  как явным, так и неявным образом.

Для вычисления этого среднего значения рассмотрим вспомогательный функционал  $R[z(\tau) + \eta(\tau)]$ , где  $\eta(t)$  — произвольная детерминированная функция, и вычислим величину  $\langle z(t) R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle$ . Интересующую нас корреляцию получим, положив в окончательном результате  $\eta(\tau) = 0$ .

Функционал  $R[z(\tau) + \eta(\tau)]$  можно разложить в функциональный ряд Тейлора по  $z(\tau)$  и представить его в виде

$$R[z(\tau) + \eta(\tau)] = e^{-\int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau)}} R[\eta(\tau)],$$

вводя оператор функционального сдвига. Тогда для корреляции  $\langle z(t) R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle$  получаем выражение:

$$\langle z(t) R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \Omega \left[ t, \frac{\delta}{i \delta \eta(\tau)} \right] \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle,$$

где функционал  $\Omega[t, v(\tau)]$  определяется в виде

$$\Omega[t, v(\tau)] = \frac{\left\langle z(t) \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle}{\left\langle \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle} = \frac{1}{\Phi[v(\tau)]} \frac{\delta}{i \delta v(t)} \Phi[v(\tau)] \equiv \frac{\delta}{i \delta v(t)} \Theta[v(\tau)], \quad (\text{В.32})$$

где  $\Theta[v(\tau)] = \ln \Phi[v(\tau)]$ , а  $\Phi[v(\tau)]$  — характеристический функционал случайного процесса  $z(t)$ .

Учитывая, что вариационное дифференцирование по  $\eta(\tau)$  можно заменить дифференцированием по  $z(\tau)$  и положить затем  $\eta(\tau) = 0$ , получаем для интересующей нас корреляции окончательное выражение

$$\langle z(t) R[z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[ t, \frac{\delta}{i \delta z(\tau)} \right] R[z(\tau)] \right\rangle. \quad (\text{В.33})$$

Если воспользоваться разложением функционала  $\Theta[v(\tau)]$  в функциональный ряд Тейлора (??), то функционал

$$\Omega[t, v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_{n+1}(t, t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n)$$

и, следовательно, выражение (В.33) принимает вид

$$\langle z(t)R[z(\tau)] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_{n+1}(t, t_1, \dots, t_n) \left\langle \frac{\delta^n R[z(\tau)]}{\delta z(t_1) \dots \delta z(t_n)} \right\rangle. \quad (\text{В.34})$$

В физических задачах, удовлетворяющих условию динамической причинности по времени  $t$ , статистические характеристики решения в момент времени  $t$  определяются статистическими характеристиками случайного процесса  $z(\tau)$  при  $0 \leq \tau \leq t$ , которые полностью описываются характеристическим функционалом

$$\Phi[t; v(\tau)] = e^{\Theta[t, v(\tau)]} = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle.$$

В этом случае все полученные выше формулы остаются в силе для вычисления статистических средних  $\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle$  при  $t' < t$ ,  $\tau \leq t$ , т. е. имеет место равенство

$$\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[ t', t, \frac{\delta}{i\delta z(\tau)} \right] R[t; z(\tau)] \right\rangle \quad (0 < t' < t), \quad (\text{В.35})$$

где

$$\begin{aligned} \Omega[t', t, v(\tau)] &= \frac{\delta}{i\delta v(t')} \Theta[t, v(\tau)] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_n K_{n+1}(t', t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n). \end{aligned} \quad (\text{В.36})$$

В случае, когда  $t' = t - 0$ , формула в (В.35) по-прежнему имеет место, т. е.

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[ t, t, \frac{\delta}{i\delta z(\tau)} \right] R[t; z(\tau)] \right\rangle. \quad (\text{В.37})$$

Однако разложение (В.36) не всегда дает правильный предельный переход при  $t' \rightarrow t - 0$  (т. е. операции предельного перехода и разложения в функциональный ряд Тейлора могут быть и не перестановочны). В этом случае

$$\Omega[t, t, v(\tau)] = \frac{1}{\Phi[t; v(\tau)]} \frac{d}{i\delta v(t)} \Phi[t; v(\tau)] = \frac{d}{i\delta v(t)} \Theta[t, v(\tau)] \quad (\text{В.38})$$

и статистические средние в (В.35) и (В.37) могут быть разрывны при  $t' = t - 0$ .

Для гауссового случайного процесса  $z(t)$  все формулы, полученные выше, существенно упрощаются. В этом случае логарифм характеристического функционала  $\Phi[v(\tau)]$  имеет вид (среднее значение процесса  $z(t)$  считаем равным нулю) (В.53) и, следовательно, функционал  $\Omega[t, v(\tau)]$  (В.32) принимает вид линейного функционала

$$\Omega[t, v(\tau)] = i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(t, \tau_1) v(\tau_1), \quad (\text{В.39})$$

а формула (В.33) принимает вид

$$\langle z(t)R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(t, \tau_1) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau_1)} \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle. \quad (\text{В.40})$$

Заменяя теперь дифференцирование по  $\eta(\tau)$  на дифференцирование по  $z(\tau)$  и полагая  $\eta(\tau) = 0$ , получаем равенство

$$\langle z(t)R[z(\tau)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(t, \tau_1) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(\tau_1)} R[z(\tau)] \right\rangle, \quad (\text{В.41})$$

которое в физической литературе принято называть *формулой Фуртуцу–Новикова* по имени авторов, впервые ее получивших [68, 98].

Легко написать и многомерное обобщение формулы (В.41), которое можно записать в виде

$$\langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}) R[\mathbf{z}] \rangle = \int d\mathbf{r}' \langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}) z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}') \rangle \left\langle \frac{\delta R[\mathbf{z}]}{\delta z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}')} \right\rangle, \quad (\text{В.42})$$

где через  $\mathbf{r}$  обозначены все непрерывные аргументы случайного поля векторного поля  $\mathbf{z}(\mathbf{r})$ , а через  $i_1, \dots, i_n$  — индексные аргументы. По повторяющимся индексным аргументам в правой части (В.42) предполагается суммирование.

Если случайный процесс  $z(\tau)$  определен только на отрезке времени  $[0, t]$ , то функционал  $\Theta[t, v(\tau)]$  будет определяться выражением

$$\Theta[t, v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2), \quad (\text{В.43})$$

а функционалы  $\Omega[t', t, v(\tau)]$ ,  $\Omega[t, t, v(\tau)]$  будут линейными функционалами:

$$\begin{aligned} \Omega[t', t, v(\tau)] &= \frac{\delta}{i\delta v(t')} \Theta[t, v(\tau)] = i \int_0^t d\tau B(t', \tau) v(\tau), \\ \Omega[t, t, v(\tau)] &= \frac{d}{i\delta v(t)} \Theta[t, v(\tau)] = i \int_0^t d\tau B(t, \tau) v(\tau), \end{aligned} \quad (\text{В.44})$$

и, следовательно, формулы (В.35), (В.37) будут иметь вид

$$\langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle = \int_0^t d\tau B(t', \tau) \left\langle \frac{\delta R[z(\tau)]}{\delta z(\tau)} \right\rangle \quad (t' \leq t), \quad (\text{В.45})$$

совпадающий с равенством (В.41) при выполнении условия

$$\frac{\delta R[t; z(\tau)]}{\delta z(\tau)} = 0 \quad \text{при} \quad \tau < 0, \quad \tau > t. \quad (\text{В.46})$$

Соответствующее обобщение многомерной формулы (В.42) на случай причинного во времени функционала  $R[t; \mathbf{z}(\tilde{\mathbf{r}}, \tau)]$  имеет вид

$$\langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}, t) R[t; \mathbf{z}(\tilde{\mathbf{r}}, \tau)] \rangle = \int_0^t d\tau' \int d\mathbf{r}' \langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}, t) z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}', \tau') \rangle \left\langle \frac{\delta R[t; \mathbf{z}(\tilde{\mathbf{r}}, \tau)]}{\delta z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}', \tau')} \right\rangle. \quad (\text{В.47})$$

Полное описание случайных процессов, содержится в их характеристических функционалах. Однако даже знание одноточечных плотностей вероятностей случайных процессов дает определенную информацию об эволюции случайных процессов во всем интервале времен.

Прежде всего обсудим понятие типичной реализации случайного процесса  $z(t)$ , которое характеризует основные особенности поведения отдельной реализации процесса в целом на всем интервале времен.

### В.4.3. Типичная реализация случайного процесса

Назовем кривой типичной реализации случайного процесса  $z(t)$  детерминированную кривую  $z^*(t)$ , которая является *медианой интегральной функции распределения* (В.30) и определяется как решение алгебраического уравнения

$$F(t, z^*(t)) = \int_{-\infty}^{z^*(t)} dz P(z, t) = \frac{1}{2}. \quad (\text{В.48})$$

Основанием для этого является свойство медианы, заключающееся в том, что для любого интервала времени  $(t_1, t_2)$  случайный процесс  $z(t)$  как-бы «обвивает» кривую  $z^*(t)$  таким образом, что среднее время, в течение которого выполняется неравенство  $z(t) > z^*(t)$ , совпадает со средним временем в течение которого выполняется обратное неравенство  $z(t) < z^*(t)$  (рис. В.2), т. е.

$$\langle T_{z(t) > z^*(t)} \rangle = \langle T_{z(t) < z^*(t)} \rangle = \frac{1}{2}(t_2 - t_1). \quad (\text{В.49})$$

В самом деле, интегрируя равенство (В.48) по времени в интервале  $(t_1, t_2)$ , получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt F(t, z^*(t)) = \frac{1}{2}(t_2 - t_1). \quad (\text{В.50})$$

С другой стороны, в силу определения интегральной функции распределения (В.30), интеграл в левой части (В.50) равен

$$\int_{t_1}^{t_2} dt F(t, z^*(t)) = \langle T(t_1, t_2) \rangle, \quad (\text{В.51})$$

где  $T(t_1, t_2) = \sum_1^N \Delta t_k$  — общее время из интервала  $(t_1, t_2)$ , в течение которого реализация процесса  $z(t)$  лежит выше кривой  $z^*(t)$ . Сопоставляя (В.50) с (В.51), и получаем равенство (В.49).

Кривая  $z^*(t)$  может, естественно, существенно отличаться от любой конкретной реализации процесса  $z(t)$  и не описывает величину возможных выбросов. Таким образом, кривая типичной реализации  $z^*(t)$  случайного процесса  $z(t)$ , полученная с помощью одновременной плотности вероятностей, определена тем не менее на всем интервале времени  $t \in (0, \infty)$ .

Для конкретных типов случайных процессов можно получить дополнительную информацию, характеризующую уже выбросы относительно этой кривой.

Рассмотрим теперь несколько примеров случайных процессов.

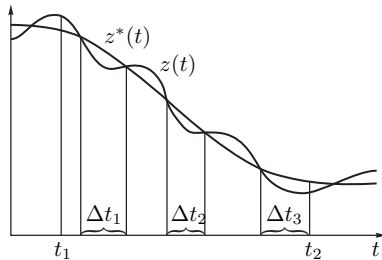


Рис. В.2. К определению кривой типичной реализации случайного процесса

### В.4.4. Простейшие примеры случайных процессов

#### Гауссов случайный процесс.

Прежде всего обсудим случай непрерывного процесса — гауссова случайного процесса  $z(t)$  со средним значением, равным нулю ( $\langle z(t) \rangle = 0$ ), и корреляционной функцией  $B(t_1, t_2) = \langle z(t_1)z(t_2) \rangle$ . Его характеристический функционал имеет вид

$$\Phi[v(\tau)] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 B(t_1, t_2) v(t_1) v(t_2) \right\}. \quad (\text{В.52})$$

Для этого процесса единственной отличной от нуля кумулянтной функцией является его корреляционная функция  $K_2(t_1, t_2) = B(t_1, t_2)$ , и, следовательно,

$$\Theta[v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 B(t_1, t_2) v(t_1) v(t_2). \quad (\text{В.53})$$

Отметим, что для гауссова процесса со средним значением, равным нулю, все моментные функции нечетного порядка равны нулю, а моментные функции четного порядка определяются суммой, в которой процессы  $z(t_i)z(t_k)$  усредняются попарно всевозможными способами.

Если функция  $v(\tau)$  в формуле (В.53) отлична от нуля только в интервале  $0 < \tau < t$ , то характеристический функционал

$$\Phi[t; v(\tau)] = \left\langle \exp \left( i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right) \right\rangle = \exp \left\{ -\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2) \right\} \quad (\text{В.54})$$

зависит также и от времени  $t$ , и в этом случае функционал  $\Phi[t; v(\tau)]$ , как функция параметра  $t$ , удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = -v(t) \int_0^t dt_1 B(t, t_1) v(t_1) \Phi[t; v(\tau)], \quad \Phi[0, v(\tau)] = 1. \quad (\text{В.55})$$

Чтобы получить одновременную характеристическую функцию в момент времени  $t$  для гауссова случайного процесса, положим в (В.52) функцию  $v(\tau)$  в виде

$$v(\tau) = v\delta(\tau - t).$$

В результате получаем

$$\Phi(v, t) = \langle e^{ivz(t)} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz P(z, t) e^{ivz} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2(t) v^2 \right\}, \quad (\text{В.56})$$

где  $\sigma^2(t) = B(t, t)$ . Одновременную плотность вероятностей гауссова случайного процесса получим, выполняя обратное преобразование Фурье от (В.56):

$$P(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \Phi(v, t) e^{-ivz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma^2(t)} \right\}. \quad (\text{В.57})$$

Отметим, что для стационарного во времени случайного процесса  $z(t)$  величина дисперсии  $\sigma^2(t)$  не зависит от времени  $t$ , т. е.  $\sigma^2(t) = \sigma^2 = \text{const}$ .

Функция  $P(z, t)$  симметрична по  $z$  относительно точки  $z = 0$ , т. е.

$$P(z, t) = P(-z, t). \quad (\text{B.58})$$

При наличии среднего значения для гауссова случайного процесса  $z(t) - \langle z(t) \rangle$  вместо (B.57) получаем выражение

$$P(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{(z - \langle z(t) \rangle)^2}{2\sigma^2(t)} \right\}, \quad (\text{B.59})$$

и кривая типичной реализации (B.48) для гауссова случайного процесса  $z(t)$ , в силу свойства симметрии (B.58), очевидно, совпадает со средним значением процесса  $z(t)$ , т. е.

$$z^*(t) = \langle z(t) \rangle, \quad (\text{B.60})$$

так как равенство (B.48)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_{-\infty}^{z^*(t)} dz \exp \left\{ -\frac{(z - \langle z(t) \rangle)^2}{2\sigma^2(t)} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_{-\infty}^{z^*(t) - \langle z(t) \rangle} dz \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma^2(t)} \right\} = \frac{1}{2}$$

выполняется при условии (B.60).

### Логарифмически нормальный случайный процесс.

Отметим, что для так называемого *логарифмически нормального (логнормального)* случайного процесса  $y(t)$ , логарифм которого является гауссовым случайным процессом

$$y(t) = e^{z(t)},$$

одновременная плотность вероятностей  $P(y, t)$  имеет вид

$$P(y, t) = \frac{1}{y} P(z = \ln y, t) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [e^{-(z(t))} y]}{2\sigma^2(t)} \right\},$$

и, следовательно, интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{y^*(t)} dy P(y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_{-\infty}^{y^*(t)} \frac{dy}{y} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [e^{-(z(t))} y]}{2\sigma^2(t)} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_{-\infty}^{\ln[e^{-(z(t))} y^*(t)]} dz \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma^2(t)} \right\} \end{aligned}$$

равен 1/2 при условии, что  $e^{-(z(t))} y^*(t) = 1$ , т. е. кривая типичной реализации для логнормального случайного процесса  $y(t)$  определяется равенством

$$y^*(t) = e^{\langle z(t) \rangle} = e^{\langle \ln y(t) \rangle}. \quad (\text{B.61})$$

Отметим также, что если мы знаем поведение моментных функций случайного процесса  $y(t)$  во времени, т. е. функции  $\langle y^n(t) \rangle$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), то тем самым мы знаем и статистические характеристики случайного процесса  $z(t) = \ln y(t)$ . В самом деле,

$$\langle y^n(t) \rangle = \langle e^{n \ln y(t)} \rangle = \exp \left\{ n \langle \ln y(t) \rangle + \frac{n^2}{2} \sigma_{\ln y}^2(t) \right\},$$

и, следовательно,

$$\langle \ln y(t) \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \langle y^n(t) \rangle, \quad \sigma_{\ln y}^2(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} \ln \langle y^n(t) \rangle. \quad (\text{B.62})$$

## В.5. Приближение дельта-коррелированного гауссова случайного поля

В предыдущих главах подробно рассматривались общие случаи анализа стохастических уравнений. Здесь мы рассмотрим приближение дельта-коррелированного во времени гауссова случайного поля в стохастических уравнениях и обсудим его физический смысл. Это приближение наиболее широко используется при решении практических задач.

### В.5.1. Уравнение Фоккера–Планка

Пусть векторная функция  $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$  удовлетворяет динамическому уравнению

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (\text{B.63})$$

где  $v_i(\mathbf{x}, t)$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) — детерминированные функции, а  $f_i(\mathbf{x}, t)$  — случайные функции ( $n + 1$ ) переменных, обладающие следующими свойствами:

- а)  $f_i(\mathbf{x}, t)$  — гауссово случайное поле в  $(n + 1)$ -мерном пространстве  $(\mathbf{x}, t)$ ,
- б)  $\langle f_i(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$ .

Будем для определенности считать, что  $t$  — временная координата, а  $\mathbf{x}$  — пространственная.

Статистические характеристики поля  $f_i(\mathbf{x}, t)$  полностью описываются заданием его корреляционного тензора

$$B_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = \langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t') \rangle.$$

Так как уравнение (B.63) является уравнением первого порядка с начальным условием, то для него выполняется условие динамической причинности

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} x_i(t) = 0 \quad \text{при } t' < t_0 \text{ и } t' > t, \quad (\text{B.64})$$

т. е. его решение  $\mathbf{x}(t)$  функционально зависит лишь от предшествующих по  $t$  значений  $f_j(\mathbf{x}, t')$  из интервала  $t_0 \leq t' \leq t$ . При этом для вариационной производной имеем равенство

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t - 0)} x_i(t) = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}'). \quad (\text{B.65})$$

Однако может существовать статистическая связь между  $\mathbf{x}(t)$  и последующими значениями  $f_j(\mathbf{x}, t'')$ , где  $t'' > t$ , так как такие значения  $f_j(\mathbf{x}, t'')$  коррелированы со значениями  $f_j(\mathbf{x}, t')$  при  $t' \leq t$ . Ясно, что корреляция функции  $\mathbf{x}(t)$  с последующими значениями  $f_j(\mathbf{x}, t'')$  заметна лишь при  $t'' - t \leq \tau_0$ , где  $\tau_0$  — радиус корреляции поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  по переменной  $t$ .

Для достаточно большого класса реальных физических процессов характерный временной масштаб изменения функции  $\mathbf{x}(t)$  имеет величину порядка  $T \gg \tau_0$ , и в этом случае существует малый параметр —  $\tau_0/T$ , который может быть использован для построения приближенного решения.

В первом приближении по этому параметру малости можно рассматривать асимптотику при  $\tau_0 \rightarrow 0$ . При этом значения  $\mathbf{x}(t')$  при  $t' < t$  будут не только функционально, но и статистически независимы от значений  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t'')$  при  $t'' > t$ . Это приближение эквивалентно замене корреляционного тензора  $B_{ij}$  на некоторый эффективный тензор, определяемый равенством

$$B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = 2\delta(t - t')F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t). \quad (\text{B.66})$$

Величина  $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$  при этом определяется из условия равенства интегралов от  $B_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t')$  и  $B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t')$  по  $t'$ :

$$F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t'),$$

что и соответствует переходу к гауссовому дельта-коррелированному по времени  $t$  случайному полю.

Введем индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}), \quad (\text{B.67})$$

где  $\mathbf{x}(t)$  — решение уравнения (B.63), удовлетворяющую уравнению Лиувилля

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) \varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (\text{B.68})$$

При этом

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t - 0)} \varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}, t) \}. \quad (\text{B.69})$$

Уравнение для плотности вероятностей решения уравнения (B.63)

$$P(\mathbf{x}, t) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle$$

получим, усредняя уравнение (B.68) по ансамблю реализаций поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle. \quad (\text{B.70})$$

Уравнение (B.70) можно переписать в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \int dx' \int_{t_0}^t dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} \right\rangle. \quad (\text{B.71})$$

Здесь мы воспользовались формулой Фурутцу–Новикова (B.42) на с. 181:

$$\langle f_k(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \rangle = \int d\mathbf{x}' \int dt' B_{kl}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]}{\delta f_l(\mathbf{x}', t')} \right\rangle, \quad (\text{B.72})$$

справедливой для корреляции гауссова случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  с произвольным функционалом  $R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$  от него, и условием динамической причинности (B.64).

Уравнение (B.71) показывает, что одновременная плотность вероятностей решения  $\mathbf{x}(t)$  в момент времени  $t$  определяется функциональной зависимостью решения  $\mathbf{x}(t)$  от поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}', t)$  для всех времен в интервале  $(t_0, t)$ .

В общем случае плотность вероятностей  $P(\mathbf{x}, t)$  не описывается замкнутым уравнением. Если же для корреляционной функции поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  воспользоваться приближением (B.66), то возникнут члены, связанные со значениями  $\delta \varphi[\mathbf{x}, t, \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] / \delta f_j(\mathbf{x}', t')$  при совпадающих временных аргументах  $t' = t - 0$ ,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \int d\mathbf{x}' F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \left\langle \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_j(\mathbf{x}', t - 0)} \right\rangle,$$

которые, согласно равенству (B.69), выражаются непосредственно через саму величину  $\varphi[\mathbf{x}, t, \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$ . Таким образом, мы приходим к замкнутому уравнению Фоккера–Планка

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)] \right) P(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t)], \quad (\text{B.73})$$

где

$$A_k(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial}{\partial x'_i} F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \right|_{\mathbf{x}' = \mathbf{x}}.$$

Уравнение (B.73) следует решать с начальным условием  $P(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ , или же с начальным условием более общего вида:  $P(\mathbf{x}, t_0) = W_0(\mathbf{x})$ , если начальные условия также случайны, но статистически независимы от поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ .

Уравнение Фоккера–Планка (B.73) — уравнение в частных производных, и его дальнейший анализ существенно зависит от формулировки краевых условий по  $\mathbf{x}$ , которые формулируются для анализа конкретных задач.

Рассмотрим величины, входящие в уравнение (B.73). Члены этого уравнения с  $A_k(\mathbf{x}, t)$  и  $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$  обусловлены флуктуациями поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ . Если поле  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  стационарно во времени, то величины  $A_k(\mathbf{x})$  и  $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  не зависят от времени. Если к тому же поле  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  однородно и изотропно по всем пространственным координатам, то величина  $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) = \text{const}$ , что соответствует постоянному тензору коэффициентов диффузии, а величина  $A_k(\mathbf{x}, t) = 0$  (заметим, однако, что зависимость  $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  и  $A_k(\mathbf{x}, t)$  от  $\mathbf{x}$  может быть связана и с использованием криволинейных координат).

## В.5.2. Плотность вероятностей перехода

Вернемся теперь к динамической системе (B.63) и рассмотрим  $m$ -временную плотность вероятностей

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_m, t_m) = \langle \delta(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_1) \dots \delta(\mathbf{x}(t_m) - \mathbf{x}_m) \rangle, \quad (\text{B.74})$$

относящуюся к  $m$  различным моментам времени  $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ . Дифференцируя (B.74) по времени  $t_m$  и используя затем динамическое уравнение (B.63), условие динамической причинности (B.64), определение функции  $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$  и формулу

Фурутцу–Новикова (В.72), можно получить уравнение, аналогичное уравнению Фоккера–Планка (В.73):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_m} P_m(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_m, t_m) + \\ & + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{mk}} [v_k(\mathbf{x}_m, t_m) + A_k(\mathbf{x}_m, t_m)] P_m(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_m, t_m) = \\ & = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_{mk} \partial x_{ml}} [F_{kl}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m, t_m) P_m(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_m, t_m)]. \end{aligned} \quad (\text{В.75})$$

Здесь суммирование по индексу  $m$  не производится. Начальное условие к (В.75) можно найти из формулы (В.74). Полагая  $t_m = t_{m-1}$  в (В.74), получаем

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_m, t_{m-1}) = \delta(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \quad (\text{В.76})$$

Решение уравнения (В.75) можно искать в виде

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \quad (\text{В.77})$$

Так как все дифференциальные операции в (В.75) относятся к  $t_m$  и  $\mathbf{x}_m$ , то, подставляя (В.77) в (В.75) и (В.76), находим следующее уравнение для плотности вероятностей перехода:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)] \right) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)] \quad (\text{В.78})$$

с начальным условием

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) |_{t \rightarrow t_0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

где

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) | \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \rangle.$$

В уравнении (В.78) мы обозначили переменные  $\mathbf{x}_m, t_m$  через  $\mathbf{x}, t$ , а переменные  $\mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}$  — через  $\mathbf{x}_0, t_0$ .

Применяя формулу (В.77) ( $m-1$ ) раз, получаем соотношение

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) \dots p(\mathbf{x}_2, t_2 | \mathbf{x}_1, t_1) P(\mathbf{x}_1, t_1), \quad (\text{В.79})$$

где  $P(\mathbf{x}_1, t_1)$  — плотность вероятностей, определяемая уравнением (В.73) и относящаяся к одному моменту времени  $t_1$ . Равенство (В.79) выражает многовременную плотность вероятностей через произведение плотностей вероятностей перехода и означает, что случайный процесс  $\mathbf{x}(t)$  является марковским.

### В.5.3. Об условиях применимости уравнения Фоккера–Планка

Для оценки границ применимости уравнения Фоккера–Планка необходимо учитывать конечность радиуса корреляции  $\tau_0$  поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  по временной координате. В этом случае вместо уравнения для плотности вероятностей (В.73) получается уравнение

$$\widehat{E}P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_k} S'(\mathbf{x}, t),$$

где  $\widehat{E}$  — оператор, стоящий в левой части уравнения (В.73), в котором величина  $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$  заменена на

$$\widetilde{F}_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \int_0^t dt' B_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t),$$

а член  $S'(\mathbf{x}, t)$  учитывает поправки к вектору плотности потока вероятностей, связанные с конечностью  $\tau_0$ . При  $\tau_0 \rightarrow 0$  мы возвращаемся к уравнению (В.73). Таким образом, условие малости параметра  $\tau_0/T$  является необходимым, но, вообще говоря, не достаточным для возможности описывать статистические характеристики решения уравнения (В.63) на основе приближения дельта-коррелированного случайного поля, которому соответствует уравнение Фоккера–Планка. Для каждой конкретной задачи необходимо проводить более детальные исследования. Далее мы приведем физически более наглядный метод, называемый *диффузионным приближением*, также приводящий к марковости решения уравнения (В.63), но учитывающий, в определенной мере, конечность временного радиуса корреляции.

Здесь же подчеркнем, что приближение дельта-коррелированного случайного поля не означает формальной замены случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  в (В.63) на случайное поле с корреляционной функцией (В.66). Это приближение соответствует построению асимптотического разложения при стремлении временного радиуса корреляции  $\tau_0$  поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  к нулю. И при таком предельном переходе точные средние величины типа

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{x}', \tau)] \rangle$$

переходят в выражения, полученные с помощью формальной замены корреляционного тензора поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  на эффективный тензор (В.66).

### В.5.4. Простейшие марковские случайные процессы

Существует лишь небольшое число уравнений Фоккера–Планка, допускающих точное решение. Это прежде всего уравнения Фоккера–Планка, соответствующие таким стохастическим уравнениям, которые сами допускают отыскание решения в аналитическом виде. Для таких задач зачастую удается определить не только одноточечную плотность вероятностей и переходную плотность вероятностей, но и характеристический функционал, а также другие важные для приложений статистические характеристики. Самым простым случаем является уравнение, определяющее *винеровский случайный процесс*. Учитывая особую важность таких процессов в физике (они, например, описывают *броуновское движение частицы*).

#### Винеровский случайный процесс

Винеровский случайный процесс определяется как решение стохастического уравнения

$$\frac{d}{dt} w(t) = z(t), \quad w(0) = 0,$$

где  $z(t)$  — гауссов дельта-коррелированный во времени процесс с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t) z(t') \rangle = 2\sigma^2 \tau_0 \delta(t - t').$$

Решение этого уравнения

$$w(t) = \int_0^t d\tau z(\tau)$$

— непрерывный гауссов нестационарный случайный процесс с параметрами

$$\langle w(t) \rangle = 0, \quad \langle w(t)w(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0 \min(t, t').$$

И, следовательно, его характеристический функционал имеет структуру

$$\begin{aligned} \Phi[t; v(\tau)] &= \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau w(\tau)v(\tau) \right\} \right\rangle = \\ &= \exp \left\{ -\sigma^2\tau_0 \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 v(\tau_1)v(\tau_2) \min(\tau_1, \tau_2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.80})$$

### Винеровский случайный процесс со сносом

Обсудим более общий процесс со сносом, зависящий от параметра  $\alpha$  по формуле

$$w(t, \alpha) = -\alpha t + w(t), \quad \alpha > 0.$$

Процесс  $w(t, \alpha)$  — марковский процесс и его плотность вероятностей

$$P(w, t, \alpha) = \langle \delta(w(t, \alpha) - w) \rangle$$

описывается уравнением Фоккера–Планка:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial w} \right) P(w, t, \alpha) = D \frac{\partial^2}{\partial w^2} P(w, t, \alpha), \quad P(w, 0, \alpha) = \delta(w), \quad (\text{B.81})$$

где через коэффициент диффузии обозначена величина  $D = \sigma^2\tau_0$ . Его решение имеет вид гауссова распределения:

$$P(w, t, \alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{(w + \alpha t)^2}{4Dt} \right\}. \quad (\text{B.82})$$

Соответствующая интегральная функция распределения, равная вероятности того, что  $w(t, \alpha) < w$ , равна

$$F(w, t, \alpha) = \int_{-\infty}^w dw P(w, t, \alpha) = \Phi \left( \frac{w}{\sqrt{2Dt}} + \alpha \sqrt{\frac{t}{2D}} \right), \quad (\text{B.83})$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z dy \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} \quad (\text{B.84})$$

— интеграл вероятностей. При этом кривая типичной реализации винеровского случайного процесса со сносом, в соответствии с формулами (B.61) на с. 184, является линейной функцией времени:

$$w^*(t, \alpha) = -\alpha t.$$

С помощью винеровского случайного процесса можно конструировать и другие процессы, удобные для моделирования различных физических явлений. Для положительных величин такой простейшей аппроксимацией является логарифмически нормальный (логнормальный) процесс, который мы и рассмотрим более подробно.

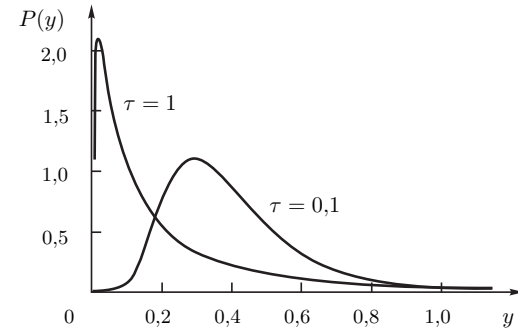


Рис. В.3. Логарифмически нормальная плотность вероятностей (B.86) для значения параметра  $\alpha/D = 1$  и безразмерного времени  $\tau = 0,1$  и  $1$

### Логарифмически нормальный процесс

Определим логнормальный случайный процесс формулой

$$y(t, \alpha) = e^{w(t, \alpha)} = \exp \left\{ -\alpha t + \int_0^t d\tau z(\tau) \right\}, \quad (\text{B.85})$$

где  $z(t)$  — гауссов процесс «белого шума» с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0\delta(t - t').$$

Он описывается стохастическим уравнением

$$\frac{d}{dt} y(t, \alpha) = \{-\alpha + z(t)\} y(t, \alpha), \quad y(0, \alpha) = 1.$$

Одновременная плотность вероятностей логнормального процесса

$$\begin{aligned} P(y, t, \alpha) &= \langle \delta(y(t, \alpha) - y) \rangle = \langle \delta(e^{w(t, \alpha)} - y) \rangle = \\ &= \frac{1}{y} \langle \delta(w(t, \alpha) - \ln y) \rangle = \frac{1}{y} P(w, t, \alpha)|_{w=\ln y}, \end{aligned}$$

где  $P(w, t, \alpha)$  — одновременная плотность вероятностей винеровского процесса со сносом, описываемая равенством (B.82), и, следовательно,

$$P(y, t, \alpha) = \frac{1}{2y\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{(\ln y + \alpha t)^2}{4Dt} \right\} = \frac{1}{2y\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(ye^{\alpha t})}{4Dt} \right\}, \quad (\text{B.86})$$

где параметр  $D = \sigma^2\tau_0$ . Графики логарифмически нормальной плотности вероятностей (B.86) для значения параметра  $\alpha/D = 1$  и безразмерного времени  $\tau = Dt = 0,1$  и  $1$  приведены на рис. В.3.

Характерной особенностью этих графиков является появление длинного пологого «хвоста» при  $\tau = 1$ , означающего усиление роли больших выбросов процесса  $y(t, \alpha)$  в формировании одновременной статистики. Соответственно, интегральная функция



распределения, согласно (В.83), (В.84), определяется выражением

$$F(y, t, \alpha) = P(y(t, \alpha) < y) = P(w(t, \alpha) < \ln y) = \\ = \int_{-\infty}^{\ln y} dw P(w, t, \alpha) = \Phi \left( \frac{\ln y}{\sqrt{2Dt}} + \alpha \sqrt{\frac{t}{2D}} \right) = \Phi \left( \frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln (ye^{\alpha t}) \right). \quad (\text{В.87})$$

Зная только одноточечные статистические характеристики процесса  $y(t, \alpha)$ , можно получить важную информацию о поведении реализаций процесса  $y(t, \alpha)$  на всем интервале времен  $(0, \infty)$ . В частности:

1) Логнормальный процесс  $y(t, \alpha)$  является марковским процессом и его одновременная плотность вероятностей (В.86) описывается уравнением Фоккера–Планка:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} y \right) P(y, t, \alpha) = D \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} y P(y, t, \alpha), \quad P(y, 0, \alpha) = \delta(y - 1). \quad (\text{В.88})$$

Исходя из уравнения (В.88) легко написать уравнения для моментных функций процесса  $y(t, \alpha)$ , решения которых определяются равенствами

$$\langle y^n(t, \alpha) \rangle = e^{n(n-\alpha/D)Dt}, \quad \left\langle \frac{1}{y^n(t, \alpha)} \right\rangle = e^{n(n+\alpha/D)Dt}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{В.89})$$

и экспоненциально растут во времени.

Исходя из уравнения (В.88) также легко получить равенство

$$\langle \ln y(t) \rangle = -\alpha t$$

и, следовательно, параметр  $\alpha$  можно записать в виде

$$-\alpha = \frac{1}{t} \langle \ln y(t) \rangle. \quad (\text{В.90})$$

### Замечание В.2. Ляпуновская экспонента

Подходу, основанному на анализе устойчивости решений детерминированных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A(t) \mathbf{x}(t)$$

по Ляпунову, уделяется большое внимание многими исследователями. При этом анализируются верхний предел решения задачи

$$\lambda_{\mathbf{x}(t)} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |\mathbf{x}(t)|,$$

который называется его характеристическим показателем. В приложении к стохастическим динамическим системам при таком подходе, зачастую, для интерпретации и упрощения полученных результатов, эти исследователи на последней стадии подключают статистический анализ и вычисляют их статистические средние такие, например, как

$$\langle \lambda_{\mathbf{x}(t)} \rangle = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \langle \ln |\mathbf{x}(t)| \rangle. \quad (\text{В.91})$$

◆

Таким образом параметр  $\alpha$  является *ляпуновской экспонентой* для логнормального случайного процесса  $y(t)$  (см., например, [41, 42]).

2) Зная интегральную функцию распределения, можно вычислить кривую типичной реализации логнормального процесса  $y(t, \alpha)$ , которая оказывается экспоненциально спадающей кривой:

$$y^*(t) = e^{\langle \ln y(t) \rangle} = e^{-\alpha t}, \quad (\text{В.92})$$

в соответствии с формулами (В.61) на с. 184.

Экспоненциальный рост моментов обусловлен выбросами процесса  $y(t, \alpha)$  относительно кривой типичной реализации  $y^*(t, \alpha)$  как в сторону больших, так и в сторону малых значений  $y$ .

Для значения параметра  $\alpha/D = 1$  среднее значение процесса  $y(t, D)$  не зависит от времени и равно единице. При этом, однако, вероятность выполнения неравенства  $y < 1$  при  $Dt \gg 1$ , согласно (В.87), быстро стремится к единице по закону

$$P(y(t, D) < 1) = \Phi \left( \sqrt{\frac{Dt}{2}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} e^{-Dt/4},$$

т. е. подавляющее время графики реализаций процесса лежат ниже уровня его среднего значения  $\langle y(t, D) \rangle = 1$ , хотя статистические моменты процесса  $y(t, D)$  в основном и определяются его большими выбросами.

Таким образом, мы имеем явное противоречие в характерах поведения статистических характеристик процесса  $y(t, \alpha)$  и его реализаций.

3) Поведение реализаций процесса  $y(t, \alpha)$  на всем интервале времени можно также оценить с помощью  $p$ -мажорантных кривых  $M_p(t, \alpha)$ , которые определим следующим образом. Назовем мажорантной кривой такую кривую  $M_p(t, \alpha)$ , для которой при любых временах  $t$  с вероятностью  $p$  выполняется неравенство  $y(t, \alpha) < M_p(t, \alpha)$ , т. е.

$$P\{y(t, \alpha) < M_p(t, \alpha) \text{ для всех } t \in (0, \infty)\} = p.$$

При этом существует однопараметрический класс экспоненциально спадающих мажорантных кривых

$$M_p(t, \alpha, \beta) = (1 - p)^{-D/\beta} e^{(\beta - \alpha)t}. \quad (\text{В.93})$$

Обратим внимание на тот замечательный факт, что, несмотря на постоянство статистического среднего  $\langle y(t, D) \rangle = 1$  и экспоненциальный рост высших моментов процесса  $y(t, D)$ , всегда можно указать экспоненциально спадающую мажорантную кривую (В.93), ниже которой будут лежать реализации процесса  $y(t, D)$  с любой наперед заданной вероятностью  $p < 1$ . В частности, например, с вероятностью  $p = 1/2$  выполняется неравенство

$$y(t, D) < M_{1/2}(t, D, D/2) = 4e^{-Dt/2} \quad (\text{В.94})$$

для любого момента времени  $t$  из интервала  $(0, \infty)$ . Схематическое поведение реализации процесса  $y(t, D)$  и мажорантной кривой (В.94) приведено на рис. В.4.

Это еще раз подтверждает сделанный ранее вывод о том, что экспоненциальный рост моментов процесса  $y(t, D)$  во времени — эффект чисто статистический, обусловленный усреднением по всему ансамблю реализаций.

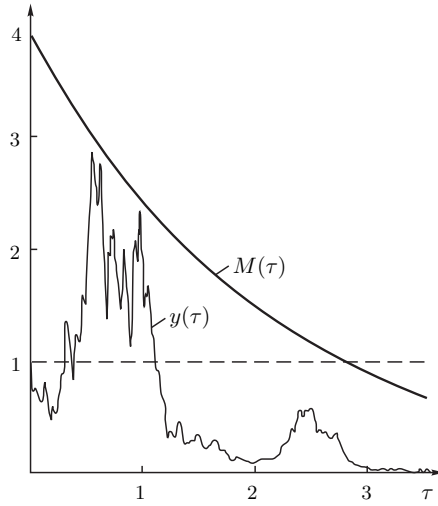


Рис. В.4. Схематическое поведение реализации процесса  $y(t, D)$  и мажорантной кривой  $M(\tau)$  (В.94)

Отметим, что площадь под экспоненциально убывающими мажорантными кривыми конечна. Следовательно, большие выбросы процесса  $y(t, \alpha)$ , вызывая экспоненциальный рост высших моментов, не вносят существенного вклада в площадь под реализациями, которая практически для всех реализаций также конечна, т.е. выбросы логнормального процесса  $y(t, \alpha)$  достаточно узки.

## В.6. Диффузионное приближение

Условием применимости приближения дельта-коррелированности случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  (т.е. уравнения Фоккера–Планка) является условие малости  $\tau_0$  — временного радиуса корреляции случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  — по сравнению со всеми временными масштабами, имеющимися в рассматриваемой задаче. Учет конечности временного радиуса корреляции случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  можно провести в рамках диффузионного приближения. Это приближение более наглядно и физично, чем формальное математическое приближение дельта-коррелированного случайного поля. Это приближение справедливо также для достаточно малых флуктуаций параметров стохастической динамической системы и позволяет получить не только условия применимости дельта-коррелированного приближения, но и описать новые физические эффекты, порожденные конечностью временного радиуса корреляции случайных параметров.

В рамках диффузионного приближения предполагается, что влияние случайных воздействий на временных масштабах порядка  $\tau_0$  несущественно, т.е. система на этих масштабах эволюционирует как свободная.

Пусть опять векторная функция  $\mathbf{x}(t)$  удовлетворяет динамическому уравнению (В.63) на с. 185:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (\text{В.95})$$

где  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  — векторная детерминированная функция, а  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  — случайное статистически однородное в пространстве и стационарное во времени гауссово векторное поле

со статистическими характеристиками

$$\langle f(\mathbf{x}, t) \rangle = 0, \quad B_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') = B_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t') \rangle.$$

Введем индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}), \quad (\text{В.96})$$

где  $\mathbf{x}(t)$  — решение уравнения (В.95), удовлетворяющую уравнению Лиувилля (В.68) на с. 186:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (\text{В.97})$$

Уравнение для плотности вероятностей решения уравнения (В.95)

$$P(\mathbf{x}(t)) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle$$

получим, как и ранее, усредняя уравнение (В.97) по ансамблю реализаций поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad P(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (\text{В.98})$$

Используя формулу Фурутцу–Новикова (В.72) на с. 187

$$\langle f_k(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \rangle = \int d\mathbf{x}' \int dt' B_{kl}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta}{\delta f_l(\mathbf{x}', t')} R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \right\rangle,$$

справедливую для корреляции гауссова случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  с произвольным функционалом  $R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$  от него, уравнение (В.98) можно переписать в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \int_{t_0}^t d\mathbf{x}' \int dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} \varphi(\mathbf{x}, t) \right\rangle. \quad (\text{В.99})$$

В диффузионном приближении уравнение (В.99) является точным, а вариационная производная и индикаторная функция на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции случайного поля  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  —  $\tau_0$  описываются системой динамических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} &= - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} \right\}, \\ \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} \Big|_{t=t'} &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}, t') \}, \end{aligned} \quad (\text{В.100})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \}, \quad \varphi(\mathbf{x}, t) \Big|_{t=t'} = \varphi(\mathbf{x}, t').$$

Решение задачи (В.99), (В.100) справедливо для всех времен  $t$ . Однако в этом случае решение задачи (В.95)  $\mathbf{x}(t)$  не является векторным марковским случайным процессом, так как ее многовременная плотность вероятностей не допускает факторизации с помощью плотности вероятностей перехода. В асимптотическом случае  $t \gg \tau_0$  решение исходной динамической системы (В.95) в диффузионном приближении уже будет марковским случайным процессом, и условиями применимости его является малость всех статистических эффектов на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции  $\tau_0$ .

## Список литературы

1. *Абрамович Б. С., Дятлов А. И.* К теории распространения волн в одномерной случайно-неоднородной поглощающей среде в диффузионном приближении // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1975. Т. 18, № 8. С. 1222–1224.
2. *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям / Пер. с англ. под ред. В. А. Диткина, Л. Н. Кармазиной. — М.: Наука, 1979.
3. *Амбарцумян В. А.* О принципе инвариантности и его некоторых применениях / В кн.: Принцип инвариантности и его приложения, 9–18, под ред. М. А. Мнацаканяна, О. В. Пикичяна — Ереван: АН Армянской ССР, 1989.
4. *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И.* К теории распространения волн в нелинейных неоднородных средах // ЖЭТФ. 1980. Т. 79, № 3. С. 817–827.
5. *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я.* Метод инвариантного погружения и волны в статистически неоднородных средах // ДАН СССР. 1980. Т. 250, № 5. С. 1112–1115.
6. *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я.* Краевые задачи для волнового уравнения // Акуст. журн. 1982. Т. 28, № 1. С. 1–7.
7. *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Козлов В. Ф., Ярошук Е. В.* Флуктуации интенсивности в одномерной случайно-неоднородной среде. V. Численное интегрирование уравнений переноса излучения // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1981. Т. 24, № 8. С. 952–959.
8. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1970.
9. *Бугров А. Г., Кляцкин В. И.* Метод погружения и решение обратных задач в слоистой среде // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1989. Т. 32, № 3. С. 321–330.
10. *Бугров А. Г., Кляцкин В. И., Шевцов Б. М.* К теории распространения радиоволн над поверхностью океана // ДАН СССР. 1984. Т. 275, № 6. С. 1372–1376.
11. *Бугров А. Г., Кляцкин В. И., Шевцов Б. М.* К теории распространения коротких радиоволн в сферически слоистой атмосфере // Радиот. и Электр. 1985. Т. 30, № 4. С. 684–690.
12. *Газарян Ю. Л.* Об одномерной задаче о распространении волны в среде со случайными неоднородностями // ЖЭТФ. 1969. Т. 56, № 6. С. 1856–1871.
13. *Голанд В. И.* Метод погружения в задаче определения дисперсионных кривых для внутренних волн в стратифицированном океане // Морской гидро- физ. журн. 1987, № 1. С. 45–51.
14. *Голанд В. И.* Статистические характеристики нормальных мод звукового поля в случайно неоднородном океане // Акуст. журн. 1988. Т. 34, № 6. С. 1020–1022.
15. *Голанд В. И., Кляцкин В. И.* Статистика собственных значений и собственных функций в одномерной краевой задаче // Акуст. журн. 1988. Т. 34, № 5. С. 828–833.
16. *Голанд В. И., Кляцкин В. И.* Асимптотический метод анализа стохастической задачи Штурма–Лиувилля, Акуст. журн. 1989. Т. 35, № 5. С. 942–944.
17. *Голанд В. И., Кошель К. В.* Метод эволюции спектрального параметра в задаче загоризонтного распространения ультра-коротких радиоволн // Радиотех. и Электр. 1990. Т. 35, № 9. С. 1805–1809.
18. *Гредескул С. А., Фрейлихер В. Д.* Волноводные свойства случайно стратифицированной среды // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1988. Т. 31, № 10. С. 1210–1217.
19. *Гредескул С. А., Фрейлихер В. Д.* Локализация и распространение волн в случайной слоистой среде // УФН. 1990. Т. 160, № 2. С. 239–262.
20. *Гряник Н. В., Кляцкин В. И.* К статистической теории локализации волн в двухслойной среде // ЖЭТФ. 1997. Т. 111, № 6. С. 2030–2043.
21. *Гряник Н. В., Кляцкин В. И.* Локализация волн Россби под влиянием случайной цилиндрической топографии (двухслойная модель) // Изв. АН, Физ. атмосф. и океана. 1997. Т. 33, № 6. С. 723–732.
22. *Гузев М. А.* Распространение волнового фронта в нелинейной слоистой среде // Журн. прикл. мат. и техн. физики. 1991. № 4(188). С. 63–67.
23. *Гузев М. А., Попов Г. В.* Статистические характеристики поля точечного источника в случайно стратифицированной среде при отсутствии регулярной рефракции // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1995. Т. 38, № 10. С. 1023–1032.
24. *Гулин О. Е.* К теории акустического шума в глубоком слоистом океане // Акуст. журн. 1985. Т. 31, № 4. С. 524–527.
25. *Гулин О. Е.* Численное моделирование низкочастотного акустического шума в слоистом океане // Акуст. журн. 1987. Т. 33, № 1. С. 113–116.
26. *Гулин О. Е.* Спектры низкочастотного шума в плоско слоистом океане с импедансными свойствами дна // Акуст. журн. 1987. Т. 33, № 4. С. 618–623.
27. *Гулин О. Е., Кляцкин В. И.* О резонансной структуре спектральных компонент акустического поля в океане при воздействии атмосферного давления // Изв. АН ССР, Физ. атмосф. и океана. 1986. Т. 22, № 3. С. 282–291.
28. *Гулин О. Е., Кляцкин В. И.* К теории акустического шума в случайно неоднородном океане // ДАН СССР. 1986. Т. 288, № 1. С. 226–228.
29. *Гулин О. Е., Кляцкин В. И.* Атмосферное возбуждение низкочастотного акустического шума в стратифицированном океане для различных моделях стратификации / В кн.: Акустика океана, ред. Л. М. Бреховских. 133–140. — М.: Наука.

30. Гулин О. Е., Темченко В. В. Некоторые аналитические решения одномерной задачи рассеяния временного импульса слоем неоднородной среды // Акуст. журн. 1990. Т. 36, № 4. С. 644–648.
31. Гулин О. Е., Темченко В. В. Рассеяние импульсов периодически неоднородной среды: результаты численного моделирования // Акуст. журн. 1992. Т. 38, № 3. С. 450–455.
32. Гулин О. Е., Темченко В. В. К влиянию границы в одномерной задаче рассеяния импульса на периодической слоистой среде // Акуст. журн. 1993. Т. 39, № 4. С. 755–757.
33. Диткин В. А., Прудников А. Р. Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Наука, 1974.
34. Должанский Ф. В., Курганский М. В., Черноусько Ю. Л. Лабораторное и теоретическое изучение баротропных волн Россби во вращающихся каналах // Изв. АН, Физ. атм. и океана. 1979. Т. 15, № 6. С. 597–608.
35. Кастри Дж., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике. — М.: Мир, 1973.
36. Кляцкин В. И. Метод погружения в теории распространения волн. — М.: Наука, 1986.
37. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения глазами физика. Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения. — М: Физматлит, 2001.
38. Кляцкин В. И. Динамика стохастических систем. Курс лекций. — М: Физматлит, 2002.
39. Кляцкин В. И. Диффузия и кластеризация оседающей примеси в случайных гидродинамических потоках // ЖЭТФ. 2004. Т. 126, № 5. С. 1153–1166.
40. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения. Теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике. Т. 1, 2 — М: Физматлит, 2008.
41. Кляцкин В. И. Динамические стохастические системы, кривая типичной реализации и ляпуновские экспоненты // Изв. АН, физ. атм. и океана. 2008. Т. 44, № 1. С. 21–35.
42. Кляцкин В. И. Статистическая топография и ляпуновские экспоненты в динамических стохастических системах // УФН. 2008. Т. 178, № 4. С. 419–431.
43. Кляцкин В. И., Кошель К. В. Численное моделирование распространения волн в периодических средах // ЖЭТФ. 1983. Т. 84, № 6. С. 2092–2098.
44. Кляцкин В. И., Кошель К. В. Численное моделирование брэгговского резонанса в неоднородной среде // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1984. Т. 27, № 2. С. 263–265.
45. Кляцкин В. И., Кошель К. В. Поле точечного источника в слоистой среде // ДАН СССР. 1986. Т. 288, № 6. С. 1478–1481.
46. Кляцкин В. И., Любавин Л. Я. К теории распространения звука в слоистом океане с переменной плотностью // Акуст. журн. 1983. Т. 29, № 1. С. 64–68.

47. Кляцкин В. И., Любавин Л. Я. К теории краевых задач распространения внутренних волн в стратифицированном океане // ДАН СССР. 1983. Т. 271, № 6. С. 1496–1498.
48. Кляцкин В. И., Любавин Л. Я. Теория возбуждения и распространения акустико-гравитационных волн в слоистом океане // Изв. АН ССР, Физ. атмосфер. и океана. 1984. Т. 20, № 5. С. 422–430.
49. Кляцкин В. И., Саичев А. И. Статистическая и динамическая локализация плоских волн в случайных слоистых средах // УФН. 1992. Т. 162, № 3. С. 161–194.
50. Кляцкин В. И., Татарский В. И. К статистической теории распространения волн в случайных слоистых средах // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1977. Т. 20, № 7. С. 1040–1054.
51. Кляцкин В. И., Ярошук Е. В. Численное решение одномерной задачи о самовоздействии волны в нелинейной слоистой среде // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1985. Т. 28, № 3. С. 320–329.
52. Кляцкин В. И., Ярошук И. О. Флуктуации интенсивности в одномерной случайно неоднородной среде. VI. Влияние границ // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1983. Т. 26, № 9. С. 1092–1099.
53. Кляцкин В. И., Ярошук И. О. Флуктуации интенсивности в одномерной случайно неоднородной среде. VII. Численное моделирование распространения волн в случайных средах // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1983. Т. 26, № 10. С. 1241–1250.
54. Кляцкин В. И., Ярошук И. О. Флуктуации интенсивности в одномерной случайно неоднородной среде. VIII. Влияние модели среды // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1984. Т. 27, № 11. С. 1395–1402.
55. Кляцкин В. И., Кошель К. В., Шевцов Б. М. Решение обратной задачи для слоистой среды // Изв. АН, физ. атмосфер. и океана. 1995. Т. 31, № 4. С. 517–525.
56. Кляцкин В. И., Козлов В. Ф., Ярошук Е. В. О коэффициенте отражения в одномерной задаче о самовоздействии волн // ЖЭТФ. 1982. Т. 82, № 2. С. 386–396.
57. Кошель К. В. Численное решение задачи о распространении коротких радиоволн в тропосферном волноводе // Радиотех. и Электр. 1986. Т. 31, № 12. С. 2313–2318.
58. Кошель К. В. Численное решение задачи о тропосферном распространении ультракоротких радиоволн. Приподнятый приемник // Радиотех. и Электр. 1987. Т. 32, № 6. С. 1305–1308.
59. Кошель К. В. К влиянию приподнятых инверсионных слоев на загоризонтное распространение коротких радиоволн // Радиотех. и Электр. 1990. Т. 35, № 3. С. 647–649.
60. Кошель К. В. Численное решение задачи тропосферного распространения коротких радиоволн для конечного поверхностного импеданса // Радиотех. и Электр. 1990. Т. 35, № 6. С. 1326–1329.
61. Кошель К. В. Влияние радиально-слоистых флуктуаций показателя преломления на загоризонтное распространение ультра коротких радиоволн в тропосферном волноводе // Радиотех. и Электр. 1990. Т. 35, № 12. С. 2502–2507.

62. Кошэль К. В. Влияние горизонтальной неоднородности атмосферы на загоризонтное распространение ультра коротких радиоволн // Изв. АН ССР, Физ. атмосф. и океана. 1990. Т. 26, № 10. С. 1069–1077.
63. Кошэль К. В. Влияние случайной стратификации на загоризонтное распространение микроволн в тропосферном волноводе испарения над океаном // Изв. АН ССР, Физ. атмосф. и океана. 1992. Т. 28, № 10–11. С. 1054–1061.
64. Кошэль К. В. Влияние взаимодействия мод на УКВ распространение в горизонтально неоднородных тропосферных волноводах // Изв. АН, Физ. атмосф. и океана. 1993. Т. 29, № 7. С. 728–732.
65. Кошэль К. В., Шишкарев А. А. Влияние анизотропных флуктуаций показателя преломления на загоризонтное распространение ультра коротких волн в тропосфере // Изв. АН, Физ. атмосф. и океана. 1993. Т. 29, № 1. С. 86–91.
66. Кошэль К. В., Славутский Л. А., Шевцов Б. М. Распространение УКВ радиоволн над морем — Владивосток: Дальнаука, 1993.
67. Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А. Введение в теорию неупорядоченных систем. — М.: Наука, 1982.
68. Новиков Е. А. Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности // ЖЭТФ. 1964. Т. 47, № 5. С. 1919–1926.
69. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. — М.: Мир, 1984.
70. Попов Г. В., Яроуцук И. О. О пологом падении плоской волны на страфицированную случайную среду // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1988. Т. 31, № 10. С. 1266–1267.
71. Попов Г. В., Яроуцук И. О. Спектральные компоненты поля точечного источника в случайно неоднородной среде, Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1990. Т. 33, № 11. С. 1232–1240.
72. Резник Г. М., Тцубанева Т. Б. Влияние топографии и стратификации на планетарные волны в океане (двухслойная модель) // Изв. АН, Океанология. 1994. Т. 34, № 1. С. 5–14.
73. Саичев А. И. Статистика собственных значений одномерной случайно неоднородной краевой задачи // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1980. Т. 23, № 2. С. 183–188.
74. Шевцов Б. М. Трехмерная задача обратного рассеяния в страфицированной случайно-неоднородной среде // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1982. Т. 25, № 9. С. 1032–1040.
75. Яроуцук И. О. О численном моделировании одномерных стохастических волновых задач // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1984. Т. 24, № 11. С. 1748–1751.
76. Яроуцук И. О. О роли волнового числа в задаче о распространении волны в случайной среде // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1986. Т. 29, № 11. С. 1392–1394.
77. Яроуцук И. О. Численное моделирование одномерной задачи о самовоздействии волны в случайной нелинейной среде // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1988. Т. 31, № 1. С. 53–60.

78. Яроуцук И. О. Метод численного моделирования для волн в одномерной нелинейной среде со случайными неоднородностями // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1988. Т. 28, № 5. С. 760–764.
79. Яроуцук И. О., Гулин О. Э. Метод статистического моделирования в задачах гидроакустики. — Владивосток: Дальнаука, 2002.
80. Ambartsumian V. A. Diffuse reflection of light by a foggy medium // Comptes Rendus (Doklady) de l'USSR. 1943. V. 38, № 8. P. 229–232.
81. Ambartsumian V. A. On the problem of diffuse reflection of light // Journal of Physics USSR. 1944. V. 8, № 1. P. 65.
82. Anderson P. W. Absence of diffusion in certain random lattices // Phys. Rev. 1958. V. 109. P. 1492–1505.
83. Asch M., Papanicolaou G., Postel M., Sheng P., White B. Frequency content of randomly scattered signals // Part I, Wave Motion, 1990. V. 12, № 4. P. 429–450.
84. Asch M., Kohler W., Papanicolaou G., Postel M., White B. Frequency content of randomly scattered signals // SIAM Review. 1990. V. 33, № 4. P. 519–625.
85. Asch M., Kohler W., Papanicolaou G., Postel M., White B. Statistical inversion from reflections of spherical waves by a randomly layered medium // Waves in Random Media. 1996. V. 6, № 4. P. 293–334.
86. Babkin G. I., Klyatskin V. I. Invariant imbedding method for wave problems // Wave Motion. V. 4, № 2. P. 195–207.
87. Babkin G. I., Klyatskin V. I. Statistical theory of radiative transfer in layered media // Wave Motion. V. 4, № 3. P. 327–339.
88. Bellman R., Wing G. M. P. An Introduction to Invariant Imbedding / Classics in Applied Mathematics. V. 8. — Philadelphia: SIAM, 1992.
89. Bruckstein A. M., Levy B. C., Kailath T. Differential methods in inverse scattering, // SIAM. J. Appl. Math. 1985. V. 45, № 2. P. 312–335.
90. Burridge R., Papanicolaou G., White B. One-dimensional wave propagation in a highly discontinues medium // Wave Motion. 1988. V. 10, № 1. P. 19–44.
91. Burridge R., Papanicolaou G., Sheng P., White B. Probing a random medium with a pulse // SIAM. J. Appl. Math. 1989. V. 49. P. 582–607.
92. Coronas J., Sun Z. Simultaneous reconstruction of material and transient source parameters using the invariant imbedding method // J. Math. Phys. 1993. V. 34, № 5. P. 1824–1825.
93. Coronas J. P., Davison M. E., Krueger R. J. Direct and inverse scattering in the time domain via invariant imbedding equations // J. Acoust. Soc. Am. 1983. V. 74, № 5. P. 1535–1541.
94. Coronas J. P., Kristensson G., Nelson P., Seth D. L. eds. / Invariant Imbedding and Inverse Problems / Proceedings in Applied Mathematics. 1992. V. 63, SIAM, Philadelphia.

95. *Elachi C.* Waves in active and passive periodic structures: a review // Proc. IEEE. 1976. V. 64. P. 1666.
96. *Freilikher V. D., Gredescul S. A.* Randomly layered media: fluctuating waveguide // J. Opt. Soc. Am. 1990. V. A7, № 5. P. 868–874.
97. *Freilikher V. D., Gredescul S. A.* Localization of waves in media with one-dimensional disorder / Progress in Optics. 1992. V. XXX, P. 137–203, ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam.
98. *Furutsu K.* On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium // J. Res. NBS. 1963. V. D-67. P. 303.
99. *Golberg M. A.* Invariant imbedding and Riccati transformations // Appl. Math. and Com. 1975. V. 1, № 1. P. 1–24.
100. *Gulin O. E., Klyatskin V. I.* Generation of low-frequency acoustic noise in a stratified ocean / In: Book Natural Physical Sources of Underwater Acoustical Noise, ed. B. Kerman. 1993. P. 247–253, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
101. *Guzev M. A., Klyatskin V. I.* Plane waves in a layered weakly dissipative randomly inhomogeneous medium // Waves in Random Media. 1991. V. 1, № 1. P. 7–19.
102. *Guzev M. A., Klyatskin V. I.* Approximation of the parabolic equation and the wavefield of a point source in a layered random medium // Waves in Random Media. 1991. V. 1, № 4. P. 275–286.
103. *Guzev M. A., Klyatskin V. I.* Influence of boundary conditions on statistical characteristics of wavefield in layered randomly inhomogeneous medium // Waves in Random Media. 1993. V. 3, № 4. P. 307–315.
104. *Guzev M. A., Popov G. V.* Investigation of statistical characteristics of waves in layered media with regular and random inhomogeneities based on the invariant imbedding method // Waves in Random Media. 1998. V. 8, № 2. P. 193–201.
105. *Guzev M. A., Klyatskin V. I., Popov G. V.* Phase fluctuations and localization length in layered randomly inhomogeneous media // Waves in Random Media. 1992. V. 2, № 2. P. 117–123.
106. *Holton Y. R.* An experimental study of forced barotropic Rossby waves // Geophys. Fluid Dyn. 1971. V. 2, № 4. P. 323–342.
107. *Jordan K. E., Papanicolaou G., Spigler R.* On the numerical solution of a nonlinear stochastic Helmholtz equation with a multigrid preprocessor // Appl. Math. and Comp. 1986. V. 19. P. 145–157.
108. *Kagiwada H. H., Kalaba R.* Integral Equations Via Imbedding Methods. — Addison-Wesley, Reading, MA., 1974.
109. *Keller J. B., Veronis G.* Rossby waves in presence of random currents // J. Geoph. Res. 1969. V. 74, № 8. P. 1941–1951.
110. *Klyatskin V. I.* Ondes et Équations Stochastiques dans les milieux Aléatoirement non Homogènes. — Besançon-Cedex: Leséditions de Physique, 1985.

111. *Klyatskin V. I.* Plane waves in layered random media. The role of boundary conditions / In: Applied and Industrial Math., ed. R. Spigler, Math. and Its Appl. 1991. V. 56. P. 291–299. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
112. *Klyatskin V. I.* The imbedding method in statistical boundary-value wave problems / Progress in Optics. 1994. V. XXXIII. P. 1–128, ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam.
113. *Klyatskin V. I., Gryanik N. V., Gurarie D.* Localization of Rossby waves under the influence of random topography (two-layer model) // Wave Motion. 1998. V. 28, № 4. P. 333–352.
114. *Klyatskin V. I., Koshel' K. V., Shevtsov B. M.* The Embedding method and differential run equations for inverse scattering problem in a layered medium // Radio Science. 1995. V. 30, № 6. P. 1689–1698.
115. *Knapp R., Papanicolaou G., White B.* Nonlinearity and localization in one dimensional random media / In: Nonlinearity and Disorder. 1989, eds. B. Bishop, D. K. Campbell, S. Pnevmatikos, Springer Series in Solid-State Science. — Berlin: Springer-Verlag.
116. *Kohler W., Papanicolaou G.* Power statistics for wave propagation in one dimension and comparison with radiative transport theory. II // J. Math. Phys. 1974. V. 15, № 12. P. 2186–2197.
117. *Kohler W., Papanicolaou G.* Power reflection from a lossy one-dimensional random medium // SIAM. J. Appl. Math. 1976. V. 30, № 2. P. 263–267.
118. *Kohler W., Papanicolaou G., White B.* Reflection of waves generated by a point source over a randomly layered medium // Wave Motion. 1991. V. 13, № 1. P. 53–87.
119. *Kohler W., Papanicolaou G., White B.* Localization and mode conversion for elastic waves in randomly layered media I // Wave Motion. 1996. V. 18, № 1. P. 1–22.
120. *Kohler W., Papanicolaou G., White B.* Localization and mode conversion for elastic waves in randomly layered media II // Wave Motion. 1996. V. 18. P. 181–201.
121. *Kohler W., Papanicolaou G., Postel M., White B.* Reflection of pulsed electromagnetic waves from a randomly stratified half space // J. Optical Soc. of Amer. 1991. V. A8, № 7. P. 1109–1125.
122. *Koshel' K. V.* Application of invariant imbedding method to simulate numerically beyond-the-horizon propagation of SHF over the sea // J. Electromag. Waves and Applic. 1992. V. 6, № 10. P. 1433–1453.
123. *Koshel' K. V., Shishkarev A. A.* Influence of layer and anisotropic fluctuations of the refractive index on the beyond-the-horizon SHF propagation in the troposphere over the sea when there is evaporation duct // Waves in Random Media. 1993. V. 3, № 1. P. 25–38.
124. *Kreider K. L.* Time-dependent inverse scattering from gradient-type interfaced using an exact solution // J. Math. Phys. 1989. V. 30, № 1. P. 53–58.

125. *Kristensson G., Krueger R. J.* Direct and inverse scattering in the time domain for a dissipative wave equation. I. Scattering operators // *J. Math. Phys.* 1986. V. 27, № 6. P. 1667–1682.
126. *Kristensson G., Krueger R. J.* Direct and inverse scattering in the time domain for a dissipative wave equation. II. Simultaneous reconstruction of dissipation and phase velocity profiles // *J. Math. Phys.* 1986. V. 27, № 6. P. 1683–1693.
127. *Kristensson G., Krueger R. J.* Direct and inverse scattering in the time domain for a dissipative wave equation. III. Scattering operators in the presence of a phase velocity mismatch // *J. Math. Phys.* 1987. V. 28, № 2. P. 360–370.
128. *Kristensson G., Krueger R. J.* Direct and inverse scattering in the time domain for a dissipative wave equation. IV. Use of the phase velocity mismatches to simplify inversions // *Inverse Problems.* 1989. V. 5, № 2. P. 375–388.
129. *Kristensson G., Rikte S.* Transient wave propagation in reciprocal bi-isotropic media at oblique incidence // *J. Math. Phys.* 1993. V. 34, № 4. P. 1339–1359.
130. *Krueger R. J., Ochs R. L., Jr.* A Green's function approach to the determination of internal fields // *Wave Motion.* 1989. V. 11, № 6. P. 525–543.
131. *LeMesurier B., Papanicolaou G., Sulem C., Sulem P. L.* The focusing singularity of the nonlinear Schrödinger equation / In: *Directions in Partial Differential Equations*, eds. M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, R. E. L. Turner. P. 159–201, — N. Y.: Academic Press, 1987.
132. *LeMesurier B., Papanicolaou G., Sulem C., Sulem P. L.* Focusing an multifocusing solutions of the nonlinear Schrödinger equation // *Physica.* 1988. V. D31, № 5. P. 78–102.
133. *LeMesurier B., Papanicolaou G., Sulem C., Sulem P. L.* Local structure of the self focusing singularity of the nonlinear Schrödinger equation // *Physica.* 1988. V. D 32. P. 210–226.
134. *McLaughlin D., Papanicolaou G., Sulem P. L., Sulem C.* Focusing singularity of the nonlinear Schrödinger equation // *Phys. Rev.* 1986. V. A34, № 2. P. 1200–1210.
135. *Papanicolaou G., Postel M., Sheng P., White B.* Frequency content of randomly scattered signals. Part II: Inversion // *Wave Motion.* 1990. V. 12, № 4. P. 527–549.
136. *Rhines P., Bretherton F.* Topographic Rossby waves in a rough-bottom ocean // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 61, № 3. P. 583–608.
137. *Scott M. R., Shampine L. F., Wing G. M.* Invariant imbedding and the calculation of eigenvalues for Sturm-Liouville systems // *Computing.* 1969. V. 4, № 1. P. 10–17.
138. *Segupta D., Piterbarg L., Reznik G.* Localization of topographic Rossby waves over random relief // *Dynamics of Atm. and Oceans.* 1992. V. 17, № 1. P. 1–21.
139. *Sheng P.* (ed.) *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media.* — Singapore: World Scien., 1990.

140. *Sheng P., White B., Zhang Z., Papanicolaou G.* Multiple scattering noise in one dimension: universality through localization length scales // *Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 57, № 8. P. 1000–1003.
141. *Sheng P., White B., Zhang Z., Papanicolaou G.* Minimum wave localization length in a one dimensional random medium // *Phys. Rev.* 1986. V. B 34, № 7. P. 4757–4761.
142. *Sheng P., White B., Zhang Z., Papanicolaou G.* Wave localization and multiple scattering in randomly-layered media / In: *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media*, ed. P. Sheng, P. 563–619. — Singapore: World Scien., 1990.
143. *Spigler R. J.* Mean power reflection from a one-dimensional nonlinear random medium // *J. Math. Phys.* 1986. V. 27, № 7. P. 1760–1771.
144. *Thomson R. E.* The propagation of planetary waves over a random topography // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 70, № 2. P. 267–285.

# Предметный указатель

- Акустические шумы, 127
- Броуновское движение, 189
- Брэгговский резонанс, 133
- Вариационная производная, 105, 170, 174, 175, 178
- Волны
- Россби, 89, 97
  - акустико-гравитационные, 122
  - акустические, 56–60, 115, 126
  - в периодических средах, 130–135
  - внутренние гравитационные, 123, 126
  - поглощение, 8, 15, 28–30, 32, 45, 46, 48, 77, 84, 86, 88, 140
  - самовоздействие, 67, 135–150
  - электромагнитные, 115
- Выкалывающее свойство дельта-функции, 176
- Граница
- несогласованная, 30, 150, 154, 160
  - согласованная, 24, 31, 150, 160
- Движение баротропное, 89
- Динамическая причинность, 175
- Динамическое поглощение, 25
- Длина
- акустической волны, 128
  - локализации, 19, 44, 80, 96
  - поглощения, 29
- Импеданс границы, 121
- Интегральная функция распределения, 178, 182
- Квазигеострофическая модель, 97
- Коэффициент
- отражения, 7, 29, 92, 103, 116, 138
  - поглощения, 25
  - прохождения, 7, 21, 38, 39, 41, 48, 55, 92, 104, 116, 138
- Краевая задача, 36, 49, 61, 73, 75, 76, 162
- несогласованная, 8, 103
  - согласованная, 12, 31, 113
- Кривая
- дисперсионная, 128
  - локализационная, 55, 80
  - мажорантная, 193, 194
  - типичной реализации, 44, 182, 193
  - для гауссова процесса, 184
  - для логнормального процесса, 184
- Локализация
- андерсоновская, 29
  - динамическая, 8, 19, 29, 44
  - статистическая, 19, 29, 81, 82
- Ляпуновская экспонента, 44, 192
- Марковский процесс, 21, 38, 192
- Метод
- сингулярностей, 156
  - погружения, 5, 11, 61
  - прогонки, 10
  - характеристик, 141
- Модель квазигеострофическая, 89
- Обратная задача, 159–160
- Обратнорассеянное поле, 156, 158, 162
- Перенос излучения, 36, 51, 53, 62
- Плотность вероятностей перехода, 188
- Плотность собственных чисел, 70, 72
- Преобразование
- Ганкеля, 120
  - Конторовича–Лебедева, 46, 55
  - Лапласа, 158
  - Мелера–Фока, 19, 40
  - Фурье, 83
- Приближение
- гауссова дельта-коррелированного поля, 185
  - диффузионное, 30–35, 93, 94, 189, 194
- Принцип инвариантности Амбарцумяна, 5
- Свойство



- инвариантности, 139  
 факторизации, 83, 163  
 эргодичности, 61  
 Сила Кориолиса, 123  
 Случайное поле  
   дельта-коррелированное  
     гауссово, 186  
 Случайный процесс, 177  
   винеровский, 189–190  
   гауссов, 183  
   логнормальный (логарифмически нор-  
     мальный), 184, 191–194  
 Спектральный параметр, 129  
 Статистическая эквивалентность, 95  
 Стохастический волновой параметрический  
   резонанс, 43, 48  
 Теорема взаимности, 107, 111, 119  
 Уравнение  
   Гельмгольца, 7–163  
     матричное, 112  
   Лежандра, 20  
   Лиувилля, 17, 32, 69, 70, 72, 175–186  
   Матье, 131  
   Риккати, 11, 13, 69, 156  
     матричное, 93, 102, 113  
   Фоккера–Планка, 18, 23, 33, 37, 72, 73,  
     93, 185  
   Шредингера, 69, 136  
   дисперсионное, 128  
   параболическое, 84, 168  
 Условие Брэгга, 31  
 Фазовый формализм, 71  
 Формула  
   Грина, 122  
   Феррари, 145, 147  
   Фурутцу–Новикова, 17, 181, 187, 195  
 Функция  
   Бесселя, 34  
   Гамма, 45  
     неполная, 24  
   Ганкеля, 165  
   Дирака, 171, 175, 178  
   Лежандра, 19, 40  
   Макдональда, 48  
   Матье, 131  
   Неймана, 34  
   Хевисайда, 166, 175, 177, 178  
   индикаторная, 17, 32, 69–72, 93, 175–  
     186  
   интегральная показательная, 25, 51  
   ошибок (интеграл вероятностей), 190  
   передаточная, 58, 127  
 Характеристические кривые, 138  
 Характеристический  
   параметр, 141  
   функционал, 178  
 Частота Брента–Вяйсяля, 123, 128