

СТОХАСТИЧЕСКОЕ (ТУРБУЛЕНТНОЕ)

ДИНАМО

СТАТИСТИЧЕСКИ-ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ

АСПЕКТЫ

В.И. КЛЯЦКИН

ИФА им. А.М. Обухова РАН

klyatskin@yandex.ru

Введение	3
1.1. Простейшая модель кластеризации полей	9
1.2. Общий случай изотропного поля скоростей	15
2.1. Статистические характеристики поля скоростей	26
2.2. Одноточечные статистические характеристики магнитного поля в случайных полях скоростей	27
2.2.1. Уравнение для корреляционной функции магнитного поля	28
2.2.2. Одноточечная корреляция магнитного поля и его средняя энергия	28
2.2.3. О спиральности магнитного поля	30
2.2.4. О диссипации магнитного поля	31
Заключение	35
Приложение. Кривая типичной реализации	39
Литература	41

Введение

Диффузия таких пассивных полей, как поле плотности примеси (концентрация частиц) и магнитного поля, является одной из важных проблем теории турбулентности в магнитной гидродинамике. Исходными стохастическими уравнениями для поля плотности примеси $\rho(\mathbf{r}, t)$ и магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ являются уравнение непрерывности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = \mu_\rho \Delta \rho(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}) \quad (1)$$

и уравнение индукции

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \left(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mu_H \Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

где μ_ρ – динамический молекулярный коэффициент диффузии для плотности, а $\mu_H = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ – динамический коэффициент диффузии магнитного поля, связанный с проводимостью среды σ . Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – поле турбулентных скоростей, которое мы считаем однородным (в общем случае не изотропным, обладающим спиральностью) в пространстве и стационарным во времени, с заданными статистическими свойствами. Поле $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ при этом бездивергентно, т. е. $\text{div } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0$.

Динамические системы (1) и (2) – консервативны и для них сохраняются как общая масса примеси $M = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t)$, так и поток магнитного поля $\int d\mathbf{r} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$.

Для однородных начальных условий следствием консервативности динамических систем (1) и (2) являются равенства

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0, \quad \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathbf{H}_0,$$

где через $\langle \dots \rangle$ обозначено усреднение по ансамблю реализаций случайного поля $\{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\}$. В общем случае статистическое среднее, например, для магнитного поля $\int d\mathbf{r} \langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \rangle$ для однородных начальных условий переходит в выражение $\langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \rangle$, т. е. имеет место взаимно однозначное соответствие

$$\int d\mathbf{r} \langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \rangle \Leftrightarrow \langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \rangle,$$

и, следовательно, величина $\langle f(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \rangle$ является удельной, приходящейся на единицу объема, и таким образом – интегральной величиной. Так, например, для однородных начальных условий величина $\langle \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ является средней энергией, приходящейся на единицу объема, в то время как для неоднородных начальных условий эта величина является средней плотностью энергии. При этом все интегральные величины не зависят от адвекции этих полей.

Особенностью этих уравнений является параметрическое возбуждение во времени, как поля плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ (для сжимаемого потока жидкости), так и энергии магнитного поля $E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t)$ (для произвольного потока жидкости), что и называется *стохастическим (турбулентным) динамо*.

Такое параметрическое возбуждение сопровождается ростом во времени всех статистических характеристик решения задачи, например, всех моментных функций энергии $\langle E^n(\mathbf{r}, t) \rangle$, как для положительных значений параметра n , так и для отрицательных, т.е. величин $\langle 1/E^n(\mathbf{r}, t) \rangle$, практически по одним и тем же законам.

Вместе с тем для сжимаемого потока жидкости с вероятностью, равной единице, в отдельных реализациях поля плотности образуются *кластеры* – компактные области повышенной концентрации примеси, окруженные обширными областями низкой концентрации. Такие явления, происходящие с вероятностью единица, т.е. почти для всех реализаций случайных полей, будем называть *когерентными явлениями*. Что касается магнитного поля, то его энергия также может кластеризоваться в пространстве, но только при определенных условиях. В другом же случае будет происходить общий рост энергии во всем пространстве. Получить условия кластеризации энергии магнитного поля можно на основе идей статистической топографии, изучая статистические средние типа

$$\int d\mathbf{r} \left\langle F \left(E(\mathbf{r}_1, t), E(\mathbf{r}_2, t), \frac{\partial E(\mathbf{r}_1, t)}{\partial \mathbf{r}_1}, \frac{\partial E(\mathbf{r}_2, t)}{\partial \mathbf{r}_2}, \dots \right) \right\rangle_{r_i=\mathbf{r}} \Leftrightarrow \langle F(E(\mathbf{r}, t), \partial E(\mathbf{r}, t)/\partial \mathbf{r}, \dots) \rangle$$

для неоднородных и, соответственно, однородных начальных условий, где $F(\dots)$ – некоторые определенные функционалы случайного поля энергии $E(\mathbf{r}, t)$. Такие статистические характеристики описывают динамическую систему (2) в целом на всем пространстве, выделяя процессы генерации полей, что позволяет не

отвлекаться на детали динамики, связанной с адвекцией этих величин.

На начальных этапах развития эффекты динамической диффузии для плотности и магнитного поля не существенны и мы приходим к уравнениям в частных производных первого порядка

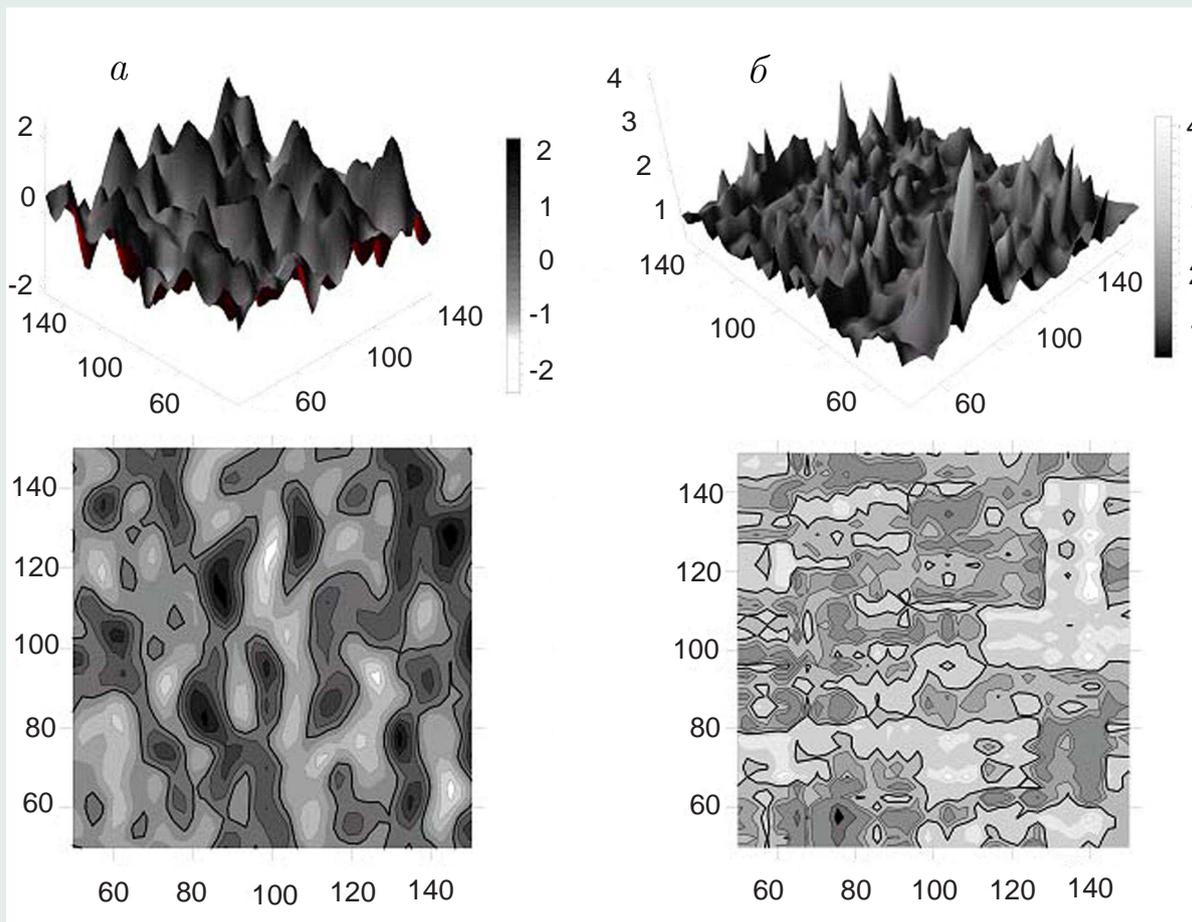
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \left(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Тогда в этих системах происходят такие нестационарные и стохастические явления, как перемешивание, быстрый рост во времени и, в некоторых случаях, кластеризация в фазовом и физическом пространствах. Время жизни кластеров ограничено. Пространственный узор их постоянно меняется. Эти явления удастся описать в рамках идеи статистической топографии на основе анализа плотностей вероятностей решений этих уравнений.

В статистической топографии случайных полей основным объектом изучения, являются функционалы, построенные на системе контуров — линий уровня постоянных значений, определяемых равенством $f(\mathbf{R}, t) = f = \text{const}$.

На рисунке приведены примеры гауссова (а) и логнормального (б) случайных полей и их линий уровня.



Часть 1

ДИФФУЗИЯ И КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ЭНЕРГИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЙНОМ ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ

Прежде чем перейти к решению поставленной задачи, рассмотрим простейшую модель случайного поля скоростей, позволяющую получить решение рассматриваемых задач в аналитическом виде и, следовательно, "в живую" на картинках проследить динамику этих полей.

1.1. Простейшая модель кластеризации поля плотности и энергии магнитного поля

Для рассмотрения кластеризации поля плотности в рамках уравнения (3) ранее была предложена простейшая стохастическая модель поля скоростей

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t) \sin 2(\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad (5)$$

где $\mathbf{v}(t)$ – гауссов случайный стационарный векторный процесс с корреляционным тензором $\langle v_i(t)v_j(t') \rangle = 2\sigma^2\delta_{ij}\tau_0\delta(t-t')$, где σ^2 – дисперсия каждой компоненты скорости, а τ_0 – ее временной радиус корреляции. Отметим, что такой вид поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ соответствует первому члену разложения гидродинамического поля скоростей по гармоническим составляющим, обычно используемый при численном моделировании задачи. Выбирая ось x в направлении вектора \mathbf{k} , видим, что эта модель соответствует зависимости поля скоростей только от одной пространственной переменной x , следовательно, поле скоростей является дивергентным.

Для такой модели уравнения в частных производных первого порядка (3) для поля плотности и (4) для магнитного поля легко решаются.

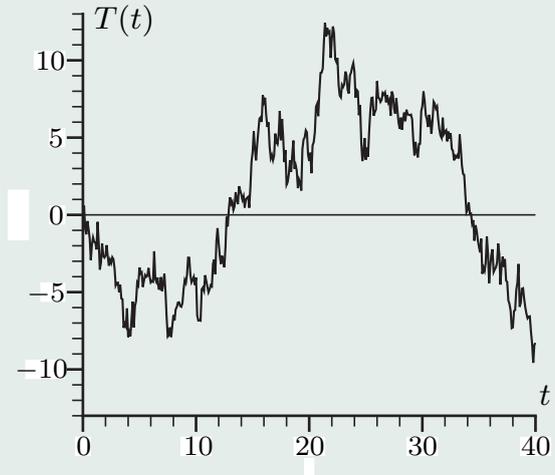
Для однородного начального условия $\rho(r, 0) = \rho_0$ поле плотности зависит только от x и для этой модели описывается формулой

$$\rho(x, t)/\rho_0 = \frac{1}{e^{T(t)} \cos^2(kx) + e^{-T(t)} \sin^2(kx)}, \quad (6)$$

где

$$T(t) = 2k \int_0^t d\tau v_x(\tau) \quad (7)$$

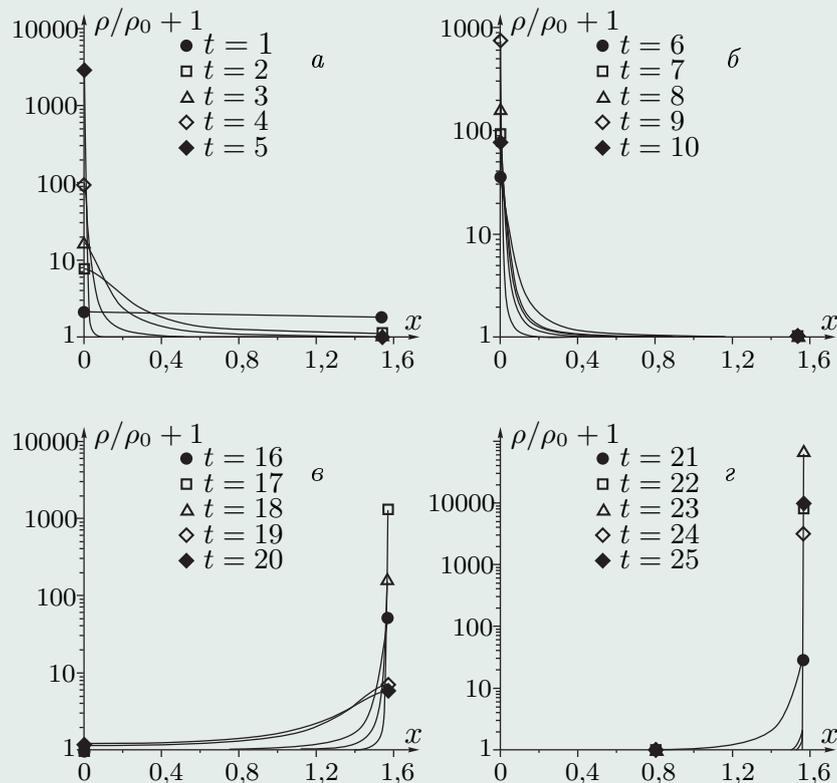
– винеровский случайный процесс. На рис. представлен кусок реализации случайного процесса $T(t)$, полученный путем численного интегрирования равенства (7) для одной реализации случайного процесса $v_x(t)$, с помощью которого рассчитывалось поле $\rho(x, t)$ по формуле (6).



Результаты расчета пространственно-временной эволюции реализации эйлерова поля плотности $1 + \rho(x, t)/\rho_0$ в безразмерных переменных

$$t \rightarrow k^2 \sigma^2 \tau_0 t, \quad x \rightarrow kx, \quad (8)$$

представлены на следующих рисунках. Из этих рисунков наглядно видно последовательное перетекание поля плотности к узким окрестностям точек $x \approx 0$ и $x \approx \pi/2$, т.е. образование кластеров, где относительное значение плотности достигает значений порядка $10^3 - 10^4$, а во всем остальном пространстве имеет практически нулевые значения. В моменты времени t , в которые $T(t) = 0$, реализация поля плотности, при этом, проходит через начальное однородное состояние.



Отметим, что для модели поля скоростей вида (5) также можно получить явные выражения для магнитного поля, аналогично случаю плотности примеси. Для этой модели уравнение индукции (4) для однородного начального условия принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x(t) \sin 2(kx) \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{H}(x, t) = 2k \cos 2(kx) [\mathbf{v}(t)H_x(x, t) - v_x(t)\mathbf{H}(x, t)],$$

$$\mathbf{H}(x, 0) = \mathbf{H}_0,$$

и x - компонента магнитного поля сохраняется (т. е. $H_x(x, t) = H_{x0}$).

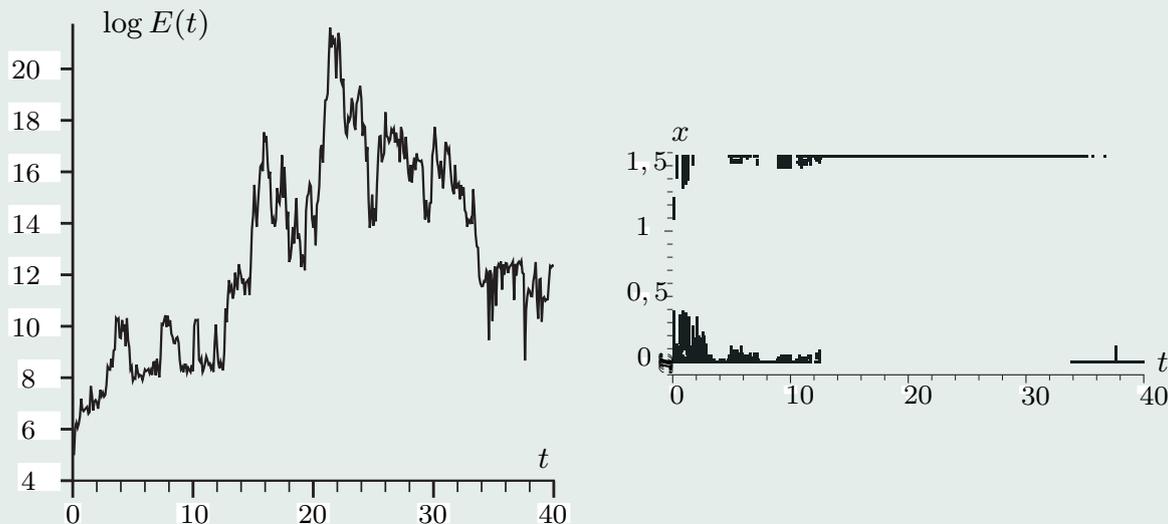
В поперечной же (y, z) плоскости появляется дополнительный источник (генерация) магнитного поля из-за наличия H_{x0}

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x(t) \sin 2(kx) \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{H}_\perp(\mathbf{r}, t) = 2k \cos 2(kx) [\mathbf{v}_\perp(t)H_{x0} - v_x(t)\mathbf{H}_\perp(x, t)],$$

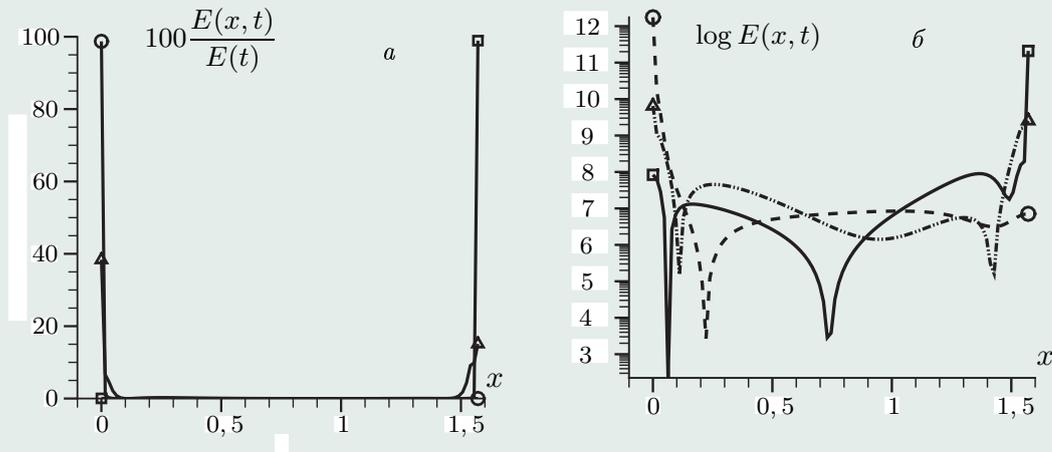
$$\mathbf{H}_\perp(x, 0) = \mathbf{H}_\perp0. \quad (9)$$

Уравнение (9) является уравнением в частных производных и его можно решать методом характеристик. В результате получаем

$$\mathbf{H}_\perp(x, t) = \frac{\rho(x, t)}{\rho_0} \mathbf{H}_\perp0 + 2kH_{x0} \int_0^t d\tau \frac{\left[e^{T(\tau)} \cos^2(kx) - e^{-T(\tau)} \sin^2(kx) \right]}{\left[e^{T(\tau)} \cos^2(kx) + e^{-T(\tau)} \sin^2(kx) \right]^2} v_x(\tau) \mathbf{v}_\perp(\tau). \quad (10)$$



На этих рисунках представлены результаты расчета пространственно-временной эволюции реализации энергии генерируемого магнитного поля в поперечной плоскости $E(x, t) = \mathbf{H}_{\perp}^2(x, t)$ и общая пространственно-временная структура кластеризации энергии магнитного поля в безразмерных переменных (8) при $\mathbf{H}_{\perp 0} = 0$ для той же реализации случайного процесса $T(t)$, что и ранее. Прежде всего отметим, что полная энергия генерируемого магнитного поля, сосредоточенная на отрезке $[0, \pi/2]$, быстро растет во времени.



○ – $t = 10,4$, △ – $t = 10,8$, □ – $t = 11,8$

Более детальная картина эволюции кластеров представлена на рис. *а*, где представлена доля энергии в кластере и на рис. *б*, где видна динамика перетекания возмущений магнитной энергии от одной границы области к другой.

1.2. Общий случай изотропного поля скоростей

Далее мы будем следовать идеям *статистической топографии*. Каждая реализация компоненты магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ (например в двумерном физическом пространстве \mathbf{r}) в фиксированный момент времени выглядит как горный массив в этом пространстве, который можно описывать линиями уровня $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = H - \text{const}$. Статистические характеристики этой системы линий уровня можно описать индикаторной функцией $\varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = \delta(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - H)$, удовлетворяющей уравнению Лиувилля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = - \frac{\partial}{\partial H_i} \left[\mathbf{H} \frac{\partial u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} - H_i \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right] \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) \quad (11)$$

с заданным начальным условием $\varphi(\mathbf{r}, 0; \mathbf{H}) = \delta(\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{H})$.

Случайное поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ предполагается дивергентным гауссовым полем с корреляционным и спектральным тензорами ($\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$)

$$B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle = \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}, t - t') e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}, \quad (12)$$

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{r} B_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E_{ij}^s(\mathbf{k}, t) + E_{ij}^p(\mathbf{k}, t),$$

где d – размерность пространства, а спектральные составляющие тензора поля скоростей имеют структуру $E_{ij}^s(\mathbf{k}, t) = E^s(k, t) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right)$, $E_{ij}^p(\mathbf{k}, t) = E^p(k, t) \frac{k_i k_j}{k^2}$.

Дополнительно будем считать случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ дельта-коррелированным во времени.

Одноточечная плотность вероятностей магнитного поля определяется равенством $P(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = \langle \varphi(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) \rangle_u$. Усредним уравнение (11) по ансамблю реализаций поля $\{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\}$. В результате получаем искомое уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right) P(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}) = \left\{ \frac{(d^2 - 2) D^{\text{P}} - 2D^{\text{S}}}{d(d+2)} \frac{\partial}{\partial H_l} \frac{\partial}{\partial H_k} H_l H_k + \frac{(d+1)D^{\text{S}} + D^{\text{P}}}{d(d+2)} \frac{\partial}{\partial H_l} \frac{\partial}{\partial H_l} H_k^2 \right\} P(\mathbf{r}, t; \mathbf{H}). \quad (13)$$

Параметр $D_0 = \frac{1}{d} \int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle$ описывает диффузию в физическом пространстве, а параметры

$$D^{\text{S}} = \frac{1}{d-1} \int_0^\infty d\tau \langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t + \tau) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad D^{\text{P}} = \int_0^\infty d\tau \langle \text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle$$

описывают диффузию в фазовом пространстве, где $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – вихрь поля скорости.

Из уравнения (13) для однородных начальных условий получаем выражение для средней энергии

$$\langle E(t) \rangle = E_0 \exp \left\{ 2 \frac{d-1}{d} (D^s + D^p) t \right\}$$

и выражение для корреляции магнитного поля

$$\frac{\langle W_{ij}(t) \rangle}{\langle E(t) \rangle} = \frac{1}{d} d_{ij} + \left(\frac{W_{ij}(0)}{E_0} - \frac{1}{d} d_{ij} \right) \exp \left\{ -2 \frac{(d+1)D^s + D^p}{d+2} t \right\}, \quad (14)$$

т. е. происходит быстрая изотропизация магнитного поля. При этом положительные параметры D^s и D^p входят во временные зависимости аддитивным образом.

Для плотности вероятностей энергии магнитного поля $E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t)$ получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right) P(\mathbf{r}, t; E) = \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial E} E + D \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} E \right\} P(\mathbf{r}, t; E),$$

$$P(\mathbf{r}, 0; E) = \delta(E - E_0(\mathbf{r})),$$

где коэффициенты диффузии в фазовом пространстве

$$\alpha = 2 \frac{d-1}{d+2} (D^p - D^s), \quad D = 4(d-1) \frac{(d+1)D^p + D^s}{d(d+2)}.$$

При этом параметр α может быть как положительным так и отрицательным. Изменения знака α для одноточечных характеристик означает переход от случайного поля $E(\mathbf{r}, t)$ к случайному полю $\tilde{E}(\mathbf{r}, t) = 1/E(\mathbf{r}, t)$.

Решение этого уравнения имеет вид

$$P(\mathbf{r}, t; E) = \frac{1}{2E\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ D_0 t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [Ee^{\alpha t}/E_0(\mathbf{r})]}{4Dt} \right\}. \quad (15)$$

Для пространственно однородного начального распределения энергии $E_0(\mathbf{r}) = E_0$ плотность вероятностей (15) не зависит от \mathbf{r} и описывается формулой

$$P(t; E) = \frac{1}{2E\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [Ee^{\alpha t}/E_0]}{4Dt} \right\}. \quad (16)$$

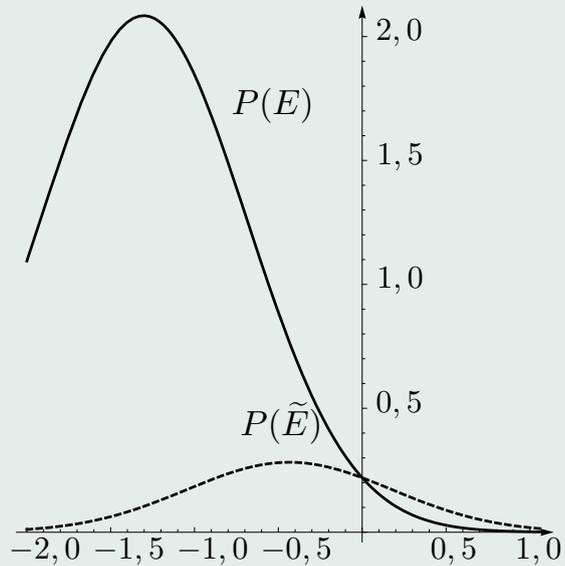
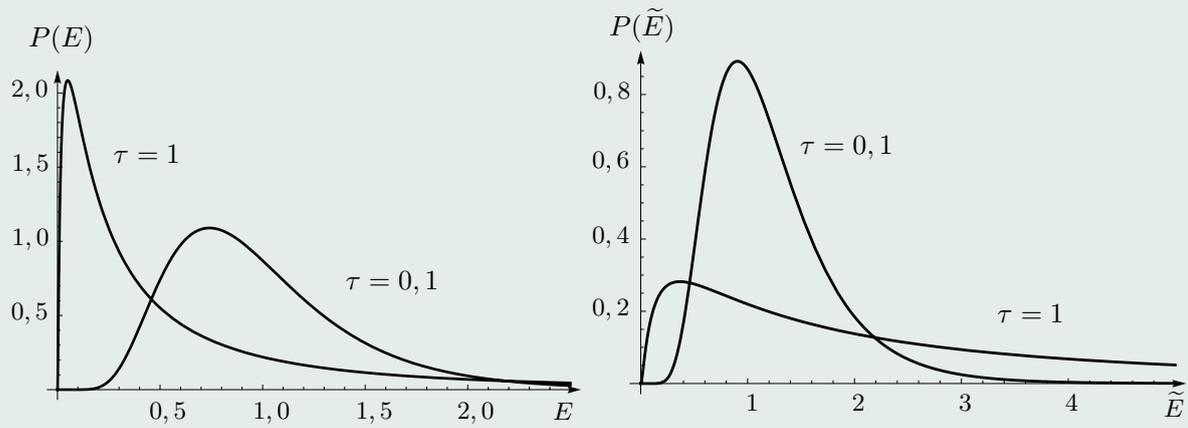
Таким образом в этом случае одноточечные статистические характеристики энергии магнитного поля $E(\mathbf{r}, t)$ статистически эквивалентны статистическим характеристикам случайного процесса

$$E(t; \alpha)/E_0 = \exp \left\{ -\alpha t + \int_0^t d\tau \xi(\tau) \right\},$$

где $\xi(t)$ — гауссов процесс белого шума $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t - t')$.

Отметим, что поле $\tilde{E}(\mathbf{r}, t) = 1/E(\mathbf{r}, t)$ в этом случае будет также логнормальным с плотностью вероятностей, отличающейся только знаком у параметра α ,

$$P(t; \tilde{E}) = \frac{1}{2\tilde{E}\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 [\tilde{E}e^{-\alpha t}/\tilde{E}_0]}{4Dt} \right\} \quad (17)$$



На верхнем рисунке представлены эти распределения вероятностей при значении параметров $\alpha = D$, $E_0 = 1$ и для безразмерного времени $\tau = 0,1$ и 1 , а на нижнем рисунке показаны эти плотности вероятностей при $\tau = 1$ в логарифмическом масштабе. Эти распределения вероятностей имеют совершенно разный вид, что вполне естественно, так как одно из них должно описывать кластеризацию энергии магнитного поля, а другое должно описывать общий рост энергии во всем пространстве. Характерной особенностью этих распределений является появление длинных пологих *хвостов* при $Dt \gg 1$, означающих усиление роли больших выбросов процессов $E(t; \alpha)$ и $\tilde{E}(t; \alpha)$ в формировании одновременной статистики.

Для этого распределения все моменты энергии магнитного поля экспоненциально растут со временем (как для $n > 0$ так и для $n < 0$, но $|n| \geq 2$)

$$\langle E^n(t) \rangle = E_0^n \exp \left\{ -2n \frac{d-1}{d+2} (D^p - D^s) t + 4n^2 (d-1) \frac{(d+1) D^p + D^s}{d(d+2)} t \right\}$$

и возникает вопрос – какое же поле $E(\mathbf{r}, t)$ или $\tilde{E}(\mathbf{r}, t) = 1/E(\mathbf{r}, t)$ кластеризуется?

Ответ на этот вопрос дают методы статистической топографии. Для рассматриваемой задачи одноточечные статистические характеристики энергии магнитного поля $E(\mathbf{r}, t)$ статистически эквивалентны статистическим характеристикам логнормального случайного процесса, для которого *кривая типичной реализации* (КТР) (см. (25)), определяющая поведение энергии магнитного поля в конкретных реализациях, в любой фиксированной точке пространства, является экспоненциальной величиной

$$E^*(t) = E_0 e^{-\alpha t} = E_0 \exp \left\{ -2 \frac{d-1}{d+2} (D^p - D^s) t \right\},$$

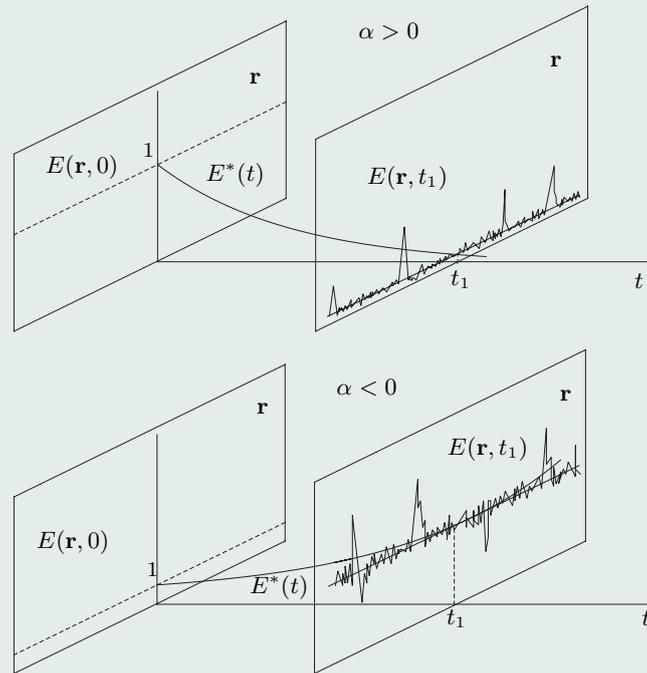
растущей или затухающей во времени.

При $\alpha > 0$ ($D^p > D^s$) КТР экспоненциально спадает в каждой точке пространства, что свидетельствует о кластерной структуре магнитного поля.

При этом средняя энергия магнитного поля

$$\langle E(t) \rangle = E_0 \exp \left\{ 2 \frac{d-1}{d} (D^s + D^p) t \right\}$$

не зависит от соотношения между D^p и D^s и не определяет с каким же случаем мы имеем дело. Это же замечание относится и к любому моменту энергии магнитного поля. И вообще к любым многоточечным корреляционным функциям магнитного поля. В другом случае $\alpha < 0$ ($D^p < D^s$) КТР экспоненциально растет во времени и имеет место общего роста магнитной энергии в каждой точке пространства.



На рисунке схематически изображены реализации энергии магнитного поля в случайном поле скоростей для разных знаков параметра α .

Общую информацию о пространственной структуре поля энергии характеризуют такие функционалы энергии, как общая величина объема (в 3-х мерном случае) или площади (в двумерном случае) области, где $E(\mathbf{r}, t) > E$

$$V(t, E) = \int d\mathbf{r} \theta(E(\mathbf{r}, t) - E) = \int d\mathbf{r} \int_E^{\infty} dE' \delta(E(\mathbf{r}, t) - E'),$$

и общая энергия магнитного поля, заключенная в этой области,

$$\mathcal{E}(t, E) = \int d\mathbf{r} E(\mathbf{r}, t) \theta(E(\mathbf{r}, t) - E) = \int d\mathbf{r} \int_E^{\infty} E' dE' \delta(E(\mathbf{r}, t) - E'),$$

средние значения которых определяются одноточечной плотностью вероятностей (15)

$$\langle V(t, E) \rangle = \int_E^{\infty} dE' \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; E'), \quad \langle \mathcal{E}(t, E) \rangle = \int_E^{\infty} E' dE' \int d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t; E').$$

Анализ этих величин показывает, что при наличии кластеризации (параметр $\alpha > 0$) общий объем области стремится к нулю, в то время как средняя энергия, заключенная в нем, стремится к полной средней энергии, экспоненциально растущей во времени. В другом случае (параметр $\alpha < 0$) идет общая генерация энергии во всем пространстве.

Другие функционалы, связанные с распределением энергии магнитного поля в пространстве, должны зависеть от пространственных производных этого поля, т. е. необходимо рассматривать функционалы типа

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t, E; \nabla E, \nabla * \nabla E, \dots) &= \int d\mathbf{r} \mathcal{F}(t, E; \nabla E, \nabla * \nabla E, \dots) \theta(E(\mathbf{r}, t) - E) = \\ &= \int d\mathbf{r} \int_E^\infty dE' \mathcal{F}(t, E'; \nabla E(\mathbf{r}, t), \nabla * \nabla E(\mathbf{r}, t), \dots) \delta(E(\mathbf{r}, t) - E'), \end{aligned} \quad (18)$$

средние значения которых описываются совместной плотностью вероятностей магнитного поля и его пространственных производных. При этом все подобные средние величины являются интегральными, не зависящими от адвекции случайных полей.

Отметим, что в некоторый момент времени диссипация полей, связанная с производными более высокого порядка, быстро усиливается и влияние динамических коэффициентов диффузии становится определяющим. В этом случае уже не удастся написать уравнение для плотности вероятности. Однако, как показывает опыт решения подобных задач, в ряде случаев плотность вероятностей скалярного поля выходит на стационарное распределение вероятностей, а пространственные производные этого поля не коррелируют с ним. И мы приходим к задаче о непосредственном вычислении моментов пространственных производных таких полей с учетом динамического коэффициента диффузии.

Часть 2

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОДНОТОЧЕЧНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ В СТОХАСТИЧЕСКИХ МАГНИТО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

2.1. О статистических характеристиках случайного поля скоростей

Исходными уравнениями для поля плотности примеси $\rho(\mathbf{r}, t)$ и магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, как и ранее, являются уравнение непрерывности (1) и уравнение индукции (2) с однородными начальными условиями, где $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — поле турбулентных скоростей, которое мы теперь считаем однородным (в общем случае не изотропным, обладающим спиральностью) в пространстве и стационарным во времени, с заданными статистическими свойствами.

Случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ предполагается в общем случае дивергентным гауссовым полем статистически однородным, обладающим сферической симметрией, но не имеющим отражательной симметрии в пространстве, и стационарным во времени. Корреляционный тензор при этом имеет векторную структуру

$$B_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = B_{ij}^{\text{iso}}(\mathbf{r}, \tau) + C(r, \tau)\varepsilon_{ijk}r_k,$$

где изотропной части корреляционного тензора соответствует пространственный спектральный тензор вида $E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = E_{ij}^{\text{s}}(\mathbf{k}, \tau) + E_{ij}^{\text{p}}(\mathbf{k}, \tau)$. Решение статистической задачи будет определяться параметрами

$$D^{\text{s}} = \frac{1}{d-1} \int_0^{\infty} d\tau \langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t + \tau) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad D^{\text{p}} = \int_0^{\infty} d\tau \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle,$$

$$C(r) = C(0) - \alpha r^2.$$

2.2. Одноточечные статистические характеристики магнитного поля в случайных полях скоростей

При анализе различных моментных функций магнитного поля мы должны учитывать коэффициент динамической диффузии. Однако, в общем случае дивергентного поля скоростей все уравнения будут чрезвычайно громоздкими. Поэтому при дальнейшем анализе статистических характеристик пространственных производных магнитного поля мы ограничимся бездивергентным полем скоростей ($\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$), т.е. турбулентный поток жидкости будет считаться несжимаемым. Учет сжимаемости, как мы видели ранее, лишь меняет коэффициенты этого уравнения аддитивным образом, но не основную тенденцию поведения моментных функций.

2.2.1. Уравнение для корреляционной функции магнитного поля

Введем функцию $W_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; t) = H_i(\mathbf{r}, t)H_k(\mathbf{r}_1, t)$. Тогда для корреляционной функции магнитного поля получаем уравнение в частных производных ($\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle W_{ij}(\mathbf{r}; t) \rangle = & -2 \frac{\partial^2 B_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_k \partial r_m} \langle W_{km}(\mathbf{r}; t) \rangle - \\ & - 2 \left[\frac{\partial B_{ik}(\mathbf{0})}{\partial r_s} - \frac{\partial B_{ik}(\mathbf{r})}{\partial r_s} \right] \frac{\partial}{\partial r_k} \langle W_{sj}(\mathbf{r}; t) \rangle - 2 \left[\frac{\partial B_{kj}(\mathbf{0})}{\partial r_s} - \frac{\partial B_{kj}(\mathbf{r})}{\partial r_s} \right] \frac{\partial}{\partial r_k} \langle W_{is}(\mathbf{r}; t) \rangle + \\ & + [2B_{kq}(\mathbf{0}) - B_{kq}(\mathbf{r}) - B_{qk}(\mathbf{r})] \frac{\partial^2}{\partial r_q \partial r_k} \langle W_{ij}(\mathbf{r}; t) \rangle + 2\mu_H \langle W_{ij;ss}(\mathbf{r}; t) \rangle, \quad (19) \end{aligned}$$

где через $\langle W_{ij;ss}(\mathbf{r}; t) \rangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \langle W_{ij}(\mathbf{r}; t) \rangle$ обозначен диссипативный тензор.

2.2.2. Одноточечная корреляция магнитного поля и его средняя энергия

Полагая в уравнении (19) $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, получаем незамкнутое уравнение для одноточечной корреляции $\langle W_{ij}(\mathbf{0}; t) \rangle = \langle W_{ij}(t) \rangle$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle W_{ij}(t) \rangle = \frac{2(d+1)D^s}{d(d+2)} \delta_{ij} \langle E(t) \rangle - \frac{4D^s}{d(d+2)} \langle W_{ij}(t) \rangle + 2\mu_H \langle W_{ij;ss}(\mathbf{0}; t) \rangle, \quad (20)$$

где $\langle E(t) \rangle = \langle W_{ii}(t) \rangle = \langle \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ – средняя энергия магнитного поля.

Для средней энергии отсюда следует уравнение, которое запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\langle E(t) \rangle_\mu}{E_0} = \frac{2(d-1)D^s}{d} - \frac{2\mu_H}{\langle E(t) \rangle_\mu} D_\mu(t).$$

где диссипация $D_\mu(t) = \langle [\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]^2 \rangle = -\langle W_{ii;jj}(\mathbf{0}, t) \rangle$.

Далее будем искать правую часть этого уравнения в виде ряда по параметру μ . Решение задачи на начальном этапе эволюции, когда можно пренебречь диссипацией, имеет экспоненциально растущий вид

$$\langle E(t) \rangle_0 = E_0 \exp \left\{ \frac{2(d-1)}{d} D^s t \right\}, \quad (21)$$

а решение уравнения для корреляции (20) в отсутствии эффекта динамической диффузии имеет вид (14) при $D^p = 0$, т. е. происходит быстрая изотропизация магнитного поля в несжимаемом турбулентном потоке жидкости.

В первом приближении по параметру μ для средней энергии получаем выражение, справедливое уже на значительно большем интервале времени

$$\langle E(t) \rangle_1 = E_0 \exp \left\{ \frac{2(d-1)D^s t}{d} - \int_0^t d\tau \frac{2\mu_H}{\langle E(\tau) \rangle_0} D_0(\tau) \right\}. \quad (22)$$

2.2.3. О спиральности магнитного поля

Далее мы пренебрегаем динамической диффузией и не будем писать нулевой символ. Получим теперь уравнение для величины

$$\langle W_{kp;j}(\mathbf{r}; t) \rangle = \frac{\partial}{\partial r_j} \langle W_{kp}(\mathbf{r}; t) \rangle = \left\langle \frac{\partial H_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_j} H_p(\mathbf{r}_1, t) \right\rangle$$

для того, чтобы вычислить спиральность магнитного поля

$$H(t) = \varepsilon_{ijk} \langle W_{ki;j}(\mathbf{0}; t) \rangle = \langle \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{H} \rangle.$$

Дифференцируя уравнение для корреляционной функции магнитного поля по \mathbf{r} и полагая $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, приходим к уравнению второго порядка

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2(d+5)D^s}{d(d+2)} \frac{\partial}{\partial t} - 8 \frac{(d-1)[D^s]^2}{d^2(d+2)} \right) \langle W_{kp;j}(\mathbf{0}; t) \rangle = \\ & = \left\{ -2 \frac{\partial^3 B_{kp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_j} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2(d+3)D^s}{d(d+2)} \right) + \frac{4(d+1)D^s}{d(d+2)} \left(\frac{\partial^3 B_{jp}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_k} + \frac{\partial^3 B_{kj}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_p} \right) \right\} \langle W_{nm}(\mathbf{0}; t) \rangle, \end{aligned}$$

с источником в правой части.

Решать это уравнение будем исходя из растущих экспонент одноточечной корреляционной функции магнитного поля (21) и ее изотропности. В этом случае оно упрощается и для спиральности магнитного поля в трехмерном случае получаем выражение

$$H_0(t) = 120\alpha \langle E(t) \rangle_0 t. \quad (23)$$

2.2.4. О диссипации энергии магнитного поля

Для получения диссипации необходимо вывести уравнение для величины

$$\langle W_{kp;js}(\mathbf{0}; t) \rangle = \frac{\partial}{\partial r_s} \langle W_{kp;j}(\mathbf{0}; t) \rangle = \left\langle \frac{\partial H_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_s \partial r_j} H_p(\mathbf{r}_1, t) \right\rangle_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1}.$$

Дважды дифференцируя уравнение для корреляционной функции магнитного поля по r , полагая $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, и сворачивая по индексам $k = p$ и $j = s$, получаем уравнение для одноточечной корреляции

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle W_{kk;ss}(\mathbf{0}; t) \rangle = & -2 \frac{\partial^4 B_{kk}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_s \partial r_s} \langle W_{nm}(\mathbf{0}; t) \rangle - \\ & -4 \frac{\partial^3 B_{kk}(\mathbf{0})}{\partial r_n \partial r_m \partial r_s} \langle W_{nm;s}(\mathbf{0}; t) \rangle + 2 \frac{\partial^3 B_{kn}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_s \partial r_s} \langle W_{mk;n}(\mathbf{0}; t) \rangle + \\ & + 2 \frac{\partial^3 B_{nk}(\mathbf{0})}{\partial r_m \partial r_s \partial r_s} \langle W_{km;n}(\mathbf{0}; t) \rangle + \frac{4(d+1)D^s}{(d+2)} \langle W_{mm;ss}(\mathbf{0}; t) \rangle. \end{aligned}$$

Ограничиваясь источниками возбуждения, экспоненциально растущими во времени, для диссипации $D_0(t)$ получаем выражение для эволюции диссипации во времени

$$D_0(t) \approx \left[2D_H^{(4)} + \frac{4800(d-2)\alpha^2}{A} \right] \frac{\langle E(t) \rangle_0}{A} e^{At}, \quad A = \frac{2(d^2 + d + 2)D^s}{d(d+2)}.$$

Из структуры решения, видно, что диссипация магнитного поля для больших времен в трехмерном случае определяется спиральностью поля скоростей. При ее отсутствии – средней энергией магнитного поля (21). В двумерном же случае плоско-параллельного потока $d = 2$ спиральность отсутствует. В этом случае диссипация энергии определяется только ее энергией. При этом диссипация растет во времени значительно быстрее, чем средняя энергия.

Возвращаясь теперь к задаче о расчете динамики средней энергии с учетом ее диссипации, в первом приближении получаем решение задачи в виде

$$\langle E(t) \rangle_1 = E_0 \exp \left\{ \frac{2(d-1)D^s}{d} t - 4\mu_H \left[D_H^{(4)} + \frac{2400(d-2)\alpha^2}{A} \right] \frac{1}{A^2} [e^{At} - 1] \right\},$$

откуда видно, что средняя энергия быстро затухает при $t \rightarrow \infty$ и средняя энергия достигает максимального значения в момент времени в трехмерном случае

$$D^s t_{\max} \sim \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma^2 \tau_0}{\mu_H} - 3,8 & \text{при наличии спиральности,} \\ \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma^2 \tau_0}{2\mu_H} & \text{при отсутствии спиральности,} \end{cases}$$

т. е. при наличии спиральности средняя энергия достигает своего максимума значительно быстрее, чем в случае ее отсутствия.

В двумерном же случае плоско-параллельного потока жидкости имеем

$$D^s t_{\max} = \frac{1}{2} \ln \frac{[D^s]^2}{2\mu_H D_H^{(4)}} \sim \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma^2 \tau_0}{2\mu_H}.$$

Условием применимости пренебрежения эффектом, вызванным динамической диффузией, является, очевидно, условие $t \ll t_{\max}$.

Мы рассмотрели решение ряда задач о динамике статистических характеристик пассивных векторных полей в случайном поле скоростей, таких как поле градиента плотности и магнитного поля, в простейшей постановке задачи (с однородными начальными условиями), с минимумом определяющих параметров, связанных только со статистическими характеристиками однородного поля скоростей, дельта-коррелированного во времени. В этом случае все изучаемые поля являются также однородными в пространстве, но нестационарными во времени случайными полями. При этом для статистических средних, независящих от величины, r имеем тождество

$$\left\langle f_i(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f_j(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial f_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} f_j(\mathbf{r}, t) \right\rangle, \quad (24)$$

которым мы широко пользовались в работе при выводе всех уравнений. Это существенно упростило как анализ самой динамической системы, так и полученных результатов, потому что существенное большинство членов для одноточечных характеристик зануляется, что означает отсутствие адвекции статистических характеристик в рассматриваемых задачах. Именно это и позволило решить рассмотренные задачи с большей полнотой и без относительно громоздких вычислений.

При наличии неоднородных начальных условий решения всех задач уже не обладают свойством пространственной однородности и уравнения имеют очень громоздкий вид. Полученные выше решения, однако, несут определенную информацию и для этого случая. В самом деле, свойством (24) обладает также и интеграл (интегрирование по частям)

$$\int d\mathbf{r} f_i(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = - \int d\mathbf{r} \frac{\partial f_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} f_j(\mathbf{r}, t)$$

и, следовательно, полученные результаты легко обобщаются на случай неоднородных задач.

Таким образом можно утверждать, что полученные соотношения и связи между различными величинами, с точки зрения неоднородных задач, являются интегральными и служат, образно говоря, тем "скелетом", на фоне которого происходит динамика сложных стохастических движений. При этом все члены, которые занулились в нашем рассмотрении, в случае неоднородных задач имеют дивергентный ("поточковый") вид.

Заключение

А все же, что же делается с пространственной структурой энергии магнитного поля с учетом диссипативного фактора в случае ее кластеризации? Ответа на этот вопрос в настоящее время нет.

Позвольте мне, однако, напомнить, что писали ученые в далекие теперь уже 80-ые годы. Я имею в виду книгу:

С.И. Вайнштейн, Я.Б. Зельдович и А.А. Рузмайкин

ТУРБУЛЕНТНОЕ ДИНАМО В АСТРОФИЗИКЕ, М.: Наука, 1980.

На стр. 54 читаем:

1.9. Обобщение метода Кляцкина–Татарского для задачи турбулентного динамо

Проблема турбулентного динамо близка по своей сути к задаче о распространении волн в среде со случайными неоднородностями. Поэтому естественно воспользоваться методами, развитыми в теории распространения радиоволн. Фактически именно в этой теории, а также в теории гидродинамической турбулентности были развиты функциональные методы, которые мы описывали в предыдущих параграфах.

...

Я полностью согласен с авторами этой книги, тем более, что все методы анализа кластеризации, изложенные выше, были развиты первоначально в стохастических волновых задачах.

Распространение лазерного излучения в случайно-неоднородной трехмерной среде описывается скалярным параболическим уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k}\Delta_{\mathbf{R}}U(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2}\varepsilon(x, \mathbf{R})U(x, \mathbf{R}), \quad U(0, \mathbf{R}) = 1,$$

где x – координата в направлении распространения волны, \mathbf{R} – координаты в поперечной плоскости, а $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ – отклонение диэлектрической проницаемости от единицы и мы рассматриваем для простоты плоскую падающую волну. Отметим, что это же уравнение является нестационарным *уравнением Шредингера* со случайным потенциалом, где x играет роль времени.

Если ввести амплитуду и фазу волнового поля по формуле

$$U(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) \exp \{iS(x, \mathbf{R})\},$$

то уравнение для интенсивности волнового поля $I(x, \mathbf{R}) = |u(x, \mathbf{R})|^2$ примет вид уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k}\nabla_{\mathbf{R}}\{\nabla_{\mathbf{R}}S(x, \mathbf{R})I(x, \mathbf{R})\} = 0, \quad I(0, \mathbf{R}) = I_0(\mathbf{R}),$$

которое по форме совпадает с уравнением для поля плотности примеси в случайном потенциальном потоке и, следовательно, реализации поля интенсивности имеют кластерный характер, что проявляется в виде *каустических структур*.

Для малых дистанций, проходимых волной, распределение вероятностей интенсивности волнового поля имеет логнормальный характер. При увеличении дистанции необходимо принимать во внимание нелинейный характер уравнения для комплексной фазы. Эта область флуктуаций, называемая *областью сильных фокусировок*, очень трудна для аналитических исследований. При еще больших дистанциях, проходимых волной, статистические характеристики интенсивности выходят на режим насыщения, и эта область изменения называется *областью сильных флуктуаций интенсивности*.

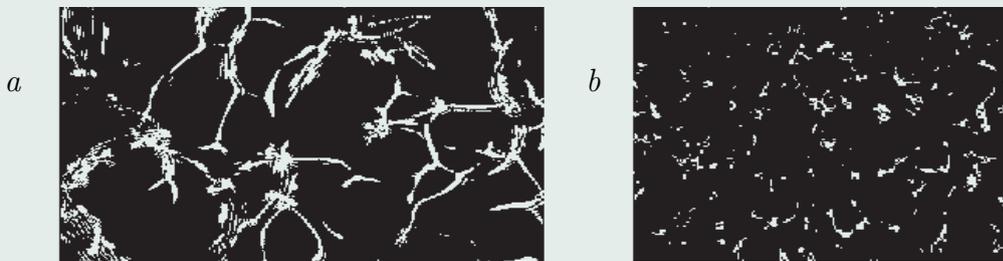
В этой области статистические характеристики волнового поля перестают зависеть от дистанции и

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n!, \quad P(x, I) = e^{-I}.$$

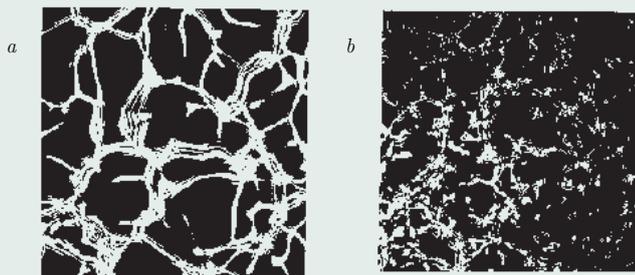
При этом средняя удельная площадь областей, внутри которых $I(x, \mathbf{R}) > I$ и средняя удельная мощность, сосредоточенная в этих областях, постоянны и не описывают поведение интенсивности волнового поля в отдельных реализациях.

Также в этом случае не информативен и переход к статистически эквивалентному случайному процессу, т. к. кривой типичной реализации для него будет также постоянная величина. Понимание структуры волнового поля в этом случае в отдельных реализациях можно получить только исходя из анализа таких величин как удельная средняя длина контуров и удельное среднее число контуров интенсивности волнового поля, описываемых функционалами типа (18).

Эти величины продолжают расти с ростом дистанции и, следовательно, происходит дробление контуров, что и наблюдалось как в лабораторных экспериментах, так и при численном моделировании. Соответствующие результаты приведены на рисунках.



(*a*) режим сильной фокусировки и (*b*) режим насыщенных флуктуаций. Эксперимент и численное моделирование.



По-видимому, аналогичные результаты будут и для энергии магнитного поля при $t \rightarrow \infty$.

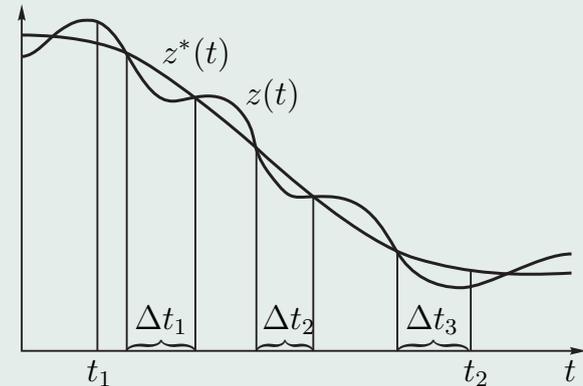
Приложение. Кривая типичной реализации

Статистические характеристики процесса $z(t)$ в фиксированный момент времени t описываются ее плотностью вероятностей $P(z, t)$ или интегральной функцией распределения $F(z, t)$.

Типичной реализацией случайного процесса $z(t)$ называется детерминированная кривая $z^*(t)$, которая является *медианой интегральной функции распределения* и определяется как решение алгебраического уравнения

$$F(z^*(t); t) = 1/2. \quad (25)$$

Основанием для этого является свойство медианы, заключающееся в том, что для любого интервала времени (t_1, t_2) случайный процесс $z(t)$ как-бы «обвивает» кривую $z^*(t)$ таким образом, что среднее время, в течение которого выполняется неравенство $z(t) > z^*(t)$, совпадает со средним временем, в течение которого выполняется обратное неравенство $z(t) < z^*(t)$, т. е.



$$\langle T_{z(t) > z^*(t)} \rangle = \langle T_{z(t) < z^*(t)} \rangle = \frac{1}{2} (t_2 - t_1).$$

Для конкретных типов случайных процессов можно получить дополнительную информацию. Так, для логнормального случайного процесса

$$y(t; \alpha) = \exp \left\{ -\alpha t + \int_0^t d\tau z(\tau) \right\},$$

где $z(t)$ — гауссов процесс «белого шума» с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2D\delta(t - t').$$

имеем равенство

$$-\alpha = \frac{1}{t} \langle \ln y(t) \rangle,$$

т.е. параметр α является *ляпуновским характеристическим показателем*. А кривой типичной реализации процесса $y(t; \alpha)$ оказывается экспоненциально спадающая кривая

$$y^*(t) = e^{\langle \ln y(t) \rangle} = e^{-\alpha t}.$$

Литература

1. Кляцкин В.И., *Стохастические уравнения глазами физика*. М.: Физматлит, 2001.
2. Кляцкин В.И., *Динамика стохастических систем (Курс лекций)*. М.: Физматлит, 2002.
3. Кляцкин В.И., *Диффузия и кластеризация пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках*. М.: Физматлит, 2005.
4. Кляцкин В.И., *Стохастические уравнения (Теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике)* в 2-х томах. М.: Физматлит, 2008.
5. Кляцкин В.И., Чхетиани О.Г., *О диффузии и кластеризации магнитного поля в случайных полях скоростей*, ЖЭТФ, 136(2), 400, 2009.
6. Кляцкин В.И., *Интегральные одноточечные статистические характеристики векторных полей в стохастических магнитогидродинамических потоках*, ЖЭТФ, 136(6), 1194, 2009.