

Введение

Часто физические процессы происходят в сложных средах, параметры которых можно рассматривать как некоторые реализации хаотических полей в пространстве и во времени. Решение различного рода динамических задач для этих конкретных реализаций параметров среды практически безнадежно, из-за чрезвычайной математической сложности задач. Однако, если бы даже удалось решить какую-то задачу в каком-либо конкретном случае, то пользы от этого было бы чрезвычайно мало, так как невозможно было бы сказать о том, что будет в другом случае. В то же время исследователей интересуют основные особенности протекающих явлений, не отвлекаясь на частности. Поэтому очень привлекательной оказалась идея использовать хорошо развитый математический аппарат случайных процессов и полей, т.е. вместо отдельных реализаций исследуемых процессов рассматривать статистические средние по всему ансамблю возможных реализаций. Такая постановка существенно упрощает математический аппарат и позволяет исследовать чрезвычайно широкий круг задач. В настоящее время, например, практически все задачи физики атмосферы и океана в той или иной степени основываются на статистическом анализе.

Введение случайности в параметрах среды порождает стохастичность в самих физических полях. Индивидуальные реализации, например, скалярных двумерных полей $\rho(\mathbf{R}, t)$, где $\mathbf{R} = x, y$, напоминают сложный горный ландшафт со случайно распределенными пиками, провалами, хребтами и перевалами. Обычно используемые методы статистического усреднения (т.е. вычисления средних типа $\langle \rho(\mathbf{R}, t) \rangle$, $\langle \rho(\mathbf{R}_1, t) \rho(\mathbf{R}_2, t) \rangle$ и т.п., где через $\langle \dots \rangle$ обозначено усреднение по ансамблю реализаций случайных параметров) сглаживают качественные особенности типичных реализаций, и, зачастую, полученные статистические характеристики не только не имеют ничего общего с поведением отдельных реализаций, но и противоречат, на первый взгляд, друг другу. Часто возникают парадоксальные ситуации, когда статистические характеристики экспоненциально растут во времени, в то время как индивидуальные реализации экспоненциально убывают во времени. Полная статистика (например, n - точечные моменты) содержит, разумеется, всю информацию о динамической системе. На практике же удастся исследовать лишь некоторые простейшие статистические характеристики, связанные главным образом с одновременными и одноточечными распределения вероятностей.

Существуют, однако, физические явления, происходящие с вероятностью единица, которые будем называть *когерентными явлениями*. Для таких явлений возможно установить связь между отдельными реализациями динамических систем со статистическими характеристиками и их можно понять на основе единого подхода, основанного на анализе одноточечных пространственно-временных плотностей вероятностей, соответствующих исходным динамическим стохастическим системам. Это особенно актуально для геофизических проблем, связанных с атмосферой и океаном, где, вообще говоря, отсутствует соответствующий ансамбль усреднения и экспериментаторы, как правило, имеют дело с отдельными реализациями.

1 Примеры когерентных явлений в стохастических динамических системах

1.1 Явление переброса в стохастических динамических системах

Остановимся прежде всего на одном стохастическом аспекте, связанном с динамическими стохастическими уравнениями, а именно на *явлении переброса*, обусловленном случайными воздействиями.

Рассмотрим одномерное нелинейное уравнение

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(1 - x^2) + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

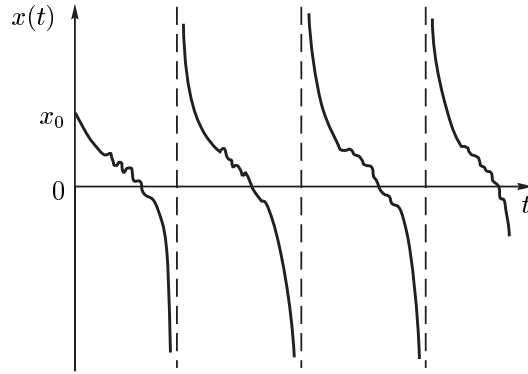


Рис. 1: Типичная реализация решения уравнения (2)

где $f(t)$ — случайная функция времени. При отсутствии случайности ($f(t) \equiv 0$) решение уравнения (1) имеет два устойчивых стационарных состояния $x = \pm 1$ и одно неустойчивое состояние $x = 0$. В зависимости от начального условия решение уравнения (1) придет в одно из устойчивых состояний. Однако в присутствии малых случайных возмущений $f(t)$ динамическая система (1) сперва придет в окрестность одного из устойчивых состояний, а затем, по прошествии некоторого времени, будет переброшена в окрестность другого устойчивого состояния. Очевидно, что подобная ситуация может осуществляться и в более сложных случаях.

Рассмотрим теперь простейший пример стохастической системы, возникающей в статистической теории волн и имеющей сингулярное поведение во времени

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\lambda x^2(t) + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad \lambda > 0, \quad (2)$$

где $f(t)$ — случайная функция времени.

В отсутствие случайностей ($f(t) = 0$) решение уравнения (2) имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{\lambda(t - t_0)}, \quad t_0 = -\frac{1}{\lambda x_0}.$$

Если $x_0 > 0$, то $t_0 < 0$ и решение задачи $x(t)$ монотонно стремится к нулю с ростом времени. Если же $x_0 < 0$, то решение $x(t)$ обращается в $\{-\infty\}$ в течение конечного времени $t_0 = -1/\lambda x_0$, т.е. становится *сингулярным* и имеет *взрывной характер*. В этом случае влияние случайной силы $f(t)$ на динамику системы не существенно. Оно становится важным только в случае положительного значения x_0 . В этом случае решение задачи, слегка флуктуируя, уменьшается с ростом времени, оставаясь положительным. При достижении достаточно малого значения $x(t)$ оно будет «переброшено» под действием силы $f(t)$ в область отрицательных значений x и по прошествии некоторого конечного времени обратится в $\{-\infty\}$.

Таким образом, в стохастическом случае для любых значений величины x_0 решение задачи (2) имеет взрывной характер и обращается в $\{-\infty\}$ в течение конечного времени t_0 с вероятностью равной единице. Примерная реализация поведения решения задачи (2) $x(t)$ во времени для $t > t_0$ имеет как бы *квази-периодическую* структуру и схематически изображена на Рис. 1.

Статистическое описание явлений переброса хорошо известно. Оно содержится практически во всех учебниках по теории случайных процессов и, в простейшем случае, описывается краевой задачей для обратного уравнения Фоккера-Планка.

1.2 Частицы в поле случайных сил и скоростей

Динамика малоинерционной частицы в случайном гидродинамическом потоке с гидродинамическим полем скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ описывается уравнениями Ньютона

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{V}(t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \\ \frac{d}{dt}\mathbf{V}(t) &= -\lambda[\mathbf{V}(t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t)], \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_0(\mathbf{r}_0).\end{aligned}\quad (3)$$

Линейный по полю скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ член в правой части (3) $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \lambda\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ является известной *формулой Стокса* для силы сопротивления, действующей на медленно движущуюся частицу. При аппроксимации частицы шаром с радиусом a , параметр $\lambda = 6\pi a\eta/m_p$, где η – коэффициент динамической вязкости, а m_p – масса частицы.

Для безинерционных частиц параметр $\lambda \rightarrow \infty$ и, как следует из уравнения (3),

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t), \quad (4)$$

и траектория частицы в случайном гидродинамическом потоке с полем скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ описывается простейшим стохастическим уравнением

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (5)$$

т.е. для безинерционных частиц задача определения их траекторий в гидродинамическом потоке является чисто кинематической задачей.

Для системы частиц, с формальной точки зрения, каждая частица движется независим образом. Однако, если случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ имеет конечный пространственный радиус корреляции l_{cor} , то частицы, расстояние между которыми меньше l_{cor} , находятся в общей зоне влияния случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и могут появиться новые коллективные особенности в динамике такой системы частиц. В общем случае случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ может иметь как соленоидальную (для которой $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$), так и потенциальную (для которой $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$) составляющие. Как показывают результаты численного моделирования, динамика системы частиц в этих случаях существенно различная. Так, на Рис. 2а для бездивергентного поля скоростей ($\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$) изображена эволюция во времени системы частиц (двумерный случай), равномерно расположенных в круге. В этом случае площадь, ограниченная контуром, сохраняется и частицы относительно равномерно заполняют область, ограниченную деформированным контуром. Возникает лишь сильная изрезанность фрактального характера этого контура. Для случая же потенциального поля скоростей ($\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$), частицы, равномерно расположенные в квадрате в начальный момент времени, в процессе временной эволюции образуют кластерные области (компактные области повышенной концентрации частиц, расположенные в большей степени разреженных зонах). Результаты численного моделирования для этого случая приведены на Рис. 2. Подчеркнем, что это – чисто кинематический эффект. Такая особенность динамики частиц исчезает при усреднении по ансамблю реализаций случайного поля скоростей.

Пусть гидродинамическое поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – стационарное во времени и однородное и изотропное в пространстве гауссово случайное поле с дисперсией $\sigma_{\mathbf{u}}^2 = \langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ и временным радиусом корреляции

$$\tau_0 = \frac{1}{\sigma_{\mathbf{u}}^2} \int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle.$$

В приближении дельта-коррелированности поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ во времени легко получить выражения для дисперсии и временного радиуса корреляции скорости частицы $\mathbf{V}(t)$ в стационарном режиме ($\lambda t \rightarrow \infty$)

$$\sigma_{\mathbf{v}}^2 = \lambda \tau_0 \sigma_{\mathbf{u}}^2, \quad \tau_{\mathbf{v}} = 1/\lambda. \quad (6)$$

При этом пространственный коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{r}^2(t) \rangle = \sigma_{\mathbf{u}}^2 \tau_0 \quad (7)$$

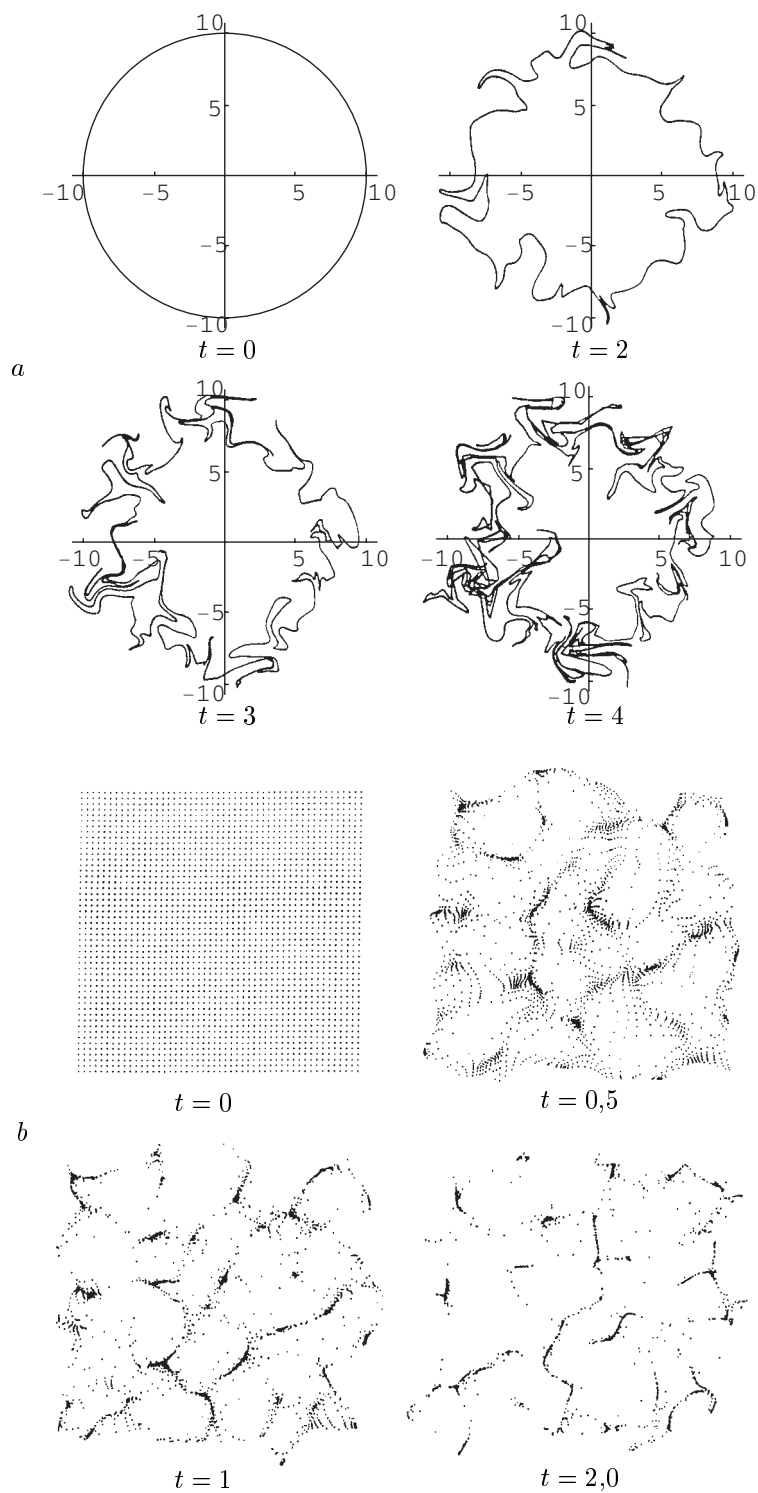


Рис. 2: Результаты численного моделирования диффузии системы частиц, описываемых уравнениями (5) в соленидальном (*a*) и дивергентном (*b*) случайных полях скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r})$.

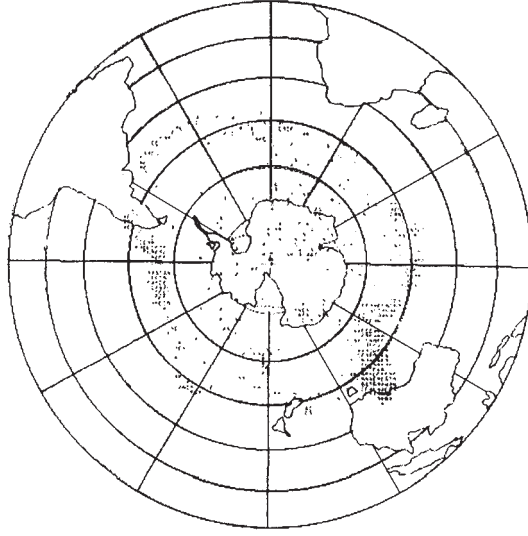


Рис. 3: Распределение баллонов в атмосфере через 105 суток после начала численного эксперимента

и не зависит от параметра λ .

Одним из условий применимости приближения дельта-коррелированности случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ во времени является условие $\lambda\tau_0 \ll 1$.

С другой стороны для безинерционной частицы ($\lambda \rightarrow \infty$) имеет место равенство

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t),$$

т.е. дисперсия и временной радиус корреляции скорости частицы $\mathbf{V}(t)$ в этом предельном случае

$$\sigma_{\mathbf{v}}^2 = \sigma_{\mathbf{u}}^2, \quad \tau_{\mathbf{v}} = \tau_0. \quad (8)$$

Сопоставляя равенства (6) с равенствами (8), видим, что они не совместимы, т.е. для выполнения равенства (8) требуется не только выполнения условий $\lambda t \gg 1$ и $t/\tau_0 \gg 1$, но и выполнение условия

$$\lambda\tau_0 \gg 1, \quad (9)$$

что противоречит условию применимости приближению дельта-коррелированности во времени случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$.

Таким образом, приближение дельта-коррелированности во времени случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ для динамической системы (3) неправильно описывает статистику скорости частицы и ее корреляцию с положением частицы при переходе к приближению безинерционности частиц. В тоже время для описания пространственной диффузии безинерционной частицы можно воспользоваться приближением дельта-коррелированности во времени случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ в стохастическом уравнении (5), так как в нем уже не содержится параметр λ . При этом для пространственного коэффициента диффузии мы снова приходим к формуле (7).

Отметим, что выделение пространственного описания диффузии частицы из его пространственно-временного описания составляет, так называемую, *проблему Крамерса*.

Впервые, по-видимому, такого рода кластеризация для системы частиц была обнаружена в работах, в которых в рамках простейших уравнений динамики атмосферы проводилось численное моделирование, так называемого, Еоле эксперимента. В рамках этого глобального эксперимента в 1970–1971 годах было запущено в Аргентине 500 баллонов постоянной плотности, которые распространялись по всему южному полушарию на высоте примерно в 12 км. На Рис. 3 представлено распределение баллонов по южному полушарию на 105 сутки после начала численного моделирования, из которого ясно видно, что они концентрируются в группы, что соответствует кластеризации плавучей примеси.

Статистический анализ показывает, что *типичной реализацией* для расстояния между двумя частицами (при достаточно малом начальном расстоянии l_0 между ними), например,

в двумерном случае будет экспоненциальная функция времени:

$$l^*(t) = l_0 \exp \left\{ \frac{1}{4} (D^s - D^p) t \right\},$$

растущая или затухающая в зависимости от знака разности $(D^s - D^p)$. Здесь величины D^s и D^p определяются спектральными частями соленоидальной и потенциальной составляющими поля скоростей. В частности, для соленоидального случая ($D^p = 0$) имеем экспоненциально растущую типичную реализацию, что соответствует экспоненциально быстрому разбеганию частиц. В другом предельном случае – потенциальном поле скоростей ($D^s = 0$), типичной реализацией будет экспоненциально убывающая кривая, т.е. налицо стремление частиц «слиться». Это согласуется с результатами численного моделирования (Рис. 2.). В то же время все статистические моменты расстояния между двумя частицами экспоненциально растут со временем, не зависимо от структуры поля скоростей.

1.3 Диффузия примеси в случайном поле скоростей

Рассмотрим теперь некоторые вопросы статистического описания переноса консервативного поля малоинерционной примеси $\rho(\mathbf{R}, t)$ (здесь, для наглядности, считаем вектор $\mathbf{R}$ двумерным). Диффузия поля плотности в случайном гидродинамическом потоке описывается уравнением неразрывности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}). \quad (10)$$

Здесь через $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ обозначено поле скоростей частиц в гидродинамическом потоке $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, которое для малоинерционных частиц можно описывать квазилинейным уравнением в частных производных

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -\lambda [\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)]. \quad (11)$$

В общем случае, возможны неединственность решения этого уравнения, существование в них разрывов и т.п. Однако в асимптотическом случае малой инерционности частиц (параметр $\lambda \rightarrow \infty$), который и представляет для нас интерес, решение задачи будет единственным на разумном интервале времени.

Общая масса примеси при этом сохраняется в процессе эволюции, т.е.

$$M = M(t) = \int d\mathbf{R} \rho(\mathbf{R}, t) = \int d\mathbf{R} \rho_0(\mathbf{R}) = \text{const.}$$

Случайное поле $\rho(\mathbf{R}, t)$, как указывалось во Введении, в каждой реализации напоминает сложный горный ландшафт, который, как и в обычной топографии, удобно анализировать на основе линий уровня (контуров постоянной плотности), определяемых равенством $\rho(\mathbf{R}, t) = \rho - \text{const.}$ Перемещение таких контуров в пространстве подобно диффузии системы частиц, рассмотренной выше, с теми же статистическими параметрами и существенно зависит от того, является ли поле скоростей соленоидальным или потенциальным.

В предположении гауссовости, дельта-коррелированности во времени, однородности и изотропности в пространстве случайного поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ легко получить для одноточечной плотности вероятностей

$$P(\mathbf{r}, t; \rho) = \langle \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \rangle$$

уравнение вида

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \right) P(\mathbf{r}, t; \rho) &= D^p \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 P(\mathbf{r}, t; \rho), \\ P(\mathbf{r}, 0; \rho) &= \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho), \end{aligned} \quad (12)$$

где коэффициенты диффузии

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{V}(\mathbf{r}, t + \tau) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \tau_{\mathbf{V}} \langle \mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t) \rangle, \\ D^p &= \int_0^\infty d\tau \left\langle \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t + \tau)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle = \tau_{\text{div} \mathbf{V}} \left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\tau_{\mathbf{V}}$ и $\tau_{\text{div} \mathbf{V}}$ — временные радиусы корреляции для случайных полей $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ и $\text{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$. Отметим, что именно отличие от нуля коэффициента диффузии D^p и характеризует кластеризацию поля плотности примеси. Что касается коэффициента пространственной диффузии, D_0 , то он совпадает с пространственным коэффициентом диффузии частиц и не играет никакой роли в кластеризации. В случае пространственной однородности поля плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ этот член вообще отсутствует в уравнении (12).

Очевидно, что даже в случае бездивергентного гидродинамического потока ($\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$) будет осуществляться кластеризация поля плотности (при учете, конечно, инерционности примеси), так как $\text{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \neq 0$. И в этом случае невозможно использовать приближение дельта-коррелированности во времени случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. В пределе же безинерционности примеси приближение дельта-коррелированности поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ может быть использовано, но кластеризация в этом случае осуществляться не будет.

Для соленоидального поля скоростей эволюция контуров совпадает с Рис. 2. В этом случае сохраняются как площадь, ограниченная контурами, так и масса примеси, сосредоточенная в этих областях. Кроме того, сохраняется и общее число замкнутых контуров, которые не могут исчезать и порождаться в среде в процессе эволюции во времени. В этом случае, как видно из Рис. 2, лишь линии уровня приобретают «фрактальный» характер, т.е. появляется все большая их «изрезанность», градиенты обостряются и этот процесс идет в сторону уменьшения пространственных масштабов вплоть до масштабов, на которых необходимо уже учитывать эффекты, связанные с молекулярной диффузией. Статистический анализ позволяет вычислить среднее значение длины линии уровня в этом случае

$$\langle l(t) \rangle = l_0 e^{D^s t},$$

которое экспоненциально растет со временем.

При наличии у поля скоростей потенциальной составляющей, все величины, перечисленные выше, эволюционируют во времени. Так, в частности, при $\tau \gg 1$, где $\tau = D^p t$, средняя площадь областей, где плотность выше заданного уровня ρ (т.е. $\rho(\mathbf{R}, t) > \rho$), убывает со временем по закону:

$$\langle S(t, \rho) \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \tau \rho}} e^{-\tau/4} \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})},$$

в то время как заключенная в этих областях средняя масса примеси

$$\langle M(t, \rho) \rangle \approx M - \sqrt{\frac{\rho}{\pi \tau}} e^{-\tau/4} \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})}$$

монотонно стремится к полной ее массе:

$$M = \int \rho_0(\mathbf{R}) d\mathbf{R}.$$

Таким образом, подтверждается сделанный ранее вывод о том, что поле плотности со временем стремится собираться в кластеры (компактные области повышенной концентрации, окруженные разреженными областями) в случайном поле скоростей с потенциальной составляющей.

Динамику формирования кластеров можно проиллюстрировать на примере, когда первоначально примесь равномерно распределена по плоскости:

$$\rho_0(\mathbf{R}) = \rho_0 = \text{const.}$$

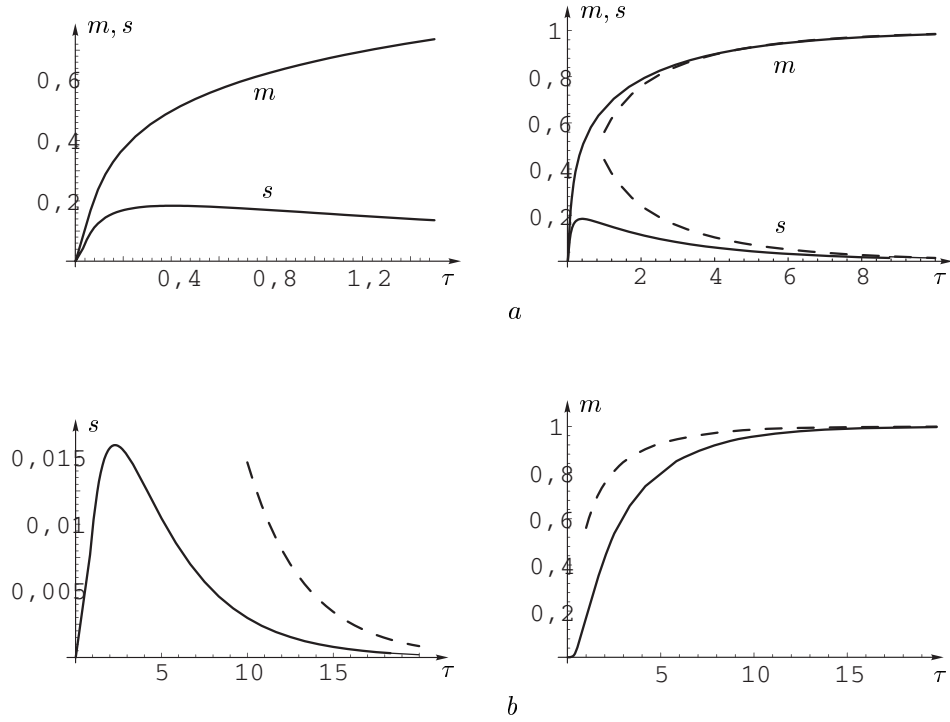


Рис. 4: Динамика образования кластеров для $\rho/\rho_0 = 1,5$ (a) и $\rho/\rho_0 = 10$ (b)

При этом, удельная площадь областей (приходящаяся на единицу площади), внутри которых $\rho(\mathbf{R}, t) > \rho$, асимптотически убывает во времени, независимо от отношения ρ/ρ_0 , в то время как внутри них собирается практически вся масса примеси.

Характер же временной эволюции образования кластерной структуры существенно зависит от отношения ρ/ρ_0 . Так если $\rho/\rho_0 < 1$, то в начальный момент времени $s(0, \rho) = 1$ и $m(0, \rho) = 1$. Далее образуются небольшие области, где $\rho(\mathbf{R}, t) < \rho$, и содержащие незначительную часть общей массы. С течением времени эти области быстро увеличиваются, а их масса перетекает в кластерные области.

В другом, наиболее интересном случае $\rho/\rho_0 > 1$, в начальный момент времени как $s(0, \rho) = 0$, так и $m(0, \rho) = 0$. Сначала образуются небольшие кластерные области, где $\rho(\mathbf{R}, t) > \rho$, которые затем интенсивно втягивают в себя значительную часть общей массы. В дальнейшем, площади этих областей с течением времени уменьшаются, а содержащаяся в них масса увеличивается до полной массы (см. Рис. 4 для $\rho/\rho_0 = 1,5$ (a) и $\rho/\rho_0 = 10$ (b)).

1.4 Локализация плоских волн в слоистых случайных средах

Рассмотрим простейшую статистическую стационарную задачу о волнах в слоистых случайных средах. Пусть слой хаотически неоднородной среды занимает часть пространства $L_0 < x < L$ и из области $x > L$ на нее падает плоская волна $u_0(x) = e^{-ik(x-L)}$. Из-за наличия неоднородностей возникает отраженная от слоя волна с коэффициентом отражения $R = u(L) - 1$ и выходящая из слоя волна с коэффициентом прохождения $T = u(L_0)$ (см. Рис. 5a). При отсутствии неоднородностей очевидно, что $R = 0$ и $T = 1$. Внутри слоя волновое поле описывается уравнением Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + k^2[1 + \varepsilon(x)]u(x) = 0, \quad (14)$$

где функция $\varepsilon(x)$, которую мы считаем случайной, описывает неоднородности среды. Данное уравнение следует дополнить краевыми условиями – условиями непрерывности волнового поля $u(x)$ и ее производной $du(x)/dx$ на границах слоя и условиями излучения на этих границах,

которые можно записать в виде:

$$u(L) + \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 2, \quad u(L_0) - \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (15)$$

Аналогичным образом поле точечного источника, расположенного в точке x_0 (Рис. 5b), описывается краевой задачей:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} G(x; x_0) + k^2 [1 + \varepsilon(x)] G(x; x_0) &= 2ik\delta(x - x_0), \\ G(L; x_0) + \frac{i}{k} \frac{dG(x; x_0)}{dx} \Big|_{x=L} &= 0, \quad G(L_0; x_0) - \frac{i}{k} \frac{dG(x; x_0)}{dx} \Big|_{x=L_0} = 0 \end{aligned}$$

и решение задачи о падении волны на слой среды соответствует положению источника на границе $x_0 = L$, т.е.

$$u(x) = G(x; L).$$

Таким образом, мы имеем краевую задачу для комплексного волнового поля $u(x)$, состоящую в нахождении статистических характеристик как коэффициентов отражения и прохождения, так и интенсивности поля внутри слоя среды $I(x) = |u(x)|^2$, считая известными статистические характеристики функции $\varepsilon(x)$. Отметим, что коэффициенты отражения и прохождения связаны между собой равенством:

$$|R|^2 + |T|^2 = 1,$$

являющимся следствием сохранения плотности потока энергии при отсутствии поглощения волны в среде.

Рассматриваемое волновое уравнение, по своей форме напоминает уравнение для осциллятора с изменяющейся собственной частотой (если заменить пространственную переменную x на переменную t – время), для которого, как хорошо известно, имеет место явление *параметрического резонанса* на частотах $2k/n$ ($n = 1, 2, \dots$). Учитывая, что случайная функция $\varepsilon(x)$ имеет составляющие всех частот, включая и указанные, ясно, что аналогичное явление должно иметь место и для рассматриваемой задачи, которое может быть названо *явлением стохастического волнового параметрического резонанса*. Однако, в силу краевых условий (которые «зажимают» значения волнового поля на границах слоя неоднородной среды) экспоненциальный рост поля может осуществляться только в глубине слоя, вдали от его границ.

На Рис. 6 схематически изображено распределение моментов интенсивности волнового поля $I(x) = |u(x)|^2$, нормированных на их значения на границе $x = L$, иллюстрирующее явление стохастического волнового параметрического резонанса. Из рисунка видно, что максимальное значение достигается примерно в середине слоя (за исключением средней интенсивности, которая монотонно убывает).

Для конкретных вычислений статистических характеристик решения волновой задачи обычно используется модель флуктуаций функции $\varepsilon(x)$ в виде гауссовского дельта-коррелированного случайного процесса (процесса *белого шума*), хотя основная принципиальная часть результатов и мало зависит от модели среды. Использование конкретной модели позволяет количественно вычислить основные параметры задачи.

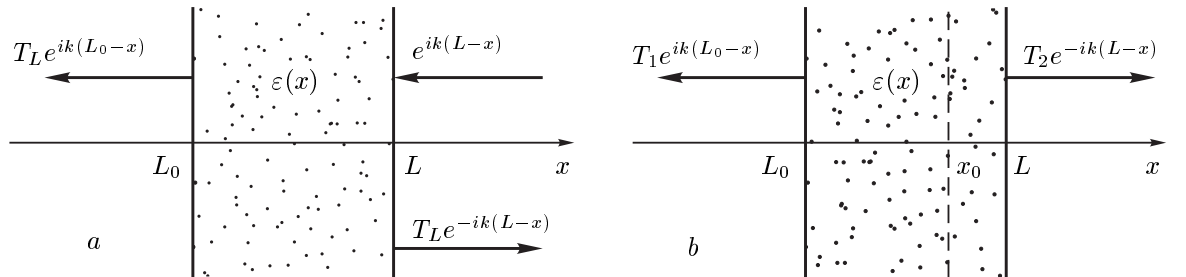


Рис. 5: Падение плоской волны на слой среды (a) и источник внутри среды (b)

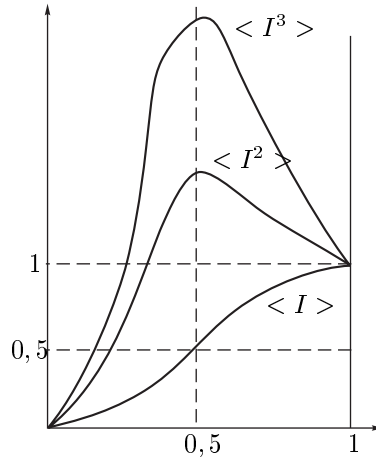


Рис. 6: Схематическое поведение моментов интенсивности волнового поля в задаче о падении волны на слой среды (стохастический волновой параметрический резонанс)

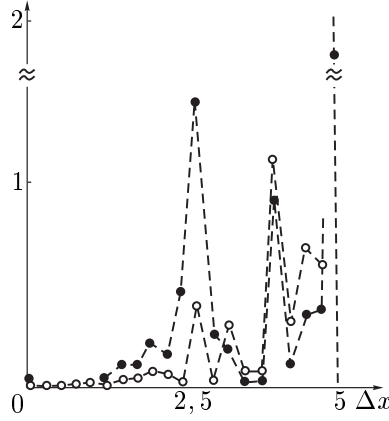


Рис. 7: Численное моделирование динамической локализации для двух реализаций неоднородностей среды

Статистический анализ решения задачи показывает, что для достаточно толстого слоя среды, а именно $D(L - L_0) \gg 1$ (где величина D связана со статистическими характеристиками функции $\varepsilon(x)$), с вероятностью единица $|T| \rightarrow 0$ и, следовательно, $|R| \rightarrow 1$, т.е. полупространство $(L_0 \rightarrow -\infty)$ случайно-неоднородной среды полностью отражает падающую волну за счет многократного переотражения в среде, т.е. имеет место *динамическая локализация волнового поля* в этом слое. При этом типичная реализация интенсивности волны в среде описывается экспоненциально спадающей кривой

$$I^*(x) = 2e^{-D(L-x)},$$

где величина $l_{\text{loc}} = 1/D$ называется *длиной локализации* и определяет пространственный масштаб затухания интенсивности волнового поля в среде в отдельных его реализациях.

На Рис. 7 приведены две реализации интенсивности волнового поля (белые и черные кружки), полученные численным моделированием рассматриваемой задачи. Из рисунка видно, что имеются большие выбросы интенсивности волнового поля на фоне общего быстрого спада, которое и можно отождествить с проявлением свойства динамической локализации данных реализаций. Однако, среднее значение интенсивности волнового поля для полупространства случайной среды $\langle I(L-x) \rangle = 2$, а более высокие моменты, нормированные на их значения на границе слоя, описываются выражением:

$$\langle I^n(L-x) \rangle = e^{Dn(n-1)(L-x)},$$

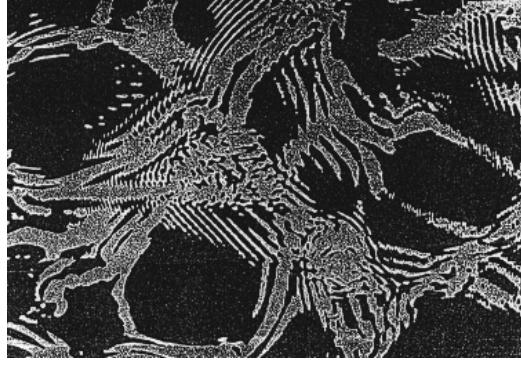


Рис. 8: Поперечное сечение лазерного пучка в турбулентной среде

т.е. интенсивность волнового поля имеет логарифмически-нормальное распределение вероятностей, моменты экспоненциально растут вглубь среды и формирование статистики осуществляется за счет больших выбросов относительно кривой типичной реализации, что означает отсутствие *статистической локализации волнового поля*.

1.5 Каустическая структура волнового поля в случайно-неоднородной среде

Распространение волн в случайно-неоднородной трехмерной среде обычно рассматривается на основе скалярного параболического уравнения, которое справедливо для описания распространения волн в среде с крупномасштабными трехмерными неоднородностями и описывает рассеяние волны на малые углы:

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} U(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) U(x, \mathbf{R}), \quad U(0, \mathbf{R}) = U_0(\mathbf{R}).$$

Здесь введены обозначения: x – координата в направлении распространения волны, $\mathbf{R}$ – координаты в поперечной плоскости, а $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ – отклонение диэлектрической проницаемости от единицы. Это уравнение является, естественно, приближенным.

Если ввести амплитуду и фазу волнового поля по формуле

$$U(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) \exp \{iS(x, \mathbf{R})\},$$

то уравнение переноса для интенсивности волнового поля $I(x, \mathbf{R}) = |u(x, \mathbf{R})|^2$ можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \{ \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) I(x, \mathbf{R}) \} = 0, \quad I(0, \mathbf{R}) = I_0(\mathbf{R}). \quad (16)$$

Уравнение (16) по форме совпадает с уравнением (10) и, следовательно, его можно трактовать как уравнение переноса консервативной примеси в потенциальном поле скоростей. Однако только в *приближении геометрической оптики* эту примесь можно считать пассивной. В общем же случае, при учете дифракционных эффектов, она является активной.

Реализации поля интенсивности, согласно предыдущему разделу, должны иметь кластерный характер, которые проявляются в виде каустических структур. Так, на Рис. 8 приведена фотография поперечного сечения лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной среде (лабораторный эксперимент). На рисунке ясно видно возникновение каустической структуры волнового поля. На Рис. 9 приведена фотография бассейна также с четко выраженной каустической структурой волнового поля на его дне. Подобные структуры возникают при преломлении и отражении света взволнованной водной поверхностью, что соответствует рассеянию на, так называемом, *фазовом экране*. Отметим, что для плоской падающей волны, соответствующей начальному условию $U(0, \mathbf{R}) = U_0 - \text{const}$, как среднее значение интенсивности волнового поля для статистически однородной среды $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ постоянно и не зависит от переменной $\mathbf{R}$ ($\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = I_0$), так и корреляционная функция волнового поля имеет вид

$$\langle U(x, \mathbf{R}_1) U^*(x, \mathbf{R}_2) \rangle = I_0 e^{-k^2 D(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)x},$$



Рис. 9: Каустики в бассейне

где функция $D(\mathbf{R})$ связана со статистическими характеристиками поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Средняя интенсивность волнового поля и его корреляционная функция в этом случае не зависят от явления дифракции вообще, в отличие от Рис. 8 и 9.

2 Элементы математического аппарата для описания когерентных явлений

2.1 Статистическая топография случайных процессов и полей

Остановимся теперь кратко на математическом аппарате, позволяющем описать когерентные явления.

Прежде всего обсудим понятие типичной реализации случайного процесса $z(t)$, которое характеризует основные особенности поведения отдельной реализации процесса в целом на всем интервале времен.

2.1.1 Типичная реализация случайного процесса

Пусть $z(t)$ — случайный процесс по переменной t , которую для определенности будем считать временем. Статистические характеристики процесса $z(t)$ в фиксированный момент времени t полностью описываются ее плотностью вероятностей $p(z; t)$, параметрически зависящей от времени t , или интегральной функцией распределения, определяющей вероятность того, что в фиксированный момент времени t значение процесса $z(t) < z$:

$$F(z; t) = P(z(t) < z) = \int_{-\infty}^z dz' p(z'; t). \quad (17)$$

Назовем типичной реализацией случайного процесса $z(t)$ детерминированную кривую $z^*(t)$, которая является *медианой интегральной функции распределения* (17) и определяется как решение алгебраического уравнения

$$F(z^*(t); t) = 1/2.$$

Основанием для этого является свойство медианы, заключающееся в том, что для любого интервала времени (t_1, t_2) случайный процесс $z(t)$ как-бы «обвивает» кривую $z^*(t)$ таким образом, что среднее время, в течение которого выполняется неравенство $z(t) > z^*(t)$, совпадает

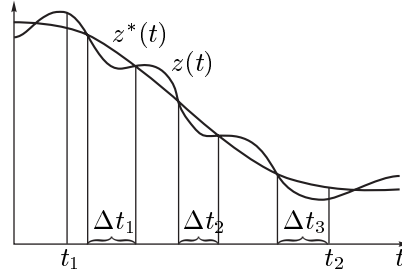


Рис. 10: К определению типичной реализации случайного процесса

со средним временем, в течение которого выполняется обратное неравенство $z(t) < z^*(t)$ (Рис. 10), т.е.

$$\langle T_{z(t) > z^*(t)} \rangle = \langle T_{z(t) < z^*(t)} \rangle = \frac{1}{2} (t_2 - t_1).$$

Кривая $z^*(t)$ может, естественно, существенно отличаться от любой конкретной реализации процесса $z(t)$ и не описывает величины возможных выбросов. Таким образом, кривая типичной реализации $z^*(t)$ случайного процесса $z(t)$, полученная с помощью одновременной плотности вероятностей, определена, тем не менее, на всем интервале времени $t \in (0, \infty)$.

Для конкретных типов случайных процессов можно получить дополнительную информацию, характеризующую уже выбросы относительно этой кривой.

2.1.2 Случайные поля

В статистической топографии случайных полей основным объектом изучения, как и в обычной топографии горных массивов, является система контуров — линий уровня (в двумерном случае) или поверхностей (в трехмерном случае) постоянных значений, определяемых равенством $f(\mathbf{r}, t) = f = \text{const}$.

Для анализа системы контуров (для простоты в данном разделе будем говорить о двумерном случае ($\mathbf{r} = \mathbf{R}$)) удобно ввести сингулярную индикаторную функцию

$$\varphi(t, \mathbf{R}; f) = \delta(f(\mathbf{R}, t) - f), \quad (18)$$

сосредоточенную на них.

Через функцию (18) выражаются, например, такие величины как общая площадь областей, ограниченных линиями уровня, где $f(\mathbf{R}, t) > f$:

$$S(t; f) = \int \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) d\mathbf{R} = \int_f^\infty df' \int d\mathbf{R} \varphi(t, \mathbf{R}; f')$$

и общая «масса» поля, заключенная в этих областях:

$$M(t; f) = \int f(\mathbf{R}, t) \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) d\mathbf{R} = \int_f^\infty f' df' \int d\mathbf{R} \varphi(t, \mathbf{R}; f').$$

Среднее значение индикаторной функции (18) по ансамблю реализаций определяет одновременную во времени и одноточечную в пространстве плотность вероятностей

$$P(t, \mathbf{R}; f) = \langle \varphi(t, \mathbf{R}; f) \rangle,$$

и, следовательно, средние по ансамблю реализаций значения всех выражений непосредственно определяются этой плотностью вероятностей.

Дополнительную информацию о детальной структуре поля $f(\mathbf{R}, t)$ можно получить, включив в рассмотрение его пространственный градиент $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) = \nabla f(\mathbf{R}, t)$. Так, например, величина

$$l(t; f) = \int d\mathbf{R} |\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)| \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) = \oint dl$$

описывает общую длину контуров

Включение в рассмотрение пространственных производных второго порядка позволяет оценить общее число контуров $f(\mathbf{R}, t) = f = \text{const}$ с помощью приближенной (с точностью до незамкнутых линий) формулы:

$$N(t; f) = N_{\text{in}}(t; f) - N_{\text{out}}(t; f) = \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{R} \kappa(t, \mathbf{R}; f) |\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)| \delta(f(\mathbf{R}, t) - f),$$

где $N_{\text{in}}(t; f)$, $N_{\text{out}}(t; f)$ — числа контуров, для которых вектор $\mathbf{p}$ направлен по внутренней и внешней нормали соответственно, а $\kappa(t, \mathbf{R}; f)$ — кривизна линии уровня.

Отметим, что для пространственно однородного поля $f(\mathbf{R}, t)$, когда соответствующие одноточечные плотности вероятностей $P(t, \mathbf{R}; f)$ и $P(t, \mathbf{R}; f, \mathbf{p})$ не зависят от $\mathbf{R}$, статистические средние всех выражений (без интегрирования по $\mathbf{R}$) будут описывать соответствующие удельные (приходящиеся на единицу площади) значения этих величин, если они, конечно, существуют.

2.2 Уравнение Фоккера-Планка

Пусть векторная функция $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ удовлетворяет динамическому уравнению

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (19)$$

где $v_i(\mathbf{x}, t)$ ($i = 1, \dots, n$) — детерминированные функции, а $f_i(\mathbf{x}, t)$ — случайные функции $(n+1)$ переменной, обладающие следующими свойствами

- (а) $f_i(\mathbf{x}, t)$ — гауссово случайное поле в $(n+1)$ -мерном пространстве $(\mathbf{x}, t)$;
- (б) $\langle f_i(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$.

Будем для определенности считать, что t — временная координата, а $\mathbf{x}$ — пространственная.

Статистические характеристики поля $f_i(\mathbf{x}, t)$ полностью описываются заданием его корреляционного тензора

$$B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t') \rangle.$$

Так как уравнение (19) является уравнением первого порядка с начальным условием, то для него выполняется условие динамической причинности

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} x_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad t' < t_0 \quad \text{и} \quad t' > t, \quad (20)$$

т.е. его решение $\mathbf{x}(t)$ функционально зависит лишь от предшествующих по t значений $f_j(\mathbf{x}, t')$ из интервала $t_0 \leq t' \leq t$. При этом для вариационной производной имеем равенство

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t-0)} x_i(t) = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}'). \quad (21)$$

Однако может существовать статистическая связь между $\mathbf{x}(t)$ и последующими значениями $f_j(\mathbf{x}, t'')$, где $t'' > t$, так как такие значения $f_j(\mathbf{x}, t'')$ коррелированы со значениями $f_j(\mathbf{x}, t')$ при $t' \leq t$. Ясно, что корреляция функции $\mathbf{x}(t)$ с последующими значениями $f_j(\mathbf{x}, t'')$ заметна лишь при $t'' - t \leq \tau_0$, где τ_0 — радиус корреляции поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ по переменной t .

Для достаточно большого класса реальных физических процессов, характерный временной масштаб изменения функции $\mathbf{x}(t)$ имеет величину порядка $T \gg \tau_0$, и в этом случае существует малый параметр — τ_0/T , который может быть использован для построения приближенного решения.

В первом приближении по этому параметру малости можно рассматривать асимптотику при $\tau_0 \rightarrow 0$. При этом значения $\mathbf{x}(t')$ при $t' < t$ будут не только функционально, но и статистически независимы от значений $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t'')$ при $t'' > t$. Это приближение эквивалентно замене корреляционного тензора B_{ij} на некоторый эффективный тензор, определяемый равенством

$$B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 2\delta(t - t') F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t). \quad (22)$$

Величина $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t)$ при этом определяется из условия равенства интегралов от $B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ и $B_{ij}^{\text{eff}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ по t'

$$F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t'),$$

что и соответствует переходу к гауссовому дельта-коррелированному по времени t случайному полю.

Введем индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x}(t)$ — решение уравнения (19), удовлетворяющую уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)] \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (23)$$

При этом

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t-0)} \varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}, t) \}. \quad (24)$$

Уравнение для плотности вероятностей решения уравнения (19)

$$P(\mathbf{x}, t) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle$$

получим, усредняя уравнение (23) по ансамблю реализаций поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle. \quad (25)$$

Уравнение (25) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{t_0}^t d\mathbf{x}' \int dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} \right\rangle, \quad (26)$$

Здесь мы воспользовались формулой Фурутцу-Новикова

$$\langle f_k(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \rangle = \int d\mathbf{x}' \int dt' B_{kl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]}{\delta f_l(\mathbf{x}', t')} \right\rangle, \quad (27)$$

справедливой для корреляции гауссового случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ с произвольным функционалом $R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$ от него, и условием динамической причинности (20).

Уравнение (26) показывает, что одновременная плотность вероятностей решения $\mathbf{x}(t)$ в момент времени t определяется функциональной зависимостью решения $\mathbf{x}(t)$ от поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}', t)$ для всех времен в интервале (t_0, t) .

В общем случае плотность вероятностей $P(\mathbf{x}, t)$ не описывается замкнутым уравнением. Если же для корреляционной функции поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ воспользоваться приближением (22), то возникнут члены, связанные со значениями $\delta \varphi[\mathbf{x}, t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] / \delta f_j(\mathbf{x}', t')$ при совпадающих временных аргументах $t' = t - 0$, которые, согласно равенству (24), выражаются непосредственно через саму величину $\varphi[\mathbf{x}, t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$. Таким образом мы приходим к замкнутому уравнению Фоккера-Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)] P(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t) P(\mathbf{x}, t)], \quad (28)$$

где

$$A_k(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x'} F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}}.$$

Уравнение (28) следует решать с начальным условием $P(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, или же с начальным условием более общего вида $P(\mathbf{x}, t_0) = W_0(\mathbf{x})$, если начальные условия так же случайны, но статистически независимы от поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Уравнение Фоккера-Планка (28) — уравнение в частных производных и его дальнейший анализ существенно зависит от формулировки краевых условий по $\mathbf{x}$, которые формулируются для анализа конкретных задач.

2.2.1 Плотность вероятностей перехода

Вернемся теперь к динамической системе (19), и рассмотрим m -временную плотность вероятностей

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \langle \delta(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_1) \dots \delta(\mathbf{x}(t_m) - \mathbf{x}_m) \rangle, \quad (29)$$

относящуюся к m различным моментам времени $t_1 < t_2 < \dots < t_m$. Дифференцируя (29) по времени t_m и используя затем динамическое уравнение (19), условие динамической причинности (20), определение функции $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t)$, и формулу Фурутцу-Новикова (27), можно получить уравнение, аналогичное уравнению Фоккера-Планка (28),

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t_m} P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) + \\ & + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{mk}} [v_k(\mathbf{x}_m, t_m) + A_k(\mathbf{x}_m, t_m)] P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \\ & = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_{mk} \partial x_{ml}} [F_{kl}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m; t_m) P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m)]. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь суммирование по индексу m не производится. Начальное условие к (30) можно найти из формулы (29). Полагая $t_m = t_{m-1}$ в (29), получаем

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_{m-1}) = \delta(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \quad (31)$$

Решение уравнения (30) можно искать в виде

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \quad (32)$$

Так как все дифференциальные операции в (30) относятся к t_m и $\mathbf{x}_m$, то подставляя (32) в (30) и (31), находим следующее уравнение для плотности вероятностей перехода $p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) | \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \rangle$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) + \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)] p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \\ & = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)], \\ & p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) |_{t \rightarrow t_0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (33)$$

В уравнении (33) мы обозначили переменные $\mathbf{x}_m, t_m$ через $\mathbf{x}, t$, а переменные $\mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}$ через $\mathbf{x}_0, t_0$.

Применяя формулу (32) $(m-1)$ раз, получаем соотношение

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) \dots p(\mathbf{x}_2, t_2 | \mathbf{x}_1, t_1) P(\mathbf{x}_1, t_1), \quad (34)$$

где $P(\mathbf{x}_1, t_1)$ — плотность вероятностей, определяемая уравнением (28) и относящаяся к одному моменту времени t_1 . Равенство (34) выражает многовременную плотность вероятностей через произведение плотностей вероятностей перехода и означает, что случайный процесс $\mathbf{x}(t)$ является марковским.

2.2.2 Об условиях применимости уравнения Фоккера-Планка

Для оценки границ применимости уравнения Фоккера-Планка необходимо учитывать конечность радиуса корреляции τ_0 поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ по временной координате. Для статистически однородного и изотропного в пространстве и стационарного во времени поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ его дисперсия и временной радиус корреляции τ_0 определяются равенствами

$$\sigma_{\mathbf{f}}^2 = \langle \mathbf{f}^2(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad \tau_0 = \frac{1}{\sigma_{\mathbf{f}}^2} \int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t + \tau) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \rangle.$$

При этом условие малости параметра τ_0/T является необходимым, но вообще говоря, недостаточным для возможности описывать статистические характеристики решения уравнения (19) на основе приближения дельта-коррелированного случайного поля, которому соответствует уравнение Фоккера–Планка. Для каждой конкретной задачи необходимо проводить более детальные исследования. Далее, мы приведем физически более наглядный метод, называемый *диффузионным приближением*, также приводящий к марковости решения уравнения (19), но учитывающий, в определенной мере, конечность временного радиуса корреляции.

Здесь же подчеркнем, что приближение дельта-коррелированного случайного поля не означает формальной замены случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ в (19) на случайное поле с корреляционной функцией (22). Это приближение соответствует построению асимптотического разложения при стремлении временного радиуса корреляции τ_0 поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ к нулю. И при таком предельном переходе точные средние величины переходят в выражения, полученные с помощью формальной замены корреляционного тензора поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ на эффективный тензор (22).

Рассмотрим теперь несколько простейших аппроксимаций реальных случайных процессов, широко используемых в качестве моделей для параметров задач.

2.2.3 Гауссовский случайный процесс *белого шума*

Первая аппроксимация это – представление стационарного во времени гауссового случайного процесса $\xi(t)$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией $B_\xi(t - t') = \langle \xi(t)\xi(t') \rangle$ в виде

$$B_\xi(t) \rightarrow B_\xi^{\text{eff}}(t) = 2\sigma_\xi^2 \tau_0 \delta(t), \quad (35)$$

где σ_ξ^2 – дисперсия реального процесса $\xi(t)$, а τ_0 – его временной радиус корреляции

$$\tau_0 = \frac{1}{\sigma_\xi^2} \int_0^\infty dt B_\xi(t).$$

Такая аппроксимация справедлива, если величина τ_0 много меньше любого временного масштаба в рассматриваемой задаче.

Рассмотрим теперь простейшие случайные процессы, построенные на основе процесса белого шума.

2.2.4 Винеровский случайный процесс

Интеграл от процесса $\xi(t)$ определяет *Винеровский случайный процесс (процесс броуновского движения)*

$$w(t) = \int_0^t d\tau \xi(\tau).$$

Это – гауссовский, нестационарный случайный процесс с характеристиками:

$$\langle w(t) \rangle = 0, \quad \langle w(t)w(t') \rangle = 2\sigma_\xi^2 \tau_0 \min\{t, t'\}.$$

2.2.5 Логарифмически нормальный процесс

Определим логнормальный случайный процесс по формуле

$$y(t; \alpha) = e^{-\alpha t + w(t)} = \exp \left\{ -\alpha t + \int_0^t d\tau \xi(\tau) \right\}, \quad (36)$$

где $\xi(t)$ – гауссов процесс белого шума (35). Этот процесс описывается стохастическим уравнением

$$\frac{d}{dt} y(t; \alpha) = \{-\alpha + \xi(t)\} y(t; \alpha), \quad y(0; \alpha) = 1.$$

Логнормальный процесс $y(t; \alpha)$ является марковским процессом и его одновременная плотность вероятностей описывается уравнением Фоккера-Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t; \alpha) = \alpha \frac{\partial}{\partial y} y P(y, t; \alpha) + D \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} y P(y, t; \alpha), \quad P(y, 0; \alpha) = \delta(y - 1),$$

решение которого имеет вид

$$P(y, t; \alpha) = \frac{1}{2y\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(ye^{\alpha t})}{4Dt} \right\}, \quad (37)$$

где параметр $D = \sigma^2 \tau_0$. Характерной особенностью этого распределения является появление длинного пологого «хвоста» при $\tau = 1$, означающего усиление роли больших выбросов процесса $y(t; \alpha)$ в формировании одновременной статистики. Соответственно, интегральная функция распределения определяется выражением

$$F(y, t; \alpha) = \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{2Dt}} \ln(ye^{\alpha t}) \right), \quad (38)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dx e^{-x^2}$ — интеграл ошибок.

Зная только одновременные статистические характеристики процесса $y(t; \alpha)$ можно получить важную информацию о поведении реализаций процесса $y(t; \alpha)$ на всем интервале времен $(0, \infty)$. В частности:

1. Зная интегральную функцию распределения, можно вычислить типичную реализацию логнормального процесса $y(t; \alpha)$, которая оказывается экспоненциально спадающей кривой

$$y^*(t; \alpha) = e^{-\alpha t}.$$

2. Легко написать выражения для моментных функций процесса $y(t; \alpha)$

$$\langle y^n(t; \alpha) \rangle = e^{n(n-\alpha/D)Dt}, \quad \langle y^{-n}(t; \alpha) \rangle = e^{n(n+\alpha/D)Dt}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

которые экспоненциально растут во времени. Следовательно, экспоненциальный рост моментов обусловлен выбросами процесса $y(t; \alpha)$ относительно кривой типичной реализации $y^*(t; \alpha)$ как в сторону больших так и малых значений y .

Для значения параметра $\alpha/D = 1$ среднее значение процесса $y(t; D)$ не зависит от времени и равно единице. При этом, однако, вероятность выполнения неравенства $y < 1$ при $Dt \gg 1$ быстро стремится к единице по закону

$$P(y(t; D) < 1) = \Phi \left(\sqrt{\frac{Dt}{2}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} e^{-Dt/4},$$

т.е. подавляющее время графики реализаций процесса лежат ниже уровня его среднего значения $\langle y(t; D) \rangle = 1$, хотя статистические моменты процесса $y(t; D)$ в основном и определяются его большими выбросами.

Таким образом мы имеем явное противоречие между характером поведения статистических характеристик процесса $y(t; \alpha)$ и его реализаций.

3. Поведение реализаций процесса $y(t; \alpha)$ на всем интервале времени можно также оценить с помощью p -мажорантных кривых $M_p(t, \alpha)$, которые определим следующим образом. Назовем мажорантной кривой такую кривую — $M_p(t, \alpha)$, для которой при любых временах t с вероятностью p выполняется неравенство $y(t; \alpha) < M_p(t, \alpha)$, т.е.

$$P\{y(t; \alpha) < M_p(t, \alpha) \text{ для всех } t \in (0, \infty)\} = p.$$

Для логарифмически нормальных процессов легко получить однопараметрический класс экспоненциально спадающих мажорантных кривых

$$M_p(t, \alpha, \beta) = \frac{1}{(1-p)^{D/\beta}} e^{(\beta-\alpha)t}. \quad (39)$$

Обратим внимание на тот факт, что несмотря на постоянство статистического среднего $\langle y(t; D) \rangle = 1$ и экспоненциальный рост высших моментов процесса $y(t; D)$, всегда можно указать экспоненциально спадающую мажорантную кривую (39), ниже которой будут лежать реализации процесса $y(t; D)$ с любой наперед заданной вероятностью $p < 1$. В частности, например, с вероятностью $p = 1/2$ выполняется неравенство

$$y(t; D) < 4 \exp \left\{ -\frac{Dt}{2} \right\} \quad (40)$$

для любого момента времени t из интервала $(0, \infty)$. Это еще раз подтверждает, сделанный ранее вывод, о том, что экспоненциальный рост моментов процесса $y(t; D)$ во времени — эффект чисто статистический, обусловленный усреднением по всему ансамблю реализаций.

Отметим, что площадь под экспоненциально убывающими мажорантными кривыми конечна. Следовательно, большие выбросы процесса $y(t; \alpha)$, вызывая экспоненциальный рост высших моментов, не вносят существенного вклада в площадь под реализациями, которая практически для всех реализаций также конечна, т.е. выбросы логнормального процесса $y(t; \alpha)$ достаточно узки.

Все эти свойства логнормального процесса проявляются в динамике конкретных физических систем в виде когерентных явлений — *локализации* и *кластеризации*.

2.3 Диффузионное приближение

Условием применимости приближения дельта-коррелированности случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ (т.е. уравнения Фоккера-Планка) является условие малости временного радиуса корреляции случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — τ_0 по сравнению со всеми временными масштабами, имеющимися в рассматриваемой задаче. Учет конечности временного радиуса корреляции случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ можно провести в рамках диффузионного приближения. Это приближение более наглядно и физично, чем формальное математическое приближение дельта-коррелированного случайного поля. Это приближение справедливо также для достаточно малых флуктуаций параметров стохастической динамической системы и позволяет получить не только условия применимости дельта-коррелированного приближения, но и описать новые физические эффекты, порожденные конечностью временного радиуса корреляции случайных параметров. В рамках диффузионного приближения предполагается, что влияние случайных воздействий на временных масштабах порядка τ_0 не существенно, т.е. система на этих масштабах эволюционирует как свободная.

Пусть опять векторная функция $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет динамическому уравнению (19), где $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — векторная детерминированная функция, а $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — случайное статистически однородное в пространстве и стационарное во времени гауссово векторное поле со статистическими характеристиками

$$\langle f(\mathbf{x}, t) \rangle = 0, \quad B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = B_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; t - t') = \langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t') \rangle.$$

Для индикаторной функции $\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x})$, где $\mathbf{x}(t)$ — решение уравнения (19), имеем уравнение Лиувилля (23) и, следовательно, уравнение для плотности вероятностей решения уравнения (19) $P(\mathbf{x}(t)) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle$ имеет вид уравнение (26).

В диффузионном приближении уравнение (26) является точным, а вариационная производная и индикаторная функция на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — τ_0 описываются системой динамических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} \right\}, \\ \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} \Big|_{t=t'} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}, t') \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \}, \quad \varphi(\mathbf{x}, t)|_{t=t'} = \varphi(\mathbf{x}, t'). \end{aligned} \quad (41)$$

Решение задачи (26) и (41) справедливо для всех времен t . Однако, в этом случае решение задачи (19) $\mathbf{x}(t)$ не является векторным марковским случайным процессом, так как ее

многовременная плотность вероятностей не допускает факторизации с помощью плотности вероятностей перехода. В асимптотическом случае $t \gg \tau_0$ решение исходной динамической системы (19) в диффузионном приближении уже будет марковским случайным процессом и условиями применимости его является малость всех статистических эффектов на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции τ_0 .

Таким образом, диффузионное приближение позволяет снять основное ограничение, связанное с малостью временного радиуса корреляции τ_0 , оставаясь при этом в рамках марковского процесса. С помощью такого приближения можно, например, рассмотреть задачу о диффузии поля плотности малоинерционной примеси в случайном гидродинамическом бездивергентном потоке на основе уравнений (10) и (11), для которой неприменимо приближение дельта-коррелированности поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, и, следовательно, описать явление кластеризации в этой задаче.

Заключение

Подход к анализу стохастических динамических задач на основе статистической топографии, позволяющий по одноточечным статистическим характеристикам случайных процессов и полей определить количественные и качественные характеристики отдельных реализаций этих величин на всем интервале времен (во всем пространстве), возник в процессе дискуссий с экспериментаторами, которые имеют дело в основном с отдельными реализациями. С их точки зрения, теоретики, занимающиеся вычислениями статистических средних, изучают неизвестно что, так как эти статистические средние зачастую не только не похожи на отдельные реализации, но и, как было показано выше, просто противоречат им. Предложенный выше подход позволил снять все эти противоречия и, в какой-то мере, «примирил» экспериментаторов и теоретиков.

Конечно, сама работа по вычислению статистических средних динамических систем – это сложная математическая задача, для решения которой используются различные простейшие статистические модели флуктуирующих параметров типа процессов и полей белого шума. Такие модели правильно описывают основные особенности динамических систем. Однако, для более детального анализа «более тонких» особенностей необходимо в ряде случаев учитывать конечность временного (пространственного) радиуса корреляции.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 04-05-64044 и 02-05-64375).

Список литературы

- [1] Кляцкин В. И., 2001, *Стохастические уравнения глазами физика. Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения*, Москва, Физматлит.
- [2] Кляцкин В. И., 2002, *Динамика стохастических систем. Курс лекций*, Москва, Физматлит.
- [3] Кляцкин В. И., 2003, *Кластеризация и диффузия частиц и плотности пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках*, УФН **173** (7), 689 – 710.
- [4] Кляцкин В. И., 2004, *Распространение электромагнитных волн в случайно-неоднородной среде как задача статистической математической физики*, УФН **174** (2), 177 – 195.
- [5] Кляцкин В. И., Гурарий Д., 1999, *Когерентные явления в стохастических динамических системах*, УФН **169**(2), 171 – 207.
- [6] Кляцкин В. И., Саичев А. И., 1992, *Стохастическая и динамическая локализация плоских волн в случайных слоистых средах*, УФН, **162**(3), 161 – 194.